Escola Superior Náutica Infante D. Henrique

Análise Matemática I

Apontamentos de apoio à disciplina

Luís Cruz-Filipe & Patrícia Engrácia

Setembro de 2010

Conteúdo

Introdução

Estes apontamentos foram escritos para servir de apoio à disciplina de Análise Matemática I dos cursos de licenciatura da Escola Superior Náutica Infante D. Henrique.

Para além da preocupação de abordar todos os aspectos no programa da disciplina, foram incluídos diversos parágrafos destinados a desenvolver a intuição à volta das várias questões que vão sendo discutidas. Os exemplos incluídos focam situações de aplicação prática em diversas áreas de interesse para os alunos, incluindo algums assuntos que serão desenvolvidos posteriormente noutras disciplinas.

Teve-se ainda especial cuidado nas secções introdutórias por forma a garantir que o conteúdo dos apontamentos é acessível mesmo aos alunos com menor preparação a Matemática. Assim, revêem-se diversos conceitos que fazem parte dos programas do Ensino Secundário e que são relevantes para esta disciplina.

Paço d'Arcos, Setembro de 2010

Luís Cruz-Filipe e Patrícia Engrácia

Capítulo 1

Sucessões e séries reais

O primeiro capítulo destes apontamentos é dedicado às sucessões e séries de números reais. A inclusão deste tópico num texto de Análise Matemática deve-se não só ao facto de sucessões e séries serem ferramentas de trabalho extremamente úteis no estudo de funções, mas também ao seu interesse intrínseco em diversas outras áreas de aplicação, nomeadamente na Estatística e na área de métodos computacionais — nomeadamente a nível da Análise Numérica e da Simulação Computacional. Finalmente, o estudo de sucessões e séries permite introduzir num contexto mais simples vários conceitos fundamentais da Análise Matemática, que serão posteriormente generalizados ao contexto das funções reais de variável real.

1.1 Sucessões

1.1.1 Conceitos gerais

Uma sucessão de números reais é simplesmente uma sequência infinita de números. Tipicamente, usamos letras minúsculas para designar sucessões (u, v, w, e assim sucessivamente) e referimo-nos ao n-ésimo termo da sucessão u como u_n. Por exemplo, u_2 designa o segundo termo da sucessão u, enquanto w_4 se refere ao quarto termo da sucessão w.

Exemplo. As seguintes sequências são exemplos de sucessões reais.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$
$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \qquad 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \ldots$$
$$1, -2, 1, -4, 1, -6, 1, -8, \ldots$$

Todas estas sucessões têm uma regularidade bastante clara. A primeira é a sucessão dos números naturais; a segunda é a sucessão dos quadrados perfeitos; a terceira alterna os valores 0 e 1; a quarta é a sucessão das aproximações decimais de π; e a quinta alterna o valor 1 com os números pares negativos.

Contudo, não é necessário que uma sucessão tenha qualquer regularidade. As seguintes sucessões também são perfeitamente legítimas.

$$2, -5, 0.2, 19.2, 24.1, -2, -0.001, 23.15, \ldots$$
$$0.12, 0.25, 0.01, 0.04, 0.26, 0.69, 0.09, 0.99, 0.01, \ldots$$
$$\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{24}, 0.27, 3000, \pi, \ldots$$
$$127, 222, 254, 324, 431, 220, 291, 215, 433, \ldots$$

Este tipo de sucessões corresponde muitas vezes a dados experimentais; por exemplo, a última sucessão acima apresentada poderia corresponder ao número de automóveis que passam uma cabine de portagem durante períodos consecutivos de 120 minutos.

Na maioria das situações que vamos considerar, estaremos interessados em sucessões que exibem um comportamento regular, à semelhança do primeiro grupo do exemplo anterior. Nestes casos, há interesse em escrever a sucessão não como a sequência dos seus elementos, mas como uma *regra* que nos permite obter qualquer termo de forma sistemática.

Por exemplo, seja u a sucessão dos números naturais.

$$u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Usando a notação que referimos acima, podemos dizer que $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, e assim por diante. Assim, o elemento que ocupa a posição n naquela sequência é precisamente n — o que podemos escrever como a regra $u_n = n$. Esta expressão diz-se o *termo geral* desta sucessão.

A maneira de usar esta informação é ver o símbolo n como um espaço para inserir o valor em que estamos interessados. Assim, se quisermos saber o termo 100 da sucessão, substituímos n por 100 na relação $u_n = n$, obtendo $u_{100} = 100$.

Exemplo.

1. Seja u a sucessão cujos termos são

   $$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

   O termo de ordem n de u é o n-ésimo quadrado perfeito, ou seja, é precisamente n^2. Então, podemos definir esta sucessão pela expressão $u_n = n^2$.

2. Seja v a sucessão cujos termos são

   $$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

   Esta sucessão alterna entre os valores 0 e 1, consoante o índice do termo é par ou ímpar; ou seja, se n é ímpar, então $v_n = 0$; se n é par, então $v_n = 1$. Podemos representar esta condição por meio da seguinte expressão.

   $$v_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

   Para avaliar v_n, temos de começar por decidir em qual dos casos estamos, para depois obter o valor correspondente.

3. Seja w a sucessão cujos termos são

   $$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \ldots$$

   Esta sucessão contém aproximações de π com precisões cada vez maiores. Não é simples escrever uma fórmula que gere o termo w_n, mas podemos explicitá-lo por palavras: w_n é uma aproximação de π com precisamente n algarismos significativos (ou seja, com $(n-1)$ casas decimais).

4. Seja u a sucessão cujos termos são

$$1, -2, 1, -4, 1, -6, 1, -8, \ldots$$

Temos novamente uma alternância entre os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par. Os primeiros são sempre iguais a 1; já os termos de ordem par têm os simétricos dos números pares. O segundo termo da sucessão vale -2, o quarto vale -4, e assim sucessivamente. Podemos então definir esta sucessão da seguinte forma.

$$u_n = \begin{cases} 1 & n \text{ ímpar} \\ -n & n \text{ par} \end{cases}$$

Exercício 1. Determine o termo geral de cada uma das seguintes sucessões.

(a) $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

(b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

(c) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$

(d) $1, -4, 9, -16, 25, -36, 49, \ldots$

(e) $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$

(f) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

(g) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

(h) $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots$

(i) $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$

(j) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

Exercício 2. Considere as sucessões com o seguinte termo geral.

$$u_n = 1 + n^2 \qquad v_n = 2 - \frac{n}{n+1} \qquad w_n = 3^n - \frac{n^2 - n}{2}$$

Determine os termos representados por cada uma das seguintes expressões.

(a) u_3 (b) v_2 (c) u_{10} (d) w_3 (e) v_5 (f) w_1 (g) u_2 (h) w_4

Exercício 3. Dada a sucessão $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$, verifique que:

(a) $\frac{29}{18}$ é um termo da sucessão;

(b) $\frac{8}{5}$ não é termo da sucessão;

(c) todos os termos da sucessão estão entre $\frac{1}{4}$ e 2.

Consoante as aplicações, a numeração dos termos duma sucessão pode começar em 0 ou em 1; na realidade, há mesmo situações em que é mais cómodo começar noutros valores, como -1 ou 2. Veremos mais adiante que estas diferenças não são relevantes. Ao longo desta secção, começaremos em geral por 1 para obter uma correspondência mais directa entre o índice dum termo e a sua posição na sequência; posteriormente, passaremos a trabalhar contando a partir de 0.

Se retirarmos um número (finito ou infinito) de termos a uma sucessão, mantendo a ordem, por forma a que o número de termos restante seja infinito, obtemos uma sua *subsucessão*. Neste texto não vamos insistir muito neste conceito, mas precisaremos dele mais adiante para algumas aplicações concretas.

Uma sucessão diz-se *monótona crescente* se os seus termos vão tomando valores cada vez maiores. Podemos definir esta propriedade de forma equivalente dizendo que uma sucessão u é monótona crescente se a diferença $u_{n+1} - u_n$ for positiva, para qualquer valor de n. Da mesma forma, uma sucessão u diz-se *monótona decrescente* se $u_{n+1} - u_n < 0$ para qualquer valor de n.

Vimos já bastantes exemplos de sucessões crescentes. As sucessões de termo geral n, n^2, $1 + n^2$, $-\frac{1}{n}$ ou a sucessão das aproximações de π são todas sucessões monótonas crescentes. Dispondo do termo geral, é normalmente simples verificar este facto de forma perfeitamente rigorosa.

Exemplo.

1. Para a sucessão $u_n = n$, temos que $u_{n+1} - u_n = (n + 1) - n = 1 > 0$.

2. Para a sucessão $v_n = n^2$, temos que

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0\,.$$

3. Para a sucessão $w_n = 1 + n^2$, temos

$$w_{n+1} - w_n = \left(1 + (n+1)^2\right) - \left(1 + n^2\right) = 1 + \cancel{n^2} + 2n + \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \cancel{n^2}\right) = 2n + 1\,.$$

4. Para a sucessão $y_n = -\frac{1}{n}$, temos

$$y_{n+1} - y_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0\,.$$

Observe-se a forma de calcular u_{n+1}: na expressão de u_n substituímos o símbolo n pela expressão $(n + 1)$. Recorde-se que u_n se lê "o termo de ordem n de u"; o símbolo n é apenas um marcador para um número natural, que neste caso vamos preencher com o valor $(n + 1)$.

A questão que se pode colocar nesta altura é a seguinte: qual é o interesse de verificar formalmente que uma sucessão é monótona? A resposta é geral para todas as áreas da Matemática: a vantagem de fazer uma dedução formal, ou demonstração, é garantir com certeza total que um facto se verifica. Muitas das aplicações da Matemática, mesmo de conceitos simples como sucessões, são em áreas em que não pode haver qualquer risco de erro: controle de rotas (pilotos automáticos), nomeadamente de vôos; sistemas médicos (estilo *pacemakers* implantados); construção de pontes; e muitos outros. Quando se pretende garantir que um desses sistemas está correcto, não basta olhar para ele e ter uma intuição; é necessário verificar rigorosamente que assim se passa.

Da mesma forma, é preciso ter cuidado com o comportamento de sucessões, que pode não ser intuitivo. Consideremos a sucessão u de termo geral $u_n = 10n - \left(\frac{11}{10}\right)^n$. Os primeiros termos desta sucessão são aproximadamente os seguintes.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	8.9	18.79	28.669	38.536	48.389	58.228	68.051	77.856	87.642	97.406

Olhando para esta tabela, poderíamos ser tentados a concluir que a sucessão era monótona crescente. Porém, se tentarmos verificar este facto rigorosamente, descobrimos que a realidade é outra.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 10(n+1) - \left(\frac{11}{10}\right)^{n+1} - \left(10n - \left(\frac{11}{10}\right)^n\right) \\ &= \cancel{10n} + 10 - \frac{11}{10}\left(\frac{11}{10}\right)^n - \cancel{10n} + \left(\frac{11}{10}\right)^n = 10 - \frac{1}{10}\left(\frac{11}{10}\right)^n \end{aligned}$$

Pode verificar-se que este valor é positivo apenas se $n < 48$. De facto, tabelando uns valores de u_n mais à frente, obtemos

n	46	47	48	49	50	51	52
u_n	379.82	381.803	382.982	383.281	382.609	380.870	377.957

mostrando que a sucessão afinal não é crescente. Pior: se calcularmos valores de u_n para n um pouco mais elevado verificamos que os valores nem sequer são sempre positivos. Tem-se

$$u_{68} \approx 27.317 \qquad u_{69} \approx -27.951$$

e daí em diante a sucessão é na realidade decrescente.

Outro facto que à primeira vista não é de todo óbvio é que uma sucessão pode ser monótona crescente (ou decrescente) sem tomar valores arbitrariamente grandes (ou pequenos). A sucessão das aproximações de π é um bom exemplo: cada termo é maior que o anterior, mas nenhum deles excede π.

Exercício 4. Verifique que as seguintes sucessões são monótonas crescentes.

(a) $u_n = 3n$ (b) $w_n = n^2 + 2n$ (c) $v_n = 2n^2 - n$ (d) $u_n = \frac{n}{n+1}$

Exercício 5. Verifique que as seguintes sucessões são monótonas decrescentes.

(a) $u_n = 1 - n$ (b) $u_n = -n^3 + 2$ (c) $w_n = \frac{n+2}{n^2+2}$ (d) $v_n = 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$

Exercício 6. Para cada uma das seguintes sucessões, determine se se trata duma sucessão monótona crescente, monótona decrescente ou se não é uma sucessão monótona.

(a) $u_n = 3n - 5$ (b) $u_n = 2 - 2n$ (c) $u_n = n^2 - 4n$ (d) $u_n = 1 - \frac{2}{n}$

Vamos agora explorar um pouco a ideia de enquadrar valores duma sucessão entre entre determinados limites.

Definição. Um número real m diz-se um *minorante* da sucessão u se se tiver $m \leq u_n$ para qualquer n; um número M diz-se um *majorante* de u se se tiver $u_n \leq M$ para qualquer n.

Uma sucessão diz-se minorada (ou majorada) se tiver algum minorante (ou majorante) e diz-se *limitada* se for simultaneamente majorada e minorada.

Exemplo.

1. A sucessão dos números naturais, de termo geral $u_n = n$, é uma sucessão que é minorada: todos os seus valores são positivos, logo 0 é um minorante de u. Este não é o único minorante de u: qualquer número negativo x satisfaz $x \leq u_n$; por exemplo, $-2 \leq u_n$ e $-5 \leq u_n$ para qualquer n.

   Em contrapartida, a sucessão u não é majorada: dado qualquer número real M, podemos sempre encontrar um número natural maior do que M, logo M não pode ser um majorante de u. Então a sucessão u é uma sucessão minorada que não é majorada.

2. A sucessão v de termos $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ tem termo geral $v_n = (-1)^n$. Uma vez que esta sucessão só toma os valores -1 e 1, temos que -1, -4 e -16 (entre muitos outros) são minorantes de v, enquanto que 1, 2 e 25 (e outros) são majorantes de v. A sucessão v é uma sucessão majorada e minorada, logo é uma sucessão limitada.

3. A sucessão w das aproximações decimais de π é outra sucessão que é limitada. Por um lado, vimos já que a sucessão é crescente, pelo que todos os seus valores são maiores do que 3. O número 3 é então um minorante de w. Por outro lado, como $w_n < \pi$ para qualquer n, temos que π é um majorante de w.

4. A sucessão u de termo geral $u_n = (-1)^n \times n$ é uma sucessão cujos primeiros termos são $-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \ldots$. Esta sucessão não é majorada nem minorada. De facto, os termos pares da sucessão u atingem valores maiores que qualquer número real, donde u não pode ter majorantes; e os seus termos ímpares atingem valores negativos arbitrariamente grandes, pelo que a sucessão também não pode ter minorantes.

5. A sucessão u de que falámos atrás, definida por $u_n = 10n - \left(\frac{11}{10}\right)^n$, é uma sucessão que é majorada mas não minorada. De facto, vimos que u é crescente até ao termo u_{49}, sendo decrescente a partir daí; uma vez que $u_{49} < 384$, esse valor é um majorante da sucessão. Para valores maiores de n, o termo u_n vai diminuindo de valor cada vez mais rapidamente, pelo que a sucessão não tem minorantes.

Existem algumas relações entre monotonia e majoração ou minoração. Se uma sucessão for monótona crescente, por exemplo, significa que os seus termos estão ordenados por ordem crescente, pelo que o primeiro é o menor de todos. Então essa sucessão é minorada (pelo seu primeiro termo). Um raciocínio análogo para o caso em que a sucessão é decrescente permite estabelecer o seguinte resultado.

Proposição. Seja u uma sucessão.

- Se u é monótona crescente, então u é minorada.
- Se u é monótona decrescente, então u é majorada.

Note-se contudo que estas condições são em geral demasiado fortes. A última sucessão considerada no exemplo anterior mostra isto: tratava-se duma sucessão que era decrescente a partir do 49º termo, mas não deixava por isso de ser majorada. Assim, podemos reforçar aquele resultado.

Proposição. Seja u uma sucessão.

- Se existe um valor N tal que $u_{n+1} > u_n$ para $n > N$, então u é minorada.
- Se existe um valor N tal que $u_{n+1} < u_n$ para $n > N$, então u é majorada.

1.1.2 Progressões aritméticas

Há dois tipos de sucessões que são particularmente recorrentes em problemas práticos: as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Uma vez que esta apresentação tem carácter introdutório, não pretendendo ser de forma alguma um estudo exaustivo de sucessões, vamos aproveitar estas duas famílias de sucessões para ilustrar os conceitos que já desenvolvemos acima. Cada um destes tipos de sucessão vai ser definido com base num problema característico que ilustra o tipo de situações em que estas sucessões surgem na prática.

Problema. Uma fábrica produz por dia duzentas unidades de um dado produto, que são postas à venda com uma margem de lucro (para a fábrica) de €10 por unidade. Se o investimento inicial na maquinaria necessária para o fabrico desse produto tiver sido de €400.000, ao fim de quanto tempo é que a fábrica começa a dar lucro?

Resolução. Tal como está formulado, este problema pode ser resolvido directamente. Porém, modelá-lo recorrendo a sucessões permite desenvolver um formalismo que tornará possível responder facilmente a muitas outras questões no mesmo contexto.

Comecemos por definir a sucessão u do número total de unidades produzidas pela fábrica. Ao fim de n dias de produção, este valor é de $u_n = 200n$.

Podemos também considerar a sucessão r do lucro obtido com a venda das unidades produzidas, excluindo o investimento inicial. Uma vez que cada unidade contribui com um lucro de €10, temos que $r_n = 10u_n = 2000n$.

Finalmente, o lucro total l corresponde ao lucro das vendas descontando o investimento inicial; ou seja, $l_n = r_n - 400000 = 2000n - 400000$.

A fábrica começa a dar lucro quando $l_n > 0$, o que corresponde a

$$2000n - 400000 > 0 \iff 2000n > 400000 \iff n > 200\,,$$

ou seja, ao fim de 200 dias.

As sucessões u, r e l deste problema são exemplos de progressões aritméticas.

Definição. Uma *progressão aritmética* é uma sucessão u tal que $u_{n+1} - u_n$ é constante.

É fácil ver que o termo geral duma progressão aritmética u é sempre da forma $u_0 + kn$, onde k é a diferença (constante) entre um termo e o seguinte. De facto, para obter u_n a partir de u_1 temos de somar $(n-1)$ vezes o valor de k; se escrevermos $u_1 = u_0 + k$, obtemos a fórmula apresentada atrás.

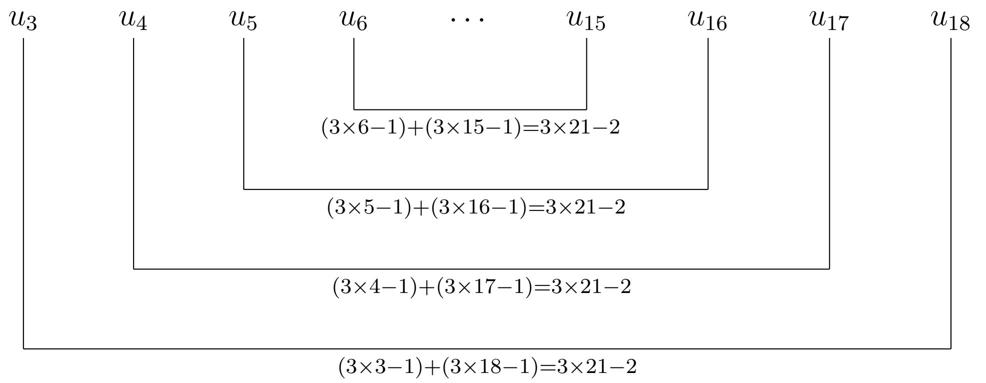
Há outras formas de apresentar uma progressão aritmética, nomeadamente recorrendo à diferença entre termos consecutivos. A fórmula acima apresentada é especialmente útil para obter o termo geral. Por exemplo, se u for uma progressão aritmética com termo $u_1 = 2$ e diferença $u_{n+1} - u_n = 3$, então sabemos que $u_1 = u_0 + 3$, donde $u_0 = -1$, e o termo geral de u é $u_n = 3n - 1$. Muitas vezes, a diferença é apresentada sob a forma de recorrência: $u_{n+1} = u_n + 3$, neste caso.

Exercício 7. Determine o termo geral de cada uma das seguintes progressões aritméticas.

(a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} v_2 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = w_n - 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_{n+1} - y_n = 7 \end{cases}$

Todas as progressões aritméticas são monótonas, sendo crescentes se $k > 0$ e decrescentes se $k < 0$. Consoante a sua monotonia, são minoradas e não majoradas se $k > 0$, e majoradas mas não minoradas se $k < 0$.

Uma das características particulares das progressões aritméticas é o facto de ser extremamente simples de somar termos consecutivos. Consideremos ainda o exemplo da sucessão $u_n = 3n - 1$ e suponhamos que queríamos calcular $u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{18}$. Observe-se o seguinte diagrama.



Temos 8 somas, todas elas com o mesmo valor. O valor 8 corresponde a metade do número de termos a somar ($\frac{18-3+1}{2}$). Então,

$$u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{18} = \frac{18-3+1}{2}\left(u_3 + u_{18}\right) .$$

Os índices 3 e 18 não desempenham aqui qualquer papel especial: são o primeiro e último termos a somar. Assim, se pretendermos somar todos os termos de u de ordens entre a e b, podemos fazê-lo aplicando a fórmula

$$u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_b = \sum_{i=a}^{b} u_i = \frac{b-a+1}{2}\left(u_a + u_b\right) .$$

O símbolo $\sum_{i=a}^{b} u_i$, lido *somatório* de u_i com i desde a até b, é uma abreviatura para a soma à esquerda: representa a soma de todos os termos da forma u_i, com i substituído por todos os valores entre a e b. A notação de somatório é uma abreviatura conveniente que é de todo o interesse conhecer e saber utilizar; a variável usada como índice dos somatórios é tipicamente i, j ou k, mas é possível usar qualquer outra letra.

Exercício 8. Calcule o valor das seguintes somas.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} u_i$ com $u_n = n$ (b) $\displaystyle\sum_{i=5}^{11} v_i$ com $v_n = 3 - 2n$ (c) $\displaystyle\sum_{k=8}^{32} w_k$ com $w_n = 7n - 5$

(d) $\displaystyle\sum_{i=9}^{100} i$ (e) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} 5 + 2i$ (f) $\displaystyle\sum_{j=7}^{15} 2 + 5j$ (g) $\displaystyle\sum_{k=3}^{57} 3 - 2k$ (h) $\displaystyle\sum_{i=4}^{25} -k - 3$

Exercício 9. Um clube foi fundado com 25 sócios, tendo-se juntado posteriormente dez novos sócios a cada ano. Sendo a quotização anual de €5 por sócio, qual é o valor total da receita de quotas do clube ao fim de 15 anos?

1.1.3 Progressões geométricas

Outro tipo de sucessão que surge com extrema frequência é a progressão geométrica. Vejamos um exemplo.

Problema. Um depósito a prazo rende uma taxa de juro líquida de 3% ao ano. Para um depósito inicial de €1000, qual o valor disponível ao fim de cinco anos?

Resolução. Se a taxa de juro líquida é de 3% ao ano, então o valor v_n do depósito no final do ano n é obtido a partir do valor v_{n-1} no final do ano $(n-1)$ somando-lhe 3% do seu valor; ou seja,

$$v_n = v_{n-1} + \frac{3}{100} v_{n-1} = \left(1 + \frac{3}{100}\right) v_{n-1}\,.$$

O depósito inicial corresponde a um valor que podemos chamar v_0. Temos então que

$$\begin{aligned}
v_1 &= \left(1 + \frac{3}{100}\right) v_0 \\
v_2 &= \left(1 + \frac{3}{100}\right) v_1 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 v_0 \\
v_3 &= \left(1 + \frac{3}{100}\right) v_2 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 v_0 \\
v_4 &= \left(1 + \frac{3}{100}\right) v_3 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 v_0 \\
&\vdots \\
v_n &= \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n v_0
\end{aligned}$$

e, em particular, $v_5 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 \times 1000 =$ €1.159,27.

Este tipo de sucessão, em que cada termo é obtido do anterior multiplicando por uma constante, diz-se uma *progressão geométrica.* As progressões geométricas têm muita aplicação na área financeira, uma vez que surgem naturalmente em problemas envolvendo cálculo de juros compostos, como o exemplo acima, na área da Biologia, devido à sua ligação com modelos de crescimento de populações, e em algoritmia.

Definição. Uma *progressão geométrica* é uma sucessão u tal que a razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ é constante.

É fácil ver que o termo geral duma progressão geométrica u é sempre da forma $u_0 r^n$, onde r é a razão (constante) entre cada termo e o anterior. Trata-se do raciocínio seguido no exemplo acima: para obter u_n a partir de u_0 temos de multiplicar n vezes por r.

A outra forma comum de apresentar uma progressão geométrica, que é muitas vezes a forma natural de modelar problemas, é outra vez por recorrência: dando o valor de u_0 e a relação $u_{n+1} = ru_n$.

Exercício 10. Determine o termo geral de cada uma das seguintes progressões geométricas.

(a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ (b) $\begin{cases} v_2 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{5} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = -w_n \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y_1 = 5 \\ \frac{y_{n+1}}{y_n} = -\frac{1}{7} \end{cases}$

O comportamento das progressões geométricas é bastante mais variado do que o das progressões aritméticas, conforme os exemplos acima ilustram, e dependem do sinal e valor absoluto da razão r e do sinal do valor inicial u_0.

Para perceber os diferentes comportamentos possíveis, é mais fácil começar por considerar apenas o caso de progressões geométricas com todos os termos positivos, ou seja, $u_0 > 0$ e $r > 0$. Neste caso, é simples perceber o que se passa: se $r > 1$, então cada termo é maior que o anterior e a sucessão é monótona crescente, minorada por u_0 mas não majorada; se $r < 1$, a sucessão é monótona decrescente, majorada por u_0 e minorada por 0 (uma vez que todos os seus termos são positivos). Ou seja, se $r < 1$, a sucessão é limitada.

Se $u_0 < 0$ e $r > 0$, todos os termos da sucessão são negativos e os seus comportamentos possíveis são simétricos dos anteriores: para $r > 1$ a sucessão é majorada (por u_0) mas não minorada; para $r < 1$ a sucessão é minorada por u_0 e majorada por 0, uma vez que agora todos os seus termos são negativos.

Quando a razão toma valores negativos, os termos da sucessão u vão alternando de sinal, independentemente do sinal de u_0. Se $-1 < r < 0$, os valores vão-se aproximando de 0, pelo que a sucessão é limitada (u_0 e u_1 são um majorante e um minorante dos termos da sucessão, de acordo com os seus sinais). Se $r < -1$, a sucessão toma valores cada vez maiores de sinal alternado, pelo que não é majorada nem minorada.

Excluímos da análise acima três casos. Se $r = 1$, a sucessão é constante. Se $r = -1$, a sucessão alterna entre os valores u_0 e $u_1 = -u_0$. Finalmente, se $r = 0$ a sucessão tem todos os termos iguais a zero excluindo eventualmente o primeiro. Em todos os casos trata-se duma sucessão limitada.

A Tabela 1.1 resume estes comportamentos.

	$r < -1$	$-1 < r < 0$	$0 < r < 1$	$r > 1$
$u_0 > 0$	não monótona não limitada	não monótona limitada	decrescente limitada	crescente minorada
$u_0 < 0$	não monótona não limitada	não monótona limitada	crescente limitada	decrescente majorada

Tabela 1.1: Possíveis comportamentos duma progressão geométrica, excluindo os casos limite ($r = -1, 0, 1$).

Exercício 11. Verifique que o comportamento das sucessões do exercício anterior está de acordo com a Tabela 1.1.

Tal como sucedia com as progressões aritméticas, podemos determinar uma fórmula para somar termos consecutivos duma progressão geométrica. Aqui o raciocínio é um pouco diferente; suponhamos que queremos somar os termos da progressão geométrica u, de razão r, entre u_a e u_b. Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=a}^{b} u_i &= u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + u_{a+3} + \cdots + u_b \\ &= u_0 r^a + u_0 r^{a+1} + u_r^{a+2} + u_0 r^{a+3} + \cdots + u_0 r^b \\ &= u_0 r^a \left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{b-a}\right)\end{aligned}$$

donde só temos que determinar o valor da soma entre parêntesis na última expressão. Observe-se contudo que multiplicando esse valor por $(1-r)$ obtemos

$$\begin{aligned}&(1-r)\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{b-a}\right) \\ &\quad = \left(1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \cdots + \cancel{r^{b-a}}\right) - \left(\cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \cdots + \cancel{r^{b-a}} + r^{b-a+1}\right) \\ &\quad = 1 - r^{b-a+1}\end{aligned}$$

donde

$$\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{b-a}\right) = \frac{1 - r^{b-a+1}}{1-r}\,.$$

Então a fórmula de cálculo para a soma de termos consecutivos uma progressão geométrica é

$$\sum_{i=a}^{b} u_i = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + u_{a+3} + \cdots + u_b = u_0 r^a \frac{1 - r^{b-a+1}}{1-r}\,.$$

Note-se que $u_0 r^a = u_a$ é o primeiro termo a somar e $(b-a+1)$ é o número de termos a somar; assim, esta fórmula surge muitas vezes como

$$u_a \frac{1-r^n}{1-r}$$

onde n é o número de termos (consecutivos) a somar.

Exercício 12. Calcule cada uma das seguintes somas directamente e recorrendo à fórmula acima apresentada. Verifique os resultados.

(a) $\displaystyle\sum_{i=5}^{8} 2^i$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^i$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{3^k}{5}$ (d) $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} -\frac{1}{3} \times (-2)^i$

Exercício 13. Conta-se que o inventor do xadrez pediu como recompensa ao seu soberano uma quantidade de trigo calculada da seguinte forma: um grão pela primeira casa, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim sucessivamente, sendo o número de grãos por cada casa o dobro do anterior.

(a) Escreva o termo geral da sucessão g_n que indica o número de grãos a pagar pela casa n do tabuleiro.

(b) Escreva o termo geral da sucessão s_n que indica o número de grãos toal a pagar pelas primeiras n casas do tabuleiro.

(c) Sabendo que $2^{10} \approx 1000$, qual a ordem de grandeza da recompensa pedida pelo inventor do xadrez? Recorde que um tabuleiro de xadrez tem 64 casas.

Para terminar esta secção, vamos ver um exemplo da vida real que aplica estes conceitos duma forma que demonstra claramente a utilidade de trabalhar com progressões geométricas.

Problema. Um casal pretende contrair um empréstimo de €150.000 a 30 anos para comprar uma casa. Sendo a taxa de juro anual oferecida pelo banco de 1.8%, qual o valor da prestação mensal a pagar?

Resolução. Vamos começar por fixar alguma notação. Designaremos por P o valor (desconhecido) da prestação mensal a pagar ao banco, por J_n o valor do juro a pagar no mês n e por D_n a dívida restante no final do mês n.

Os dados do problema podem ser expressos em termos destas variáveis da seguinte forma.

- A dívida inicial, que sabemos ser de €150.000, corresponde ao valor de D_0. Então $D_0 = 150.000$.
- O empréstimo estará pago ao fim de 30 anos, ou seja, 360 meses. Então $D_{360} = 0$.
- O juro a pagar ao final de cada mês é calculado dividindo a taxa de juro anual por 12 (obtendo-se uma taxa de juro mensal) e multiplicando pela dívida no final do mês anterior. Então $J_{n+1} = \frac{t}{12} D_n$, sendo $t = 0.018$ a taxa de juro anual.
- A dívida no final do mês $n+1$ obtém-se a partir da dívida no final do mês anterior somando o juro e subtraindo a prestação; ou seja, $D_{n+1} = D_n + J_{n+1} - P$.

Podemos simplificar um pouco a expressão de D_{n+1}.

$$D_{n+1} = D_n + J_{n+1} - P = D_n + \frac{t}{12} D_n - P = \frac{12+t}{12} D_n - P\,.$$

A definição de D_n tal como se apresenta não corresponde a nenhum tipo de sucessão conhecido. Porém, vamos usar esta informação para raciocinar em sentido inverso. Reescrevendo a última equação, obtemos

$$D_{n+1} = \frac{12+t}{12} D_n - P \iff D_n = \frac{12}{12+t} \left(D_{n+1} + P\right)\,.$$

Uma vez que $D_{360} = 0$, podemos usar esta relação para calcular os valores anteriores de D. Para simplificar, usaremos $T = \frac{12}{12+t}$.

$$\begin{aligned}
D_{360} &= 0 \\
D_{359} &= T\left(D_{360} + P\right) = T(0+P) = TP \\
D_{358} &= T\left(D_{359} + P\right) = T(TP+P) = T^2P + TP \\
D_{357} &= T\left(D_{358} + P\right) = T\left(T^2P + TP + P\right) = T^3P + T^2P + TP \\
D_{356} &= T\left(D_{357} + P\right) = T\left(T^3P + T^2P + TP + P\right) = T^4P + T^3P + T^2P + TP \\
&\ \vdots \\
D_{360-n} &= T^nP + T^{n-1}P + \cdots + T^2P + TP
\end{aligned}$$

Então podemos escrever D_{360-n} como a soma de n termos duma progressão geométrica de razão T, a partir do termo inicial TP.

$$D_{360-n} = TP\frac{1-T^n}{1-T}$$

Uma vez que $D_0 = 150.000$, podemos obter daqui o valor de P.

$$150.000 = D_0 = D_{360-360} = TP\frac{1-T^{360}}{1-T} \iff P = \frac{150.000}{T}\frac{1-T}{1-T^{360}}$$

Sabendo $T = \frac{12}{12+t} \approx 0.998$, obtemos $P = €539.82$.

A prestação mensal a pagar será portanto €539.82.

1.1.4 Operações aritméticas

As operações aritméticas sobre números reais podem ser transferidas para operações sobre sucessões, definindo-as ponto a ponto. Por exemplo: dadas duas sucessões u e v, podemos somá-las, obtendo uma nova sucessão $u + v$ tal que $(u + v)_n = u_n + v_n$.

Podemos proceder de forma semelhante para as restantes operações aritméticas, tendo apenas de ter algum cuidado com os quocientes e potências.

- Soma de sucessões: $(u + v)_n = u_n + v_n$
- Diferença de sucessões: $(u - v)_n = u_n - v_n$
- Produto de sucessões: $(uv)_n = u_n v_n$
- Quociente de sucessões: $(u/v)_n = \frac{u_n}{v_n}$ se $v_n \neq 0$ para todo o n.
- Exponenciação de sucessões: $\left(u^v\right)_n = \left(u_n\right)^{v_n}$ se $u_n > 0$ para todo o n.

Para muitos dos resultados que vamos ver nas secções seguintes, é útil identificar estas operações. Por exemplo: a sucessão $u_n = 3n + 2^n$ pode ser vista como a soma da progressão aritmética $v_n = 3n$ com a progressão geométrica $w_n = 2^n$. Mais adiante a utilidade deste tipo de raciocínio tornar-se-á clara.

Exercício 14. Sejam $u_n = 3n + 2$, $v_n = 2^n$ e $w_n = 5n^2$. Indique o termo geral das seguintes sucessões.

(a) $u + v$ (c) uv (e) $uv - w$ (g) u/w (i) $3u + v/w$ (k) uvw

(b) $u - w$ (d) uw (f) $u + 2w$ (h) $v/2u$ (j) $uw - uv$ (l) uw/v

---

Exercício 15. Escreva cada uma das seguintes sucessões à custa de operações aritméticas a partir de sucessões mais simples.

(a) $2n^2 + n - 1$ (b) $5n(2n - 3)$ (c) $\frac{n+2}{n^2+2^n}$ (d) $(3n + 1)^{2n-2}$

1.2 Limites de sucessões

1.2.1 Infinitamente grandes e infinitésimos

Em muitas situações, o objectivo de trabalhar com sucessões não passa tanto por calcular os seus valores, mas sim em estudar o seu comportamento à medida que o argumento n aumenta — aquilo a que normalmente se chama o seu *comportamento assimptótico*. Exemplos de propriedades que caem nesta categoria são, por exemplo, a existência de minorantes ou majorantes: uma sucessão ser minorada é uma propriedade global, de *todos* os seus termos, e que não depende dos valores iniciais da sucessão (vimos que se ela for crescente a partir de alguma ordem então é minorada, por exemplo, independentemente dos valores que tomar até essa ordem).

Nesta secção vamos discutir alguns tipos particulares de sucessões que serão úteis para o estudo mais geral que vamos fazer a seguir: os infinitamente grandes e os infinitésimos.

Definição. Uma sucessão u diz-se um *infinitamente grande positivo* se para cada natural N existe uma ordem a partir da qual $u_n > N$.

Uma sucessão u diz-se um *infinitamente grande negativo* se para cada natural N existe uma ordem a partir da qual $u_n < -N$.

Uma sucessão u diz-se um *infinitamente grande em módulo* se para cada natural N existe uma ordem a partir da qual $|u_n| > N$.

Por outras palavras, um infinitamente grande positivo é uma sucessão que cresce ilimitadamente e um infinitamente grande negativo é uma sucessão que decresce ilimitadamente. Um infinitamente grande em módulo é uma sucessão que, esquecendo o sinal dos seus termos, é um infinitamente grande positivo.

Exemplo.

1. A sucessão $u_n = n$ é um infinitamente grande positivo, já que se tem $u_n > N$ sempre que $n > N$.

2. A sucessão $v_n = n - 2$ também é um infinitamente grande positivo: para que $v_n > N$ tem de se ter $n - 2 > N$, ou seja, $n > N + 2$.

3. A sucessão $w_n = n^2 + 2n$ é outro infinitamente grande positivo. Uma vez que $n^2 > n$, temos que para $n > N$ se tem $w_n = n^2 + 2n > n + 2n > n > N$.

4. A sucessão $u_n = -3n$ é um infinitamente grande negativo. Uma vez que $3n > n$, temos que, tomando $n > N$, se tem $u_n = -3n < -n < -N$.

5. A sucessão $v_n = -\frac{n}{2} + 3$ é outro infinitamente grande negativo: para ter $v_n < -N$, basta escolher n tal que $-\frac{n}{2} + 3 < -N$, o que equivale a $-\frac{n}{2} < -N - 3$ ou $n > 2N + 6$.

6. A sucessão $w_n = -2^n$ é ainda um infinitamente grande negativo, já que $2^n > n$ para $n > 2$; tem-se portanto $w_n = -2^n < -n < -N$ sempre que $n > N$.

7. A sucessão $u_n = (-2)^n$ é um infinitamente grande em módulo, já que $|u_n| = 2^n$ é um infinitamente grande.

É costume — e será esta a notação que usaremos sempre a partir da próxima secção — usar as seguintes notações para infinitamente grandes.

- Se u é um infinitamente grande positivo, escrevemos $\lim u = +\infty$.

- Se u é um infinitamente grande negativo, escrevemos $\lim u = -\infty$.

Há várias formas de definir o símbolo lim ("limite"). No contexto das sucessões, é particularmente simples ver o limite como uma abreviatura para os conceitos de infinitamente grande e infinitésimo (que discutiremos abaixo), com a vantagem de ser um conceito muito mais concreto que outras definições mais gerais. Observe-se que esta notação não se aplica a infinitamente grandes em módulo.

É simples ver que as seguintes relações se verificam sempre.

Proposição. Seja u uma sucessão.

- Se u é um infinitamente grande positivo, então $-u$ é um infinitamente grande negativo.

- Se u é um infinitamente grande negativo, então $-u$ é um infinitamente grande positivo.

- Se u é um infinitamente grande em módulo, então $|u|$ é um infinitamente grande positivo.

- Se u é um infinitamente grande positivo ou negativo, então u é um infinitamente grande em módulo.

Recorrendo à notação de limite, a primeira relação afirma que se $\lim u = +\infty$, então $\lim(-u) = -\infty$; podemos escrever isto de forma simbólica como $\lim(-u) = -\lim u$ se *definirmos* $-(+\infty) = -\infty$. A segunda regra gera uma regra semelhante, mas assumindo agora que $-(-\infty) = +\infty$.

É importante perceber que estas regras operatórias são *convenções*, úteis porque simplificam grandemente o trabalho com limites; porém, é preciso ter sempre presente que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não denotam números reais.

É fácil ver que as progressões aritméticas são sempre infinitamente grandes, sendo positivos se a diferença k for positiva e negativos caso contrário. Já no caso das progressões geométricas temos três possibilidades: se $r > 1$ e $u_0 > 0$, então a sucessão u é um infinitamente grande positivo; se $r > 1$ e $u_0 < 0$, então u é um infinitamente grande negativo; e se $r < -1$ então u é um infinitamente grande em módulo.

Quando $|r| < 1$, a sucessão u não é um infinitamente grande — antes pelo contrário, os seus termos aproximam-se cada vez mais de 0. Estas sucessões dizem-se *infinitésimos*.

Definição. Uma sucessão u diz-se um *infinitésimo positivo* se para cada natural N existe uma ordem a partir da qual $0 < u_n < \frac{1}{N}$.

Uma sucessão u diz-se um *infinitésimo negativo* se para cada natural N existe uma ordem a partir da qual $-\frac{1}{N} < u_n < 0$.

Uma sucessão u diz-se um *infinitésimo* se para cada natural N existe uma ordem a partir da qual $|u_n| < \frac{1}{N}$.

Para denotar que uma sucessão u é um infinitésimo, escreve-se $\lim u = 0$. Em contextos em que é importante distinguir infinitésimos positivos e negativos, usamos as notações $\lim u = 0^+$ e $\lim u = 0^-$, respectivamente. É importante observar que a primeira notação é de natureza diferente das duas últimas, já que 0^+ e 0^- não denotam números reais. A notação $\lim u = 0$ tem um significado mais preciso que discutiremos adiante.

Tal como atrás, estes conceitos relacionam-se entre si.

Proposição. Seja u uma sucessão.

- Se u é um infinitésimo positivo, então $-u$ é um infinitésimo negativo.
- Se u é um infinitésimo negativo, então $-u$ é um infinitésimo positivo.
- Se u é um infinitésimo, então $|u|$ é um infinitésimo positivo.
- Se u é um infinitésimo positivo ou negativo, então u é um infinitésimo.

Em termos de limites, temos novamente a relação $\lim(-u) = -\lim u$, se definirmos as regras operatórias $-0^+ = 0^-$ e $-0^- = 0^+$.

Também podemos estabelecer relações directas entre infinitésimos e infinitamente grandes.

Proposição. Seja u uma sucessão tal que $u_n \neq 0$ para todos os valores de n.

- Se u é um infinitamente grande positivo, então $\frac{1}{u}$ é um infinitésimo positivo.
- Se u é um infinitamente grande negativo, então $\frac{1}{u}$ é um infinitésimo negativo.
- Se u é um infinitamente grande em módulo, então $\frac{1}{u}$ é um infinitésimo.
- Se u é um infinitésimo positivo, então $\frac{1}{u}$ é um infinitamente grande positivo.
- Se u é um infinitésimo negativo, então $\frac{1}{u}$ é um infinitamente grande negativo.
- Se u é um infinitésimo, então $\frac{1}{u}$ é um infinitamente grande em módulo.

Todas estas proposições devem ser vistas simplesmente como um resumo de propriedades cuja validade deve ser clara. Perante uma sucessão concreta, deve-se analisar a mesma para determinar se se trata dum infinitésimo ou dum infinitamente grande e não procurar encontrar um resultado que se aplique. A notação com limites é neste caso sugestiva: $\lim\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{\lim u}$, desde que aceitemos as relações seguintes.

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \frac{1}{+\infty} = 0^+ \qquad \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Mais interessante — e uma ferramenta mais poderosa — é a relação dos infinitamente grandes e infinitésimos com as operações aritméticas.

Comecemos pela soma. Se as sucessões u e v forem ambas infinitamente grandes positivos, então a sua soma (a partir de certa ordem) será maior que qualquer delas, donde $u + v$ é um infinitamente grande positivo. De forma semelhante, se u e v forem infinitamente grandes negativos, então a sua soma também o é. Se u e v forem infinitésimos positivos, a sua soma também é um infinitésimo positivo, enquanto se forem ambos infinitésimos negativos a sua soma também o será. Se u for um infinitamente grande (positivo ou negativo) e v for um infinitésimo, a sua soma é ainda um infinitamente grande do mesmo tipo que u.

Exemplo.

1. A sucessão $u_n = n^2 + n$ é um infinitamente grande positivo, pois é a soma de dois infinitamente grandes positivos.
2. Já a sucessão $v_n = -n^2 - n$ é um infinitamente grande negativo, pois é a soma de dois infinitamente grandes negativos.

3. A sucessão $w_n = -3n + \frac{1}{n}$ é um infinitamente grande negativo, já que $3n$ é um infinitamente grande negativo e a soma com $\frac{1}{n}$ não altera este facto.

4. A sucessão $y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ é uma soma de infinitésimos positivos, logo também é um infinitésimo positivo.

Quando u e v são infinitésimos de sinais contrários, a sua soma ainda é um infinitésimo, mas não podemos afirmar nada sobre o seu sinal a não ser analisando-a directamente.

Exemplo.

1. A sucessão $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ é a soma do infinitésimo positivo $\frac{1}{n}$ com o infinitésimo negativo $-\frac{1}{n^2}$; uma vez que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ para qualquer n, temos que $u_n > 0$ e portanto u é um infinitésimo positivo.

2. A sucessão $v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ também é a soma do infinitésimo positivo $\frac{1}{n^2}$ com o infinitésimo negativo $-\frac{1}{n}$; uma vez que $v_n = -u_n$, conclui-se que v é um infinitésimo negativo.

3. Sejam w e y as sucessões definidas da seguinte forma.

$$w_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ par} \\ \frac{1}{n^2} & n \text{ ímpar} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & n \text{ ímpar} \\ -\frac{1}{n^2} & n \text{ par} \end{cases}$$

   Então w é um infinitésimo positivo, y é um infinitésimo negativo, e $w+y$ é uma sucessão cujos termos pares são positivos e cujos termos ímpares são negativos, logo é um infinitésimo que não é positivo nem negativo.

Exercício 16. Classifique cada uma das seguintes sucessões relativamente ao seu comportamento assimptótico.

(a) $u_n = n^2 + 3n + 1$ (b) $v_n = 6n^2 - \frac{2}{n^3}$ (c) $w_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}$ (d) $z_n = -5n^3 + \frac{2}{3}$

O primeiro caso que não se pode resolver de forma sistemática surge quando u e v são infinitamente grandes de sinais contrários. Nesta situação, designada por *indeterminação de tipo* $\infty - \infty$, é necessário analisar a sucessão em causa e determinar directamente de que tipo de sucessão se trata. Temos todas as possibilidades. Para simplificar, vamos trabalhar com diferenças de infinitamente grandes (que é equivalente, já que $u - v = u + (-v)$).

Exemplo.

1. Tome-se a sucessão $u_n = n$. Uma vez que $u_n - u_n$ é a sucessão constante de valor 0 (que é trivialmente um infinitésimo), temos um exemplo de dois infinitamente grandes positivos cuja diferença é um infinitésimo.

2. Para as sucessões $u_n = n$ e $v_n = 2n$, temos que $v_n - u_n$ é um infinitamente grande positivo (o seu termo geral é n) e $u_n - v_n$ é um infinitamente grande negativo (o seu termo geral é $-n$).

3. Tomando $u_n = n$ e $v_n = n + 2$, a diferença $v_n - u_n$ é a sucessão constante de valor 2, que não é um infinitésimo nem um infinitamente grande.

Estes casos são simples; contudo, em geral, o levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$ pode requerer alguma criatividade. Também é útil ter a noção das diferentes ordens de grandeza de infinitamente grandes.

O produto (e quociente) trazem problemas semelhantes. Se u e v são infinitamente grandes, então o seu produto uv é um infinitamente grande que é positivo se u e v forem do mesmo sinal e negativo se u e v forem de sinais contrários; de forma semelhante, se u e v forem infinitésimos, então uv é um infinitésimo com o sinal determinado de forma análoga pelos sinais de u e v.

Este resultado é útil para levantar algumas das indeterminações de tipo $\infty - \infty$. Por exemplo, reescrevendo $n^2 - n$ como $n(n-1)$, temos que o termo geral desta sucessão é um produto de dois infinitamente grandes positivos, pelo que a sucessão é um infinitamente grande positivo.

Exercício 17. Para cada par de sucessões u e v, classifique a sua soma $u+v$ e a sua diferença $u-v$ quanto ao seu comportamento assimptótico.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$u_n = 2n$	$u_n = n^2$	$u_n = -3n$	$u_n = n^3$	$u_n = 2n$
$v_n = 3n$	$v_n = 2n$	$v_n = -4n$	$v_n = 2n^2$	$v_n = 2n$

O problema surge quando multiplicamos um infinitamente grande por um infinitésimo ou, equivalentemente, quando tomamos o quociente de dois infinitamente grandes ou de dois infinitésimos: a sucessão resultante pode novamente ter qualquer comportamento. Esta indeterminação é designada por *indeterminação de tipo* $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, consoante a expressão que lhe dá origem; vamos considerar apenas o terceiro caso, já que é o único que encontraremos neste capítulo.

Exemplo.

1. Seja $u_n = \frac{3n+1}{3n-2}$. A sucessão u é o quociente de dois infinitamente grandes positivos, constituindo portanto uma indeterminação de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação, vamos reescrever o seu termo geral:

$$u_n = \frac{3n+1}{3n-2} = \frac{3n-2+3}{3n-2} = 1 + \frac{3}{3n-2}$$

   é a soma da sucessão constante de termo geral 1 com o infinitésimo $\frac{3}{3n-2}$.

2. Seja $u_n = \frac{n^2+1}{3n-4}$. Temos novamente uma indeterminação de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. A forma geral de levantar estas indeterminações, para quocientes de polinómios, é reduzir a fracção dividindo o numerador e denominador pela potência de maior expoente.

$$u_n = \frac{n^2+1}{3n-4} = \frac{n^2}{3n-4} + \frac{1}{3n-4} = \frac{1}{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + \frac{1}{3n-4}$$

   A primeira fracção é o inverso dum infinitésimo positivo, logo trata-se dum infinitamente grande positivo; a segunda é um infinitésimo. A sua soma é novamente um infinitamente grande positivo, logo

$$\lim u = +\infty\,.$$

Na próxima secção veremos como podemos fazer estes cálculos de forma sistemática e mais expedita.

Exercício 18. Para cada par de sucessões u e v, classifique o seu quociente u/v quanto ao seu comportamento assimptótico.

(a) $u_n = 2n$, $v_n = 3n$ (b) $u_n = 2n + 1$, $v_n = n^2$ (c) $u_n = -3n+1$, $v_n = -4n$ (d) $u_n = n^3 - 1$, $v_n = 2n^2$ (e) $u_n = 2n$, $v_n = 2n + 1$

1.2.2 Limites e convergência

Nos exemplos da secção anterior, encontrámos sucessões que não eram infinitésimos, mas podiam ser escritas como a soma duma constante com um infinitésimo. Para caracterizar estas sucessões, vamos introduzir um conceito fundamental: o conceito de *limite*.

Definição. Seja u uma sucessão. Diz-se que u *tende* para a, denotado $u_n \to a$, ou que o *limite* de u é a, denotado $\lim u = a$ ou $lim_n u_n = a$, se a sucessão $u - a$ for um infinitésimo.

Se existir um número real a tal que $\lim u = a$, a sucessão u diz-se *convergente*.

A noção de limite foi uma invenção do século XIX que revolucionou completamente a Matemática. Em particular, foi este conceito que permitiu o desenvolvimento da Análise Matemática como uma disciplina formal e que fez avançar substancialmente o Cálculo Diferencial, o Cálculo Integral e todas as áreas dependentes destas. É por isso essencial — e é o principal objectivo de todo este capítulo — ganhar intuição sobre limites e como se calculam.

Comecemos por observar que esta notação é coerente com a notação que atrás usámos para denotar que uma sucessão era um infinitésimo. De facto, se u é um infinitésimo, então $u - 0$ também o é, donde $u_n \to 0$. Reciprocamente, se $u_n \to 0$, então $u - 0$ é um infinitésimo, donde u também o será. Assim, ao escrevermos $\lim u = 0$, não é importante distinguir se estamos a referir-nos ao limite de u segundo esta definição ou à propriedade de u ser um infinitésimo, conforme definido atrás.

As notações $\lim u = \pm\infty$ e $\lim u = 0^{\pm}$, contudo, são de natureza diferente: o limite duma sucessão é, por definição, um número real, enquanto os símbolos $\pm\infty$ e $0^{\pm}$ não denotam números reais. É importante manter esta distinção presente, já que tem algumas consequências práticas que veremos adiante.

Exemplo. Consideremos a sucessão $u_n = 5 + \frac{2}{n}$. Uma vez que $u_n - 5 = \frac{2}{n}$ é um infinitésimo, a sucessão u tem limite 5. Podemos então escrever $\lim 5 + \frac{2}{n} = 5$.

Antes de apresentar mais exemplos, vamos ver um conjunto de propriedades que simplificam (em muito) o cálculo de limites.

Em primeiro lugar, observemos que se $\lim u = a$ e $\lim u = b$, então as sucessões $u-a$ e $u-b$ são ambas infinitésimos; sabemos daqui que a sua diferença também é então um infinitésimo. Mas $(u - a) - (u - b) = b - a$ é uma sucessão constante; ora a única sucessão constante que é um infinitésimo é a sucessão de termo geral 0, logo $a = b$. Obtemos assim o seguinte resultado.

Proposição. Se u_n é uma sucessão convergente, então o seu limite é único.

Podemos generalizar este resultado observando que um infinitamente grande nunca é uma sucessão convergente: se u é um infinitamente grande, então $u-a$ também é um infinitamente grande para qualquer valor de a, logo $\lim u \neq a$. Assim, podemos usar o resultado acima também quando $\lim u = \pm\infty$.

Também deve ser claro que se retirarmos termos a uma sucessão o seu limite não se altera.

Proposição. Se $\lim(u) = a$ e v é uma subsucessão de u, então $\lim(v) = a$.

A relação entre os limites e as operações algébricas é muito simples.

Proposição. Sejam u e v sucessões convergentes com $\lim u = a$ e $\lim v = b$. Têm-se as seguintes relações.

- $\lim u \pm v = a \pm b$
- $\lim uv = ab$
- $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b}$
- $\lim u^v = a^b$, desde que $a > 0$.
- Se $u_n \leq v_n$ para todo n, então $a \leq b$.
- $\lim |u| = |a|$

Conforme vimos anteriormente, estes resultados generalizam-se ainda aos casos em que $\lim u = \pm\infty$ excepto quando a expressão resultante designa uma indeterminação. É por isso habitual manipular algebricamente os valores $+\infty$ e $-\infty$ como se de números reais se tratassem, sujeitos às seguintes regras operatórias, onde a designa um real arbitrário.

$$\begin{array}{ll}
(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty & (+\infty) \times a = \dfrac{+\infty}{a} = +\infty \, (a > 0) \\
(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty & (+\infty) \times a = \dfrac{+\infty}{a} = -\infty \, (a < 0) \\
(+\infty) - a = a - (-\infty) = +\infty & (-\infty) \times a = \dfrac{-\infty}{a} = -\infty \, (a > 0) \\
(-\infty) - a = a - (+\infty) = -\infty & (-\infty) \times a = \dfrac{-\infty}{a} = +\infty \, (a < 0)
\end{array}$$

Estes símbolos relacionam-se ainda com os símbolos 0^+ e 0^- da seguinte forma.

$$\begin{array}{ll}
a + 0^+ = 0^+ + a = a & a \times 0^+ = 0^+ \times a = 0^+ \, (a > 0) \\
a + 0^- = 0^- + a = a & a \times 0^+ = 0^+ \times a = 0^- \, (a < 0) \\
a - 0^+ = a - 0^- = a & a \times 0^- = 0^- \times a = 0^- \, (a > 0) \\
0^+ - a = 0^- - a = -a & a \times 0^- = 0^- \times a = 0^+ \, (a < 0)
\end{array}$$

Observe-se que excluímos os casos que geram indeterminações. Estas têm de ser levantadas da forma adequada.

Exemplo.

1. Seja $u_n = 3 + \frac{2}{n^2}$. Então

$$\lim u = \lim \left(3 + \frac{2}{n^2}\right) = \lim 3 + \lim \frac{2}{n^2} = 3 + 0^+ = 3\,.$$

2. Tome-se $v_n = \frac{3n^2+2n+6}{n^2+2}$.

$$\lim v = \lim \frac{3n^2+2n+6}{n^2+2} = \lim \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim 3+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}}{\lim 1+\frac{2}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

3. Para $w_n = 2n^2 + \frac{3}{n}$, temos que

$$\lim w = \lim \left(2n^2 + \frac{3}{n}\right) = \lim 2n^2 + \lim \frac{3}{n} = +\infty + 0^+ = +\infty\,.$$

Exercício 19. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\left(3n^2 - 3n + 1\right)$

(b) $\lim\left(2n+1\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(c) $\lim\left(\sqrt{3n+2} - 2\right)$

(d) $\lim\left(n - 3\sqrt{n^2}\right)$

(e) $\lim\left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)$

(f) $\lim\left(\frac{2n+2}{n^2+1}\right)$

(g) $\lim\left(\frac{3n^4-n^2+7n-1}{1-n-n^2-n^3-n^4}\right)$

(h) $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(i) $\lim\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

(j) $\lim\left(\frac{2}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)$

(k) $\lim\left(\frac{3n+2}{n^2+1}\right)\left(\frac{n^2}{n-\sqrt{n}}\right)$

(l) $\lim\left(n^2 - \frac{2n^2}{3n+1}\right)$

A potenciação traz alguns problemas novos. Vimos já que $\lim\left(u^v\right) = \lim u^{\lim v}$ quando ambos os limites são finitos e $\lim u > 0$; quando permitimos que u seja um infinitésimo positivo ou que u ou v sejam infinitamente grandes, temos ainda um conjunto de regras operatórias, mas temos três novos símbolos de indeterminação: 0^0, ∞^0 e 1^∞.

$$\begin{array}{lll}
(+\infty)^{+\infty} = +\infty & (+\infty)^{-\infty} = 0^+ & (+\infty)^a = +\infty\,(a>0) \\
a^{+\infty} = +\infty\,(a>1) & a^{-\infty} = 0^+\,(a>1) & (+\infty)^a = 0^+\,(a<0) \\
a^{+\infty} = 0^+\,(0\le a<1) & a^{-\infty} = +\infty\,(0\le a<1) & (-\infty)^a = 0\,(a<0)
\end{array}$$

Observe-se que se tem $(0^+)^{+\infty} = 0$ e $(0^+)^{-\infty} = 0$, como consequência das relações

$$\left(0^+\right)^{+\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

e

$$\left(0^+\right)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{-\infty}} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty\,.$$

Exemplo.

1. Para calcular $\lim\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n-1}$, aplicamos directamente as propriedades dos limites.

$$\lim\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n-1} = \left(\lim\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\lim n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

2. Analogamente, para $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2-\frac{1}{n}}$, podemos calcular

$$\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)^{\lim\left(2-\frac{1}{n}\right)} = 2^2 = 4\,.$$

3. Para a sucessão $u_n = \left(\frac{2n^2-3}{n+5}\right)^{\frac{3n}{2n-1}}$, temos que

$$\lim\left(\frac{2n^2-3}{n+5}\right)^{\frac{3n}{2n-1}} = \left(\lim\frac{2n^2-3}{n+5}\right)^{\lim\frac{3n}{2n-1}} = (+\infty)^{\frac{3}{2}} = +\infty\,.$$

Exercício 20. Calcule os limites das seguintes sucessões.

(a) $u_n = 2^{n+1}$ (b) $v_n = n^{1-2n}$ (c) $w_n = (2n+1)^{2n-1}$ (d) $z_n = \frac{3n+5}{n^2-1}^{\frac{3n^2+2n-5}{2n^2-2n+1}}$

Para percebermos a razão de ser dos três símbolos de indeterminação 0^0, ∞^0 e 1^∞, temos de analisar as tendências de crescimento simbolizadas por cada um deles.

Numa indeterminação 0^0, temos um infinitésimo elevado a outro infinitésimo; ora, tendendo a base para 0, o valor da potência tende para 0, mas tendendo o exponente para 0, o valor da potência deveria tender para 1. De facto, podemos encontrar facilmente exemplos de cada um destes casos — e de outros.

Numa indeterminação ∞^0, o problema é semelhante: sendo a base um infinitamente grande positivo, a potência deveria ser igualmente um infinitamente grande positivo; porém, uma potência de expoente 0 deveria tender para 1. Temos novamente duas tendências opostas, e é fácil encontrar exemplos de sucessões com todos os limites intermédios.

Finalmente, a indeterminação 1^∞ deve-se ao facto de uma potência de base 1 ser sempre igual a 1, enquanto que uma potência de base menor tende para 0 e uma de base maior tende para $+\infty$. Mais uma vez, uma indeterminação deste tipo pode tender para qualquer limite positivo.

A forma de levantar estas indeterminações é sempre a mesma e assenta em dois princípios: a definição do número e como limite da sucessão $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuja convergência não vamos demonstrar aqui; e a regra operatória $a^b = e^{b\log(a)}$. Esta regra, bem como as propriedades dos logaritmos, serão discutidas em detalhe na Secção 2.5.3, em particular nas páginas 92 e seguintes. As indeterminações do tipo 1^∞ conseguem reescrever-se muitas vezes à custa da sucessão base $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ usando subsucessões.

Esta transformação gera normalmente indeterminações no expoente do tipo $0\times\infty$, que se resolvem tendo em conta que o logaritmo cresce mais devagar do que qualquer polinómio; ou seja, a sucessão $\frac{\log n}{n}$ é um infinitésimo positivo.

Exemplo.

1. O cálculo do limite da sucessão $u_n = \sqrt[n]{n}$ gera uma indeterminação de tipo ∞^0, já que $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$. Aplicando logaritmos, otemos

$$\lim n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{\log n}{n}} = e^{\lim\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$$

tendo em conta que $\lim\frac{\log n}{n} = 0$.

2. Para calcular $\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, que é uma indeterminação de tipo 1^∞, vamos reescrever o termo geral da sucessão da seguinte forma.

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3. Já o cálculo de $\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ pode ser feito da seguinte forma.

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} = \lim e^{-\frac{\log n}{n}} = e^{\lim\left(-\frac{\log n}{n}\right)} = e^0 = 1$$

Exercício 21. Calcule os limites das seguintes sucessões.

(a) $v_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}$ (b) $w_n = \sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n-3}}$ (c) $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

1.2.3 Teoremas de convergência

Um dos grandes interesses do conceito de limite é permitir-nos calcular aproximações de números reais. Se soubermos, por exemplo, que uma determinada sucessão u tende para um número real a e quisermos determinar um valor aproximado de a, sabemos da definição de limite que podemos obter uma aproximação tão boa quanto queiramos: a diferença $u_n - a$ aproxima-se tanto de 0 quanto queiramos, pelo que basta escolher n suficientemente elevado para u_n ser uma boa aproximação de a. Esta ideia vai ser recorrente durante todos estes apontamentos, sendo posteriormente desenvolvida noutras disciplinas.

Por este motivo, outra questão que muitas vezes se coloca é a de determinar se uma sucessão é convergente, independentemente de saber qual é o seu limite. Há várias razões para querer responder a esta pergunta; a mais natural é querer usar a sucessão para calcular um valor aproximado de alguma constante. Muitas vezes é fácil definir sucessões que, se convergirem, têm um limite que satisfaz determinada propriedade. Mostrando a convergência da sucessão, pode-se depois obter uma aproximação tão boa quanto se queira do limite.

Os critérios de convergência que vamos ver são todos bastante simples. O primeiro é consequência duma das propriedades que já vimos atrás.

Teorema (Teorema da sucessão encaixada)**.** Sejam u, v e w sucessões satisfazendo as relações $u_n \leq v_n \leq w_n$ para todo o valor de n. Se $\lim u = \lim w = a$, então v também é convergente e $\lim v = a$.

Demonstração. Se $\lim u = a$ e $\lim w = a$, então as sucessões $u - a$ e $w - a$ são ambas infinitésimos.

Fixando um valor de N, existe uma ordem a partir da qual $|u_n - a| < \frac{1}{N}$ e $|w_n - a| < \frac{1}{N}$; uma vez que $u_n \leq v_n \leq w_n$, a partir dessa ordem também se terá necessariamente a desigualdade $|v_n - a| < \frac{1}{N}$. □

Exercício 22. Utilizando este teorema, calcule o limite das seguintes sucessões.

(a) $u_n = \frac{3+\sin(n)}{2n}$ (b) $w_n = \left(\frac{n-20}{2n+1}\right)^n$ (c) $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}+2}$

Outro resultado importante relaciona a monotonia com convergência.

Teorema. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Demonstração. Suponhamos que u é uma sucessão monótona crescente e seja M o menor dos majorantes do conjunto dos seus termos. Então para qualquer valor de N existe um termo de u tal que $u_n > M - \frac{1}{N}$ — caso contrário $M - \frac{1}{n}$ seria um majorante dos termos de u, o que é absurdo. Uma vez que u é crescente, todos os termos a partir dessa ordem satisfazem $u_n > M - \frac{1}{N}$, que equivale a $|u_n - M| < \frac{1}{n}$. Então $\lim u = M$, donde em particular u é convergente.

Se u for monótona decrescente, o raciocínio é semelhante usando o maior dos minorantes do conjunto dos seus termos. □

Claramente o recíproco não é válido: há sucessões convergentes que não são monótonas, como por exemplo a sucessão $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Porém, é fácil ver que toda a sucessão convergente é limitada.

Um resultado que por vezes é útil e que deixaremos sem demonstração é o seguinte.

Teorema (Bolzano–Weierstrass)**.** Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes.

Outra caracterização por vezes útil é recorrendo a uma outra propriedade.

Definição. Uma sucessão u diz-se uma *sucessão de Cauchy* se para todo o natural N existir uma ordem a partir da qual a distância entre quaisquer dois termos de u é inferior a $\frac{1}{N}$, ou seja, $|u_m - u_n| < \frac{1}{N}$.

Historicamente, esta definição surgiu independentemente da definição de convergência; ela é bastante importante quando se trabalha com sucessões de outros objectos que não números reais, onde a noção de limite pode não ser a adequada. No caso das sucessões reais, contudo, tem-se o seguinte resultado.

Proposição. As sucessões convergentes são precisamente as sucessões de Cauchy.

Assim, o conceito de sucessão de Cauchy pode ser usado como critério de convergência duma sucessão.

Não vamos insistir nesta fase em provas de convergência que não sejam através do cálculo de limites; porém, nos capítulos seguintes teremos oportunidade de aplicar estes resultados para mostrar convergência de sucessões que serão importantes nesses contextos. Assim, é importante conhecer e compreender estes critérios.

1.3 Séries

A propósito de progressões aritméticas e progressões geométricas, falámos atrás do problema de determinar a soma dum número de termos consecutivos duma sucessão. Nesta secção, vamos discutir um problema semelhante: como somar *todos* os termos duma sucessão. Embora possa parecer contra-intuitivo a princípio, há muitas situações em que faz sentido associar um valor finito à soma dum número infinito de parcelas; e as aplicações deste conceito são inúmeras, não apenas em Análise Matemática, mas também noutras áreas como a Física e a Economia.

1.3.1 Convergência e soma

Definição. Seja a uma sucessão. Chama-se *sucessão das somas parciais de a* à sucessão $S(a)$ tal que

$$S(a)_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\,.$$

Chama-se *série* à expressão formal que denota a soma de todos os termos de a,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

e se $\lim S(a)_n$ existir e for finito, dizemos que a série é *somável* ou *convergente* e que o seu valor é esse limite. Caso contrário, a série diz-se *divergente*.

Tal como a definimos, o valor duma série (também chamado a *soma* da série) é simplesmente um limite duma sucessão — a sucessão das somas parciais doutra sucessão. É precisamente esta definição que justifica a definição intuitiva de série como a soma de *todos* os termos da sucessão: se ao somarmos mais e mais termos o valor da soma se aproxima dum limite, então faz sentido dizer que esse limite é a soma de todos esses valores. Mais uma vez, estamos a dizer que podemos aproximar essa soma tanto quanto queiramos somando um número suficientemente grande de termos.

Determinar o valor exacto da soma duma série é em geral um problema complexo. Ao longo deste texto teremos oportunidade de ver vários métodos para o fazer; como consequência, encontraremos formas extremamente eficientes de determinar valores aproximados de constantes como π, e ou $\sqrt{2}$ com uma precisão muito maior do que a fornecida por uma máquina de calcular. Neste capítulo, focar-nos-emos nalguns tipos particulares de séries cujas somas se calculam com bastante simplicidade.

Uma vez que uma série é definida como a soma de todos os termos duma sucessão a, é habitual chamar ao valor de a_n o *termo geral* da série, por analogia com as sucessões. É preciso algum cuidado para garantir que é claro se se está a falar da *sucessão* a_n ou da *série* a_n, já que são conceitos bastante diferentes; mas em geral o contexto torna claro qual destes é o caso.

Exercício 23. Para cada uma das seguintes sucessões, escreva a expressão da série que lhe corresponde.

(a) $5n - n^2$ (b) $\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ (c) $\frac{1}{n}$ (d) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (e) 0

Exercício 24. Para cada uma das seguintes séries, escreva o termo geral da sucessão que lhe está subjacente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3n+2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo.

1. Consideremos a série de termo geral 0. Uma vez que a sucessão das suas somas parciais é constante, já que $0+0+0+\cdots+0=0$, temos que
$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = \lim 0 = 0\,,$$
donde a série é convergente e a sua soma é 0.

2. Tomemos agora uma série de termo geral constante, com valor $k \neq 0$. A sucesão das suas somas parciais é agora
$$S_n = \underbrace{k+k+k+\cdots+k}_{n+1} = (n+1)k$$
e, uma vez que $k \neq 0$, temos que
$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = \lim_n (n+1)k = +\infty\,,$$
donde esta série é divergente.

3. Se escolhermos a progressão geométrica de termo inicial $a_0 = 1$ e razão $\frac{1}{2}$, a sua série vale
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \lim \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Uma série cujo termo geral é uma progressão aritmética diz-se uma *série aritmética*. Estas séries são muito pouco interessantes, já que são sempre divergentes; de facto, se a for uma progressão aritmética de razão k, temos que
$$|S(a)_n| = |a_0 + (a_0+k) + (a_0+2k) + (a_0+3k) + \ldots + (a_0+nk)| > (n+1)\,|a_0+k|$$
e portanto $|S(a)_n| \to +\infty$, donde a série correspondente é um infinitamente grande. O único caso de convergência é o caso extremamente desinteressante em que $a_0 = k = 0$; nesse caso, o termo geral vale 0 e a soma da série também.

Já as séries cujo termo geral é uma progressão geométrica são de grande importância, quer teórica, quer prática. Estas séries, ditas *séries geométricas*, têm uma soma muito fácil de calcular: se a for uma progressão geométrica de razão r, temos que
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \lim \sum_{i=0}^{n} a_0 r^i = \lim a_0 \frac{1-r^n}{1-r}\,.$$

Se $|r| < 1$, o termo r^n é um infinitésimo, pelo que aquele limite é finito de valor $\frac{a_0}{1-r}$; se $|r| > 1$, então r^n é um infinitamente grande, pelo que a série é divergente. No caso em que $r = 1$, a série é constante e portanto diverge desde que $a_0 \neq 0$; no caso em que $r = -1$, o termo geral da série alterna entre a_0 e $-a_0$, pelo que a sucessão das somas parciais é a sucessão

$$a_0, 0, a_0, 0, a_0, 0, a_0, 0, \ldots$$

que é divergente desde que $a_0 \neq 0$.

Resumindo, uma série geométrica é convergente apenas quando $|r| < 1$.

Exercício 25. Indique quais destas séries são convergentes, calculando a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1000}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1000 \left(\frac{10}{11}\right)^n$

Uma das aplicações das séries geométricas é a transformação de números racionais em fracções. Todos os números que podem ser escritos sob a forma de uma dízima infinita periódica (os algarismos a seguir à vírgula repetem-se) podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são dois números inteiros.

Pensemos por exemplo no número $0.33333\ldots$, em que o algarismo 3 se repete infinitas vezes. Podemos escrever este número como

$$\begin{aligned}
0.33333\ldots &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots \\
&= 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-5} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n \\
&= \frac{3}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Se se repetir mais do que um algarismo, o processo é semelhante. Tomemos por exemplo o número $0.024242424\ldots$; temos que

$$\begin{aligned}
0.024242424\ldots &= 0.024 + 0.00024 + 0.0000024 + 0.000000024 + \cdots \\
&= 24 \times 10^{-3} + 24 \times 10^{-5} + 24 \times 10^{-7} + 24 \times 10^{-9} + \cdots \\
&= 2.4 \times 10^{-2} + 2.4 \times 10^{-4} + 2.4 \times 10^{-6} + 2.4 \times 10^{-8} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2.4 \times 10^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2.4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{2n} \\
&= \frac{24}{1000} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{2400}{99000} = \frac{8}{330}\,.
\end{aligned}$$

Exercício 26. Escreva os seguintes números sob a forma de fracção.

(a) $0.55555\ldots$ (b) $1.234234234234\ldots$ (c) $-0.0025025025025\ldots$

Se uma série é convergente, então à medida que somamos mais parcelas aproximamo-nos tanto quanto desejarmos da sua soma. Isto significa que as quantidades que vamos somando se vão tornando cada vez mais pequenas em valor absoluto, ou seja, que o termo geral da série é necessariamente um infinitésimo.

Outra forma de ver isto é observar que o termo geral da série é a diferença entre S_n e S_{n-1}, donde se $\lim S$ for finito se tem $\lim (S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$. Obtemos assim um resultado extremamente útil para determinar divergência de séries.

Proposição. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então a é um infinitésimo.

Vejamos como aplicar este critério para mostrar que uma série é divergente.

Exemplo.

1. O termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é a sucessão $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, cujo limite é $e \neq 0$; então esta série é divergente.

2. O termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ é a sucessão alternada de termos

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

   que não tem limite; logo esta série é divergente.

3. O termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4n-5}$ é uma sucessão convergente com limite $\frac{1}{2}$; então esta série é divergente.

Exercício 27. Recorrendo a este critério, mostre que as seguintes séries são divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + \frac{2}{n^2}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\log n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3$

É importante salientar desde já que o recíproco desta proposição *não* é válido: se o termo geral da série tender para 0, a série pode ser divergente. Um caso extremamente importante é o da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

dita *série harmónica.*

À primeira vista, esta série parece ter potencial para convergir. Os seus primeiros termos são

$$1, 1.5, 1.8333, 2.0833, 2.2833, 2.45, 2.593, 2.718, 2.829, 2.929, \ldots$$

e esta sucessão cresce cada vez mais lentamente. Porém, na realidade esta série não converge. Para ver isto, vamos agrupar os seus termos da seguinte forma.

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Esquecendo a primeira parcela, temos uma parcela com valor $\frac{1}{2}$; duas parcelas, cada uma superior a $\frac{1}{4}$; quatro parcelas, cada uma superior a $\frac{1}{8}$; oito parcelas, cada uma superior a $\frac{1}{16}$; e assim sucessivamente. Somando estes blocos, concluímos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right)+\cdots\\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\times\frac{1}{4}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{4\times\frac{1}{8}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\times\frac{1}{16}}+\underbrace{\left(\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{32}\right)}_{16\times\frac{1}{32}}+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\end{aligned}$$

que é uma série divergente.

A série harmónica é um caso particular duma série de Dirichlet.

Definição. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, em que α é um real fixo, diz-se a *série de Dirichelet* de parâmetro α.

Vimos que a série harmónica é divergente. Se $\alpha \leq 0$, o termo geral da sucessão a somar não é um infinitésimo, pelo que a série diverge. Se $0 < \alpha < 1$, então cada termo da série é maior do que o termo correspondente da série harmónica, pelo que a sucessão das somas parciais correspondente é minorada por um infinitamente grande positivo e é portanto também um infinitamente grande positivo.

Se $\alpha > 1$, em contrapartida, pode-se mostrar que a série de Dirichlet correspondente é sempre convergente. Esta prova pode ser feita directamente; contudo, na Secção 5.6.3 veremos um critério extremamente simples que nos permitirá demonstrar isto sem dificuldade.

Proposição. A série de Dirichelet de parâmetro α converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

Exercício 28. Indique quais das seguintes séries são convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n)^3}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\pi}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)$

Outro exemplo de séries cuja soma é simples de calcular (ou cuja divergência é simples de mostrar) são as chamadas *séries de Mengoli.* Estas séries têm um termo geral que pode ser escrito como uma diferença de termos doutra sucessão; ao calcularmos somas parciais, estas diferenças cancelam-se e a determinação da soma da série reduz-se ao cálculo dum limite.

Um exemplo simples é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\,.$$

O seu termo geral pode ser escrito como

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,,$$

que é a diferença de termos consecutivos da sucessão $u_n = \frac{1}{n}$. Se calcularmos as somas parciais desta série, obtemos

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_2 &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \\
S_2 &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} \\
S_n &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

donde $\lim S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Em geral, uma série de Mengoli tem um termo geral que é da forma $a_n = u_n - u_{n+k}$. Efectuando cálculos semelhantes aos anteriores, é simples verificar que esta série é convergente precisamente quando u é convergente e que, nesse caso, a sua soma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k - k \lim u\,.$$

Exemplo.

1. Tomando $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)$, temos que o termo geral desta série pode ser escrito como

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = u_n - u_{n+1}$$

com $u_n = \frac{1}{n^2}$. Então

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{4} \\
S_2 &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{1}{9} \\
S_3 &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{9}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{16} \\
S_n &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

cujo limite é 1. Logo a série é convergente e a sua soma é 1.

2. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Multiplicando o numerador e o denominador da fracção no termo geral da série por $\sqrt{n} - \sqrt{n+1}$, obtemos

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = -\sqrt{n} - \left(-\sqrt{n+1}\right) = u_n - u_{n+1}$$

com $u_n = -\sqrt{n}$. Uma vez que u é um infinitamente grande negativo, concluímos que a série é divergente.

Se calcularmos explicitamente a sucessão das suas somas parciais, obtemos

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{1} \\
S_2 &= \left(\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{1} \\
S_2 &= \left(\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}\right) + \left(\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{4} - \cancel{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{4} - \sqrt{1} \\
S_n &= \sqrt{n+1} - 1
\end{aligned}$$

e o limite desta sucessão é de facto $+\infty$.

3. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \log \frac{n+1}{n+3}$ é um exemplo em que $a_n = u_n - u_{n+2}$. De facto, temos que

$$\log \frac{n+1}{n+3} = \log(n+1) - \log(n+3) = u_n - u_{n+2}$$

com $u_n = \log(n+1)$. Então esta série é divergente, pois $u \to +\infty$. Poderíamos verificar este facto directamente, calculando as suas somas parciais.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \log 1 - \log 3 \\
S_2 &= (\log 1 - \log 3) + (\log 2 - \log 4) \\
&= (\log 1 + \log 2) - (\log 3 + \log 4) \\
S_3 &= (\log 1 - \cancel{\log 3}) + (\log 2 - \log 4) + (\cancel{\log 3} - \log 5) \\
&= (\log 1 + \log 2) - (\log 4 + \log 5) \\
S_4 &= (\log 1 - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 2} - \log 4) + (\cancel{\log 3} - \log 5) + (\cancel{\log 4} - \log 6) \\
&= (\log 1 + \log 2) - (\log 5 + \log 6) \\
S_n &= (\log 1 + \log 2) - (\log(n+1) + \log(n+2))
\end{aligned}$$

e $\lim S_n = -\infty$.

Exercício 29. Indique quais das seguintes séries são convergentes, calculando nesse caso a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{2n+3}{2n-1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right)$

1.3.2 Critérios de convergência

Tal como sucedia com as sucessões, em muitos casos interessa decidir se uma série converge ou não independentemente de conseguirmos calcular exactamente a sua soma. Novamente, a razão mais comum para este problema ser interessante é querermos determinar um valor aproximado da soma — uma operação que só faz sentido se a série for convergente.

Vimos já um resultado que permite responder a esta questão duma forma negativa.

Proposição. Se a sucessão a não for um infinitésimo, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Os dois primeiros resultados são muito simples.

Proposição.

1. Sejam a e b duas sucessões tais que $a_n = b_n$ excepto para um número finito de termos. Então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza.

2. Se $k \neq 0$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ são da mesma natureza.

A justificação destas propriedades é muito simples. Se $a_n = b_n$ a partir de certa ordem, então a partir dessa ordem as sucessões das somas parciais $S(a)$ e $S(b)$ diferem por uma constante k, donde $\lim S(a) = \lim S(b) + k$ e se um destes limites existir e for finito, o outro também o será.

Por outro lado, temos que $S(ka) = kS(a)$ atendendo à propriedade distributiva da multiplicação sobre a soma, pelo que $\lim S(ka) = k \lim S(a)$ e novamente se um dos limites $\lim S(a)$ e $\lim S(ka)$ existir e for finito, o outro também o será.

Exemplo. Da convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, podemos concluir que as séries seguintes são todas convergentes.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{2^n}$$

Da mesma forma, da divergência da série harmónica podemos concluir que as seguintes séries são divergentes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \qquad \sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

Quando o termo geral da sucessão é uma soma, os critérios seguintes são úteis.

Proposição. Sejam a e b duas sucessões.

3. Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas convergentes com soma A e B, respectivamente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ também é convergente com soma $A + B$.

4. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

Mais uma vez, estes resultados podem ser facilmente verificados recorrendo às somas parciais $S(a)$ e $S(b)$ e às propriedades dos limites. No caso em que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem ambas, não podemos concluir nada sobre a sua soma: basta observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

é uma série divergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

é convergente, e em ambas o termo geral é a soma do termo geral de duas séries divergentes.

Exemplo. Consideremos as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Vimos já que a primeira destas séries é uma série de Mengoli convergente com soma 1; a segunda é uma série geométrica convergente com soma 2; a terceira é a série harmónica, que é divergente; e o termo geral da última tende para 1, logo esta é divergente. Então, a proposição anterior permite concluir que

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$ é convergente com soma 3;

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n}\right)$ é divergente;

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n}\right)$ é divergente;

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + 1 + \frac{1}{n}\right)$ é divergente.

enquanto que a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n}\right)$ teria de ser determinada doutra forma (neste caso, podemos concluir que é divergente porque o termo geral tende mais uma vez para 1).

Exercício 30. Indique quais das seguintes séries são convergentes, calculando nesse caso a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} + \frac{2^n}{3^n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+2}} - \log\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

1.3.3 Séries de termos não negativos

As séries de termos não negativos têm uma importância especial, já que há um conjunto de critérios que permitem demonstrar a sua convergência ou divergência. Muitas vezes, a forma mais simples de mostrar que uma série (qualquer) converge é precisamente relacioná-la com uma série de termos não negativos e aplicar um destes critérios.

A primeira observação é bastante simples: a sucessão das somas parciais duma série de termos não negativos é crescente, logo converge se e só se for uma sucessão majorada.

Proposição. Uma série converge se e só se a sucessão das suas somas parciais é majorada.

A ideia por detrás de todos os critérios de comparação é usar esta proposição e encontrar condições que garantam que a sucessão das somas parciais duma série é majorada.

Proposição (Critério geral de comparação)**.** Sejam a e b duas sucessões tais que $0 < a_n \leq b_n$ para todo o n. Então:

- se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

A validade desta proposição é bastante simples de entender: se $0 < a_n \leq b_n$, então a sucessão das somas parciais de a está enquadrada entre 0 e a sucessão das somas parciais de b. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, a sucessão das somas parciais de a é majorada (pela soma dessa série) e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então a sucessão das somas parciais de b é minorada por um infinitamente grande positivo, sendo portanto também ela um infinitamente grande positivo.

Uma consequência imediata deste critério é a seguinte.

Proposição. Se a e b forem sucessões tais que $a_n, b_n \geq 0$ e $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existe e não é 0, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza.

Demonstração. Sendo $L = \lim \frac{a_n}{b_n}$, temos que a partir de certa ordem se verifica a relação $0 < \frac{L}{2} b_n < a_n < 2Lb_n$; uma vez que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{2} b_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} 2Lb_n$$

têm todas a mesma natureza, o critério anterior permite concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é da mesma natureza daquelas. $\square$

Observe-se que estes critérios não nos dizem nada sobre o valor da soma das séries envolvidas. Em geral, conforme já referimos, o interesse de os aplicar é precisamente saber que faz sentido usar métodos numéricos para obter valores aproximados das suas somas.

Regra geral, a convergência ou divergência de qualquer série cujo termo geral é uma fracção pode ser decidida pelo critério geral de comparação.

Exemplo.

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ é convergente, já que $0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ e a série de Dirichlet de parâmetro 2 é convergente.

2. Para estudar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{3}{2}}$ temos de usar o corolário do critério de comparação, já que o termo geral da série é maior que $\frac{1}{n^2}$. Note-se que a primeira parcela desta série é negativa, mas como sabemos que a convergência não depende do valor nos primeiros termos podemos ignorar este facto.

   Comparando com a série de Dirichlet de parâmetro 2, obtemos

   $$\lim \frac{\frac{1}{n^2-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2-\frac{3}{2}} = 1\,,$$

   donde estas séries têm a mesma natureza. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{3}{2}}$ é uma série convergente.

3. Já com a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3}{3^n-2}$ não temos hipótese senão usar o corolário, observando que o seu termo geral é semelhante ao duma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. De facto, temos que
$$\lim \frac{\frac{2^n+3}{3^n-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim \frac{2^n \times 3^n + 3 \times 3^n}{3^n \times 2^n - 2 \times 2^n} = \lim \frac{1+\frac{3}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}} = 1$$
e portanto ambas as séries são convergentes.

4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$ é uma série divergente, já que
$$\lim \frac{\frac{n+1}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2+n}{n^2+2} = 1$$
e a série harmónica é divergente.

Exercício 31. Determine a convergência ou divergência das seguintes séries, através da comparação com a série adequada.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+7}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n^2-3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{2^n-1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-3n+5}{\sqrt{n}+3n\sqrt{n}}$

A comparação com as séries geométricas gera outra classe de critérios de convergência. A ideia (que pode ser desenvolvida formalmente) é a seguinte: numa progressão geométrica u de razão r, temos que
$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim r = r \text{ e } \lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_0 r^n} = r\,;$$
então, uma sucessão que exiba um daqueles dois comportamentos comporta-se de forma semelhante a uma série geométrica de progressão r. Este raciocínio só não funciona no caso $r = 1$: estas séries estão na fronteira entre convergência e divergência, tendo de ser analisadas directamente.

Proposição (Critério de D'Alembert ou da razão)**.** Seja a uma sucessão de termos positivos tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se $r < 1$ e divergente se $r > 1$.

Proposição (Critério de Cauchy ou da raiz)**.** Seja a uma sucessão de termos não negativos tal que $\lim \sqrt[n]{a_n} = r$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se $r < 1$ e divergente se $r > 1$.

Estes critérios são mais complexos de usar do que os anteriores, pelo que convém saber reconhecer as situações em que de facto são úteis. O critério da razão usa-se tipicamente quando o termo geral da série é uma potência cujo expoente é um múltiplo de n, ou quando é um produto, ou quando é um factorial; o critério da raiz usa-se quando o termo geral da série é uma potência cujo expoente depende de n.

Exemplo.

1. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Aplicando o critério da razão, concluímos que
$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$
donde esta série é convergente.

2. Para estudar a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n$, podemos aplicar o critério da razão ou o critério da raiz. No primeiro caso, obtemos

$$\lim \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim \frac{n^{n+1}}{n(n+1)^{n+1}} = \lim \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 0 \times \frac{1}{e} = 0$$

e portanto a série é convergente. Já o critério da raiz conduz a

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

donde também se conclui a convergência da série.

3. Se estudarmos a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^{2n+3}$ aplicando o critério da raiz, obtemos

$$\begin{aligned}\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^{2n+3}} &= \lim \left(\frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^{\frac{2n+3}{n}} = \lim \left(\frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^{2+\frac{3}{n}} \\ &= \left(\lim \frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^2 \left(\lim \frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^{\lim \frac{3}{n}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

e portanto esta série é convergente.

Exercício 32. Recorra aos critérios de comparação para séries de termos não negativos para determinar se as seguintes séries são convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3^n}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n(n+10)}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Finalmente, observe-se que estes critérios podem ser aplicados facilmente para determinar a convergência ou divergência de séries de termos negativos: basta estudar para a série dos simétricos, que é uma série de termos não negativos.

1.3.4 Séries de sinal variável

Quando o termo geral duma série não tem sempre o mesmo sinal, o problema de determinar a sua convergência é bastante mais complexo. Há um caso particular — e bastante frequente na prática — para o qual há um critério muito simples; mas em geral a única forma de proceder é transformar a série numa série de termos positivos.

Definição. Seja a uma sucessão de termos não negativos. A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ diz-se uma *série alternada*.

Proposição (Critério de Leibnitz)**.** Seja a uma sucessão decrescente de termos não negativos. Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge se e só se a for um infinitésimo.

Este resultado é simples de perceber: se a é uma sucessão decrescente, então a sucessão das somas parciais de $(-1)^n a_n$ vai tomando valores cada vez mais próximos, alternadamente acima e abaixo dum valor médio. Se a for um infinitésimo, a diferença entre termos consecutivos desta sucessão tende para 0, donde ela é convergente.

Um exemplo de série alternada é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, dita *série harmónica alternada.* Esta série é convergente; veremos na Secção 3.3 que a sua soma é precisamente $\log 2$.

Exercício 33. Aplique o critério de Leibnitz para mostrar que as seguintes séries convergem.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Para todos os outros casos, existe o seguinte critério.

Proposição. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Em geral, contudo, este critério é demasiado fraco: há muitas séries que convergem sem que a sua série dos módulos convirja, conforme sucede com a série harmónica alternada. As séries que convergem em módulo dizem-se séries *absolutamente convergentes*; aquelas que convergem mas não em módulo dizem-se *simplesmente convergentes*. Assim, a série harmónica alternada é simplesmente convergente, enquanto que a série $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Exercício 34. Diga se as seguintes séries são divergentes, simplesmente convergentes ou absolutamente convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{3n-2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^3+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$

A convergência absoluta tem consequências importantes que não exploraremos aqui. Um exemplo é a possibilidade de reorganizar os termos da série sem alterar a sua soma. No caso duma série simplesmente convergente, há um teorema de Riemann que mostra que para qualquer real A os seus termos podem ser somados por uma ordem tal que a soma da série é A.

1.3.5 Séries de potências

Para terminar este capítulo, vamos discutir um tipo de séries que é especialmente usado na Análise Matemática: as séries de potências. Estas séries têm este nome porque o seu termo geral é uma potência de expoente n cuja base depende dum parâmetro x.

Definição. Seja a uma sucessão. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ diz-se uma *série de potências centrada em x_0.*

Por exemplo, as seguintes séries são séries de potências.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$a_n = 1$	$x_0 = 0$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$	$a_n = (-1)^n$	$x_0 = -1$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)(x-5)^n$	$a_n = 3n-2$	$x_0 = 5$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$	$a_n = \dfrac{1}{n!}$	$x_0 = 2$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+2^n}$	$a_n = \dfrac{1}{1+2^n}$	$x_0 = 0$

O critério natural para estudar a convergência destas séries é o critério da raiz. Porém, uma vez que elas dependem do valor de x, estamos interessados em saber para que valores de x é que estas séries são (absolutamente) convergentes.

Uma vez que

$$\lim \sqrt[n]{|a_n\,(x-x_0)^n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|\ ,$$

temos que uma série de potências converge absolutamente quando $\lim \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| < 1$, ou seja, quando

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\,,$$

e diverge quando $|x-x_0|$ é maior do que aquele valor.

Ao valor de $r = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ chama-se *raio de convergência* da série de potências de termo geral $a_n\,(x-x_0)^n$. Esta série é portanto absolutamente convergente se $x_0 - r < x < x_0 + r$ e divergente se $x < x_0 - r$ ou $x > x_0 + r$. Nos pontos $x_0 \pm r$ a convergência da série tem de ser estudada directamente.

Aplicando o critério da razão em vez do critério da raiz, encontramos outra expressão para o raio de convergência da série:

$$r = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\,.$$

Consoante a expressão de a_n, pode ser mais vantajoso trabalhar com uma ou outra destas expressões.

O conjunto de valores de x para os quais uma série de potências converge diz-se o *intervalo de convergência* da série. A notação de intervalos será introduzida formalmente na Secção 2.3.1.

Exemplo.

1. Para a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, temos que

   $$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{1} = 1$$

   donde esta série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$ — o que poderia ter sido concluído directamente, já que se trata duma série geométrica de razão x. Para $x = 1$ a série é divergente, já que se trata da série harmónica; para $x=-1$ a série é convergente, já que se trata da série harmónica alternada.

Assim, o intervalo de convergência desta série é o intervalo $[-1,1[$.

2. Para a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$, temos novamente

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{1} = 1$$

donde esta série é absolutamente convergente para $-2<x<0$. Para $x=-2$, o termo geral da série é $(-1)^n(-2+1)^n = (-1)^n(-1)^n = 1$, donde temos novamente a série harmónica, que é divergente. Para $x=0$, obtemos $(-1)^n(0+1)^n = (-1)^n$, pelo que neste caso obtemos a série harmónica alternada, que converge. Então o intervalo de convergência desta série é $]-2,0]$.

3. Já para a série $\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)(x-5)^n$ é mais simples usar a expressão para o raio de convergência derivada do critério da razão. Temos que

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\frac{3n-2}{3(n+1)-2} = 1$$

e a série é absolutamente convergente para $4<x<6$.

Se $x=4$, o termo geral da série é $(-1)^n(3n-2)$, que não é um infinitésimo; se $x=6$, o termo geral é $(3n-2)$, que também não é um infinitésimo. Então esta série converge apenas no intervalo $]4,6[$.

4. Para estudar a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$ vamos seguir a mesma estratégia. Calculando

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty$$

concluímos que esta série de potências é absolutamente convergente para todos os valores de x.

5. Finalmente, tomando $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+2^n}$ concluímos que

$$\lim\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\sqrt[n]{\frac{1}{1+2^n}} = \frac{1}{\lim\sqrt[n]{1+2^n}} = \frac{1}{2},$$

pelo que esta série é convergente se $-2<x<2$. Para $x=2$, o termo geral da série é $\frac{2^n}{1+2^n}$, que não é um infinitésimo, pelo que a série diverge; para $x=-2$, obtemos $\frac{(-2)^n}{1+2^n}$, que novamente não é um infinitésimo.

Então o intervalo de convergência desta série é $]-2,2[$.

Exercício 35. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(n)}{2^n}(x+2)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{3^nn}$

Exercício 36. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências e estude-as nos extremos desse intervalo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n+1} x^n$

1.4 Exercícios

37. Escreva o termo geral das seguintes sucessões.

(a) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}, \ldots$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \ldots$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{7}{30}, \frac{1}{5}, \frac{9}{50}, \ldots$

38. Estude a convergência das seguintes sucessões.

(a) $a_n = (-1)^n \times 3$ (b) $b_n = \cos(n\pi)$ (c) $c_n = 3n + (-1)^n \times 3n$

39. Estude as seguintes sucessões quanto à monotonia.

(a) $u_n = (-1)^n$
(b) $v_n = 3^n$
(c) $z_n = 3n - n^2 + 25$
(d) $w_n = \begin{cases} \frac{1+n}{2n} & n \text{ par} \\ \frac{3n+1}{n} & n \text{ ímpar} \end{cases}$
(e) $a_n = 1 - \frac{n+1}{2n}$
(f) $b_n = \frac{n+1}{n^2+3}$
(g) $c_n = |n^2 - 5|$
(h) $d_n = \frac{3n-2}{4n+5}$

40. Verifique se as seguintes sucessões são majoradas e/ou minoradas.

(a) $u_n = 2\left(1 + (-1)^n\right)$
(b) $v_n = \frac{8n+1}{n}$
(c) $z_n = 3n - 2$
(d) $w_n = \frac{n+1}{n+2} - 3$
(e) $y_n = \begin{cases} 2n-1 & n < 4 \\ \frac{5n+7}{n+1} & n \geq 4 \end{cases}$
(f) $x_n = \sqrt[n]{5n}$
(g) $a_n = \frac{4n^2+3n}{n^2+n}$
(h) $b_n = (-1)^n\left(n^2 - 3\right)$

41. Calcule, se existir, o limite das seguintes sucessões.

(a) $a_n = (-1)^n$
(b) $b_n = \left(\frac{99}{203}\right)^n$
(c) $c_n = \left(\frac{212}{191}\right)^n$
(d) $u_n = |x - 5|$
(e) $v_n = (-1)^n \frac{3n}{n+1}$
(f) $b_n = \frac{1+n^3}{n^2+2n-1}$
(g) $x_n = \frac{2n^3+3n-1}{2+n-5n^3}$
(h) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+5}$
(i) $c_n = 2^{3n-1}3^{2-2n}$
(j) $b_n = 3n + \frac{3n^3-2}{1-n^2}$
(k) $d_n = \frac{(-1)^n n^2+1}{n^3+2}$
(l) $a_n = \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{2-n}$
(m) $b_n = \frac{3^n}{n^2}$
(n) $c_n = \frac{\log(n+1)}{\log(n)}$
(o) $u_n = n^{\frac{1}{\log(n+1)}}$
(p) $u_n = 2^{\frac{2n}{n+2}} \sqrt[n]{2^{1-3n}}$
(q) $w_n = \begin{cases} 2n+3 & n \leq 7 \\ \frac{3n+1}{n} & n > 7 \end{cases}$
(r) $y_n = \sqrt{2n^2+3} - \sqrt{2n^2}$
(s) $d_n = (-1)^n(3n+5)$
(t) $p_n = \log\left(e^n + 1\right) - n$
(u) $b_n = \frac{(2n+1)(n+3)(5n+1)^3}{(3n+5)^5}$

42. Estude as seguintes sucessões quanto à convergência.

(a) $u_n = \left(1 - \frac{a}{n^2}\right)^{n^2+1}$

(b) $z_n = \sqrt[n]{\frac{5^n+1}{n}}$

(c) $w_n = \left(1 + \frac{2}{e^n}\right)^{e^{n+1}}$

(d) $x_n = (2^n + 3^n + 5^n + 7^n)^{\frac{1}{n}}$

(e) $u_n = \left(1 - \frac{v_n}{2}\right)^{\frac{1}{v_n}}$ com $v_n = \frac{1}{n!}$

43. Estude a natureza de cada uma das seguintes séries e, em caso de convergência, indique a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{10^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{3^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(3n+1)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{5n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{5n}\right)^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{n}\right)$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \log \frac{n+1}{n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+2}}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2}{n^2+2}\right)$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)$

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+2x+2}\right)$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)(2n+5)} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{n^2-1}\right)$

44. Estude a natureza das seguintes séries numéricas, usando os critérios válidos para séries de termos não negativos.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\log(n))^{-n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^3}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+5}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{n^2}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$ (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n^3-12}$ (w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3 3^n}$

45. Diga se as seguintes séries são divergentes, simplesmente convergentes ou absolutamente convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{6^{n+1}}$

46. Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é uma série absolutamente convergente, com $a_n \neq 0$, indique a natureza das seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}a_n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1}a_n$

47. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências e estude-as nos extremos desse intervalo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{1+n^2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log(n)x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^n(x-1)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)}x^n$ (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{1+n^2}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^{2n-1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{1+2^n}x^n$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}$

48. Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$ são séries de potências com raios de convergência respectivamente $r_a = 1$ e $r_b = 2$, indique se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\,x^n$ é convergente nos seguintes pontos.

(a) $x = -\frac{1}{2}$ (b) $x = \frac{3}{2}$ (c) $x = 5$ (d) $x = 0$ (e) $x = 1$

Capítulo 2

Funções reais de variável real

Neste capítulo, vamos introduzir os objectos de estudo da Análise Matemática e começar a estudar as suas propriedades.

2.1 Generalidades

A Análise Matemática estuda o comportamento das funções reais de variável real. Antes de começarmos a trabalhar com estes objectos, importa discutir um pouco o que é uma função, como se representa e como se trabalha com ela.

Em Matemática, uma função é simplesmente uma regra que permite transformar objectos noutros. Este conceito é extremamente abrangente e geral, capturando um conjunto vastíssimo de situações do dia-a-dia. De facto, em praticamente todos os contextos em que se usa o termo *função* é neste sentido, mesmo que a regra de transformação em causa não seja muito passível de tratamento matemático.

Aos valores que a função recebe chama-se *objectos* ou *argumentos* e ao resultado de aplicar a função a objectos chama-se *imagem*. O conjunto dos valores que a função aceita como objectos chama-se *domínio* da função e o conjunto de resultados possíveis chama-se *contradomínio* ou *imagem* da função.

Muitas das propriedades que observamos em objectos do dia-a-dia são exemplos de funções.

Exemplo.

1. A cor dum prédio é um exemplo duma função. Aqui, a regra de transformação é directa (basta olhar para o prédio para saber a sua cor); os objectos desta função são prédios e as imagens são cores. O domínio da função é o conjunto de todos os prédios; o seu contradomínio é o conjunto de todas as cores de que há prédios.

2. A marca dum automóvel é outro exemplo duma função. Dado um automóvel, podemos determinar a sua marca, por exemplo lendo-a no livrete. Obtemos assim uma regra de transformação que associa a cada automóvel a sua marca. Esta função tem como domínio o conjunto de todos os automóveis e como contradomínio o conjunto de todas as marcas de automóveis.

3. Uma receita de cozinha também é um exemplo duma função. De facto, uma receita indica precisamente uma forma de transformar objectos (os ingredientes) num resultado final (um prato). É uma função muito particular, já que apenas pode ser aplicada a um objecto; o seu domínio contém apenas um elemento — a combinação de ingredientes

necessária para preparar o prato — e o seu contradomínio também — contém apenas o prato que a receita prepara.

4. Quando nos dirigimos a um estabelecimento comercial, o valor que pagamos é calculado com base nos produtos que pretendemos adquirir. Dito doutra forma, o total a pagar é função das compras. A regra de transformação em causa é a fórmula que diz como determinar o valor a pagar, dependendo dos produtos.

   Esta função faz sentido para conjuntos de produtos do estabelecimento. Assim, o seu domínio contém todos os conjuntos possívels de produtos do estabelecimento. O seu contradomínio é o conjunto de todas as quantias em dinheiro que podem ser pedidas como pagamento.

5. O cálculo do imposto sobre o rendimento a pagar no final de cada ano é feito com base nos rendimentos obtidos por cada contribuinte. Este cálculo é feito através duma fórmula bastante complicada, mas depende apenas desses rendimentos; assim, é mais uma vez exemplo duma função. O domínio desta função é o conjunto de valores possíveis do rendimento de alguém (teoricamente, todos os números positivos); o contradomínio é o conjunto dos valores possíveis do imposto a pagar (que, mais uma vez, em teoria é o conjunto de todos os números positivos).

6. Uma sucessão é uma função que transforma cada número natural n no termo de ordem n da sucessão. Esta função é de natureza mais matemática que as anteriores; dada uma sucessão u, o seu domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o seu contradomínio é o conjunto de todos os valores possíveis de u_n.

Em Análise Matemática, estamos interessados em particular em funções que transformam números reais em números reais. Tipicamente, estas funções correspondem a regras de transformação envolvendo operações matemáticas, como seja: "somar 2", "multiplicar por 5" ou "calcular o logaritmo". Nestas funções, o seu domínio é o conjunto dos números para os quais a operação descrita faz sentido — não podemos dividir por zero ou tirar a raiz quadrada dum número negativo, por exemplo — e o contradomínio é o conjunto dos seus resultados possíveis. Tipicamente, estas funções são abstracções de funções associadas a problemas concretos que queremos estudar; no contexto da Análise Matemática, ignoramos o problema e centramo-nos apenas na função.

Exemplo.

1. A função "somar um" é uma função que está definida para todos os números reais e que tem como resultados possíveis todos os números reais: por um lado é possível somar um a qualquer número real; por outro, os resultados que se podem obter também são todos os números reais.

   Imagine-se a seguinte situação: uma pessoa está num semáforo a contar os automóveis vermelhos que passam nesse semáforo. Esta função é a regra de transformação que é aplicada de cada vez que passa um automóvel vermelho (soma-se um ao total de automóveis que já tinham passado). Embora este exemplo possa parecer artificial, corresponde de facto a uma situação que ocorre vezes sem conta em situações reais de sistemas controlados por computador.

2. A função "multiplicar por 3" é outra função que está definida para todos os números reais e que também tem como resultados possíveis todos os números reais. O seu domínio e contradomínio são ambos o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais.

Imagine-se a seguinte situação: um produto é vendido numa mercearia a €3 por quilo. Esta função é a regra de transformação que é aplicada para determinar o preço (em euros) a pagar por um produto (em quilos).

3. A função "multiplicar um número por si próprio" está definida para todos os números reais, mas devolve como resultado apenas números positivos ou zero. Assim, o seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, mas o seu contradomínio é o conjunto dos reais maiores ou iguais a zero.

   Esta função corresponde à regra que permite calcular a área dum quadrado conhecendo o comprimento do seu lado.

2.2 Representação de funções

Uma vez que as funções de números reais podem ganhar uma complexidade muito elevada, é conveniente ter uma notação própria para as representar. Em primeiro lugar, é habitual dar nomes às funções, geralmente as letras minúsculas f, g ou h; para representar o valor que a função associa a um objecto, escrevemos o nome da função seguido do objecto entre parêntesis.

Pensemos na função "somar 1" e chamemos-lhe f. Se escolhermos um número qualquer, o cálculo do valor da função é feito escrevendo "+1" à frente desse número:

$$f(1) = 1+\mathbf{1} \qquad f(3) = 3+\mathbf{1} \qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}+\mathbf{1}\,,$$

e assim por diante. Escolhendo um símbolo arbitrário $\star$ para representar um número (qualquer), é natural dizer que se tem

$$f(\star) = \star + 1\,.$$

Tipicamente, utiliza-se para esta finalidade uma letra do final do alfabeto: x, y ou z. Assim, poderíamos definir esta função pela fórmula $f(x) = x + 1$. É porém fundamental perceber que nesta fórmula a letra x é apenas um símbolo para representar o número que é fornecido como argumento da função. A maneira mais correcta de ler a expressão $f(x) = x + 1$ será ler "x" como "um número": "a função f aplicada a um número devolve esse número mais um". É completamente equivalente escrever

$$f(x) = x+1 \qquad f(y) = y+1 \qquad f(z) = z+1 \qquad f(\bullet) = \bullet+1 \qquad f(\cdot) = \cdot+1\,.$$

A última versão é aliás usual nalguns contextos de aplicação da Análise Matemática.

A vantagem desta notação é que calcular valores da função se resume a substituir o símbolo usado para o argumento pelo seu valor. Por exemplo: se $f(x) = x + 1$, então $f(2) = 2 + 1 = 3$ (substituímos x por 2); $f(9) = 9+1 = 10$ (substituímos x por 9). Pode até ser relevante calcular valores de expressões mais estranhas, como a ou $x + y$; o processo é o mesmo: substituir o símbolo (neste caso x) pelo valor em causa. Tem-se assim que $f(a) = a+1$ e $f(x+y) = x+y+1$.

Exemplo.

1. A função "multiplicar por 3" pode ser definida como $g(\cdot) = 3 \times \cdot$, ou $g(x) = 3x$.

2. A função "multiplicar um número por si próprio" pode ser definida como $g(\cdot) = \cdot \times \cdot$, ou $g(x) = x \times x$, ou ainda $g(y) = y^2$.

3. Consideremos a função h por $h(x) = 5x^2 - \frac{2}{x}$. Esta função está definida para qualquer número diferente de 0 (se substituirmos x por 0 obtemos a expressão $\frac{2}{0}$, que não faz sentido); o seu domínio é então o conjunto dos reais diferentes de 0.

   Para calcular o valor de h num ponto, temos apenas de substituir x pelo valor correspondente. Para calcular $h(1)$, substituímos x por 1 e obtemos $h(1) = 5(1)^2 - \frac{2}{1} = 3$; para calcular $h(-2)$ substituímos x por 2 e obtemos $h(-2) = 5(-2)^2 - \frac{2}{-2} = 21$.

Exercício 1. Seja f a função definida pela expressão $f(y) = (y+1)(y+3)$. Quais das seguintes afirmações estão correctas?

(a) $f(2) = 15$

(b) $f(-1) = 0$

(c) $f(3) = 18$

(d) $f(0) = f(-4)$

(e) $f(z) = (z+1)(z+3)$

(f) $f(y) = y^2 + 4y + 3$

Outra forma de representar funções é tabelando os seus valores. Na vida do dia-a-dia, encontramos muitos exemplos desta representação de funções. Um exemplo é a tabela de preços dum café: esta especifica completamente a função que associa a cada produto o seu preço. Outro exemplo é um catálogo de automóveis, que indica para cada automóvel as suas características — que não são mais do que valores de funções. Os registos meteorológicos existentes são outros exemplos de tabelas que representam funções, neste caso funções cuja expressão é desconhecida e que portanto só podem ser determinadas experimentalmente: temperatura máxima e mínima, precipitação, etc.

A utilidade do uso de tabelas prende-se essencialmente com a facilidade em obter os valores da função. Antes da invenção das máquinas de calcular, eram de uso corrente livros contendo valores tabelados de várias funções usadas constantemente na Engenharia cujo cálculo não era prático (notavelmente os logaritmos, mas também diversas funções trigonométricas). Uma tabela de logaritmos podia ocupar integralmente um livro de trezentas páginas.

Hoje em dia já ninguém usa tabelas de logaritmos ou funções trigonométricas devido à generalização da calculadora e do computador. Contudo, o funcionamento destes assenta no mesmo princípio: a retenção em memória de gigantescas tabelas contendo valores suficientes daquelas funções para permitir obter directamente os seus valores em muitos pontos, e reduzir os cálculos necessários para obter os valores noutros pontos.

Quando o domínio da função cresce, porém, começa a ser incomportável para um ser humano gerar (e arquivar!) tabelas contendo os seus valores. Para além disso, muitas vezes o que se pretende é ter uma ideia qualitativa do comportamento da função: onde é que ela aumenta, onde é que diminui, como é que se comporta quando o seu argumento toma valores muito elevados... Um dos objectivos da Análise é responder de forma precisa a estas questões; mas na prática muitos problemas podem ser resolvidos aproximadamente de forma mais que satisfatória apenas recorrendo a outro tipo de representação de funções: os gráficos. Mesmo para um estudo teórico e mais formal, o gráfico é um poderoso auxiliar da intuição que deve sempre ser aproveitado.

Para desenhar o gráfico duma função, vamos fixar um sistema de coordenadas no plano traçando duas rectas perpendiculares (*eixos*), uma horizontal e outra vertical. O eixo horizontal vai corresponder aos objectos da função, o eixo vertical às imagens. Os valores são medidos a partir da intersecção dos eixos (a *origem* do referencial), sendo positivos para a direita ou para cima e negativos para a esquerda ou para baixo.

Por convenção, usamos a letra x para representar os argumentos da função e a letra y para os resultados. O gráfico da função é o conjunto de pontos (x, y) satisfazendo $y = f(x)$; ou seja, escolhendo um valor para o argumento (medido no eixo horizontal), calculamos a sua imagem e medimos esse valor no eixo vertical. Finalmente, assinalamos o ponto correspondente (definido como a intersecção das rectas perpendiculares aos eixos que passam pelos valores medidos).

Vejamos alguns exemplos. Considerando a função definida por $f(x) = x + 1$, temos que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$ e $f(2) = 3$, entre outros. Tabelando estes valores (e mais alguns), obtemos a seguinte tabela.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4

Vamos agora marcar estes pontos num referencial, conforme ilustrado na Figura 2.1 (a), e uni-los por uma curva, como se vê na Figura 2.1 (b). A linha que une os pontos é o gráfico da função.

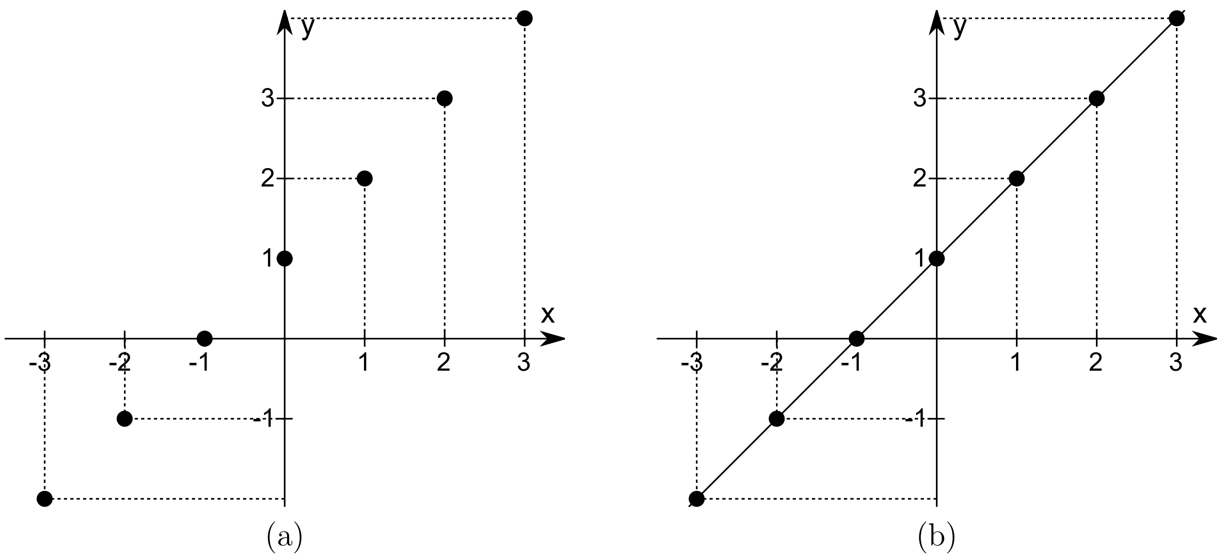


Figura 2.1: Gráfico da função definida por $f(x) = x + 1$.

Este método é o método usado pelas calculadoras gráficas e pela maioria dos programas de computador que traçam gráficos. É um método simples e que funciona bem para funções pouco complexas; porém, para expressões mais complicadas pode gerar resultados errados. Veremos mais adiante exemplos desse tipo e estudaremos técnicas mais poderosas para lidar com essas situações.

Vejamos mais alguns exemplos de gráficos de funções.

Exemplo.

1. Seja g a função definida pela expressão $g(x) = x^2 - 2$. Esta função está definida para todos os números reais. Vamos começar por tabelar alguns dos seus valores.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	7	2	-1	-2	-1	2	7

Esta tabela parece indicar que o valor da função num ponto x é igual ao seu valor no ponto simétrico $-x$. Podemos verificar que tal se passa: se calcularmos o valor de $g(-x)$

(que se obtém, recorde-se, substituindo na definição de g o símbolo x pela expressão $-x$) obtemos

$$g(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = g(x) .$$

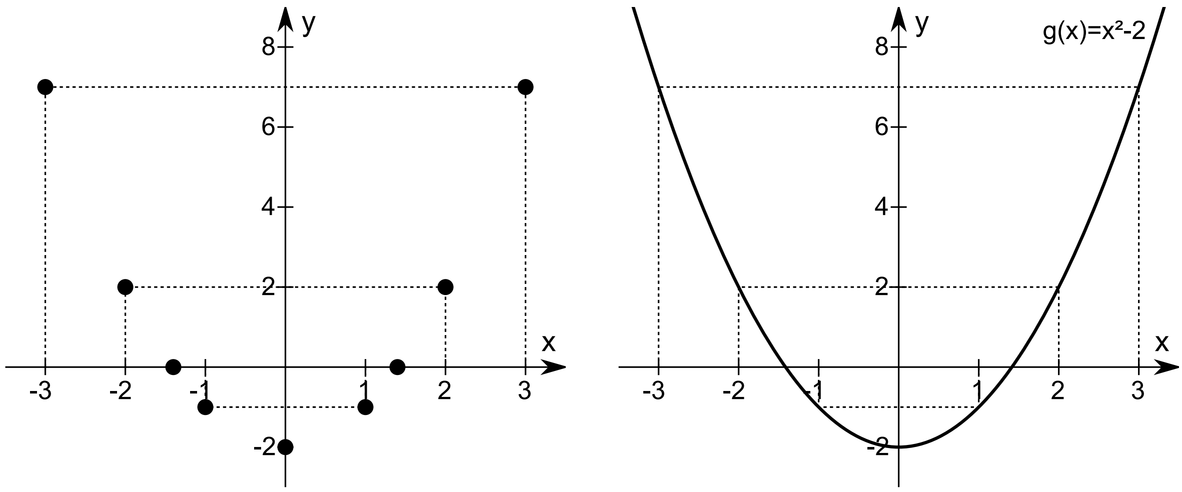
Uma função com esta propriedade diz-se uma *função par*. Em termos geométricos, o que isto significa é que o gráfico de g tem um eixo de simetria: os pontos do gráfico correspondentes a x e $-x$ têm a mesma imagem, ou seja, são dois pontos à mesma distância do eixo vertical (um para cada lado) e à mesma altura. Assim, o eixo vertical é um eixo de simetria da função.

Para traçar o gráfico, também é útil saber em que ponto é que este intersecta o eixo horizontal, ou seja, em que pontos é que se tem $g(x) = 0$. Resolvendo a equação correspondente, obtemos

$$g(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2} ,$$

donde os pontos $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ pertencem ao gráfico de g. Recorde-se que $\sqrt{2} \approx 1.41$, o que para esboçar um gráfico é uma aproximação suficiente.

Marcando os pontos num referencial e unindo-os por uma curva, obtemos o gráfico seguinte.



2. Seja agora f a função definida pela expressão $f(x) = x^3 - 3x$. Começamos novamente por tabelar alguns valores desta função.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-18	-2	2	0	-2	2	18

De acordo com a tabela, esta função tem uma propriedade um pouco diferente da anterior: o seu valor num ponto x é simétrico do seu valor no ponto simétrico $-x$. Vamos novamente verificar que tal se passa em geral:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -\left(x^3 - 3x\right) = -f(x) .$$

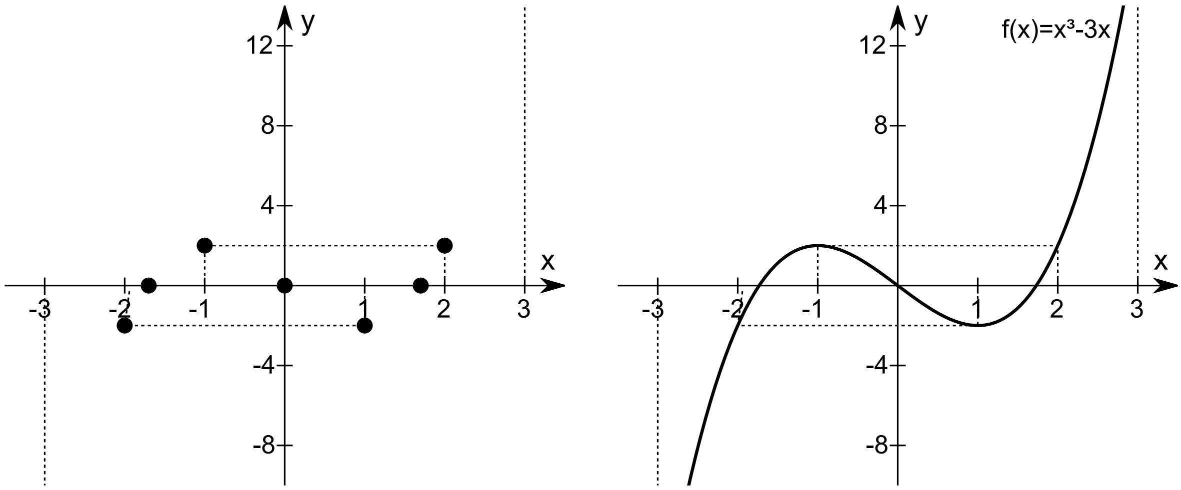
Uma função com esta propriedade diz-se uma *função ímpar*. Em termos geométricos, isto significa que o gráfico de f é simétrico, mas agora em relação à origem: os pontos do gráfico correspondentes a x e $-x$ estão à mesma distância do eixo vertical (um para cada lado) e à mesma distância do eixo vertical (um para cada lado).

O valor desta função em 0 é 0, mas o seu gráfico tem mais intersecções com o eixo horizontal. Resolvendo a equação $f(x) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^3 - 3x = 0 \iff x\left(x^2 - 3\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}\,, \end{aligned}$$

donde os pontos $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ também pertencem ao gráfico de f. Recorde-se que $\sqrt{3} \approx 1.7$.

Marcando os pontos num referencial e unindo-os por uma curva, obtemos o gráfico seguinte.



3. Vamos agora ver uma função mais complexa: a função f que está definida pela expressão $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Esta função está definida para $x \neq 0$, uma vez que não podemos calcular o valor $\frac{1}{0}$. Podemos também observar que

$$f(-x) = 2(-x) + \frac{1}{-x} = -2x - \frac{1}{x} = -f(x)\,,$$

donde a função é ímpar. Assim, basta-nos esboçar o gráfico para x positivo e completá-lo de forma simétrica para x negativo.

Temos também que

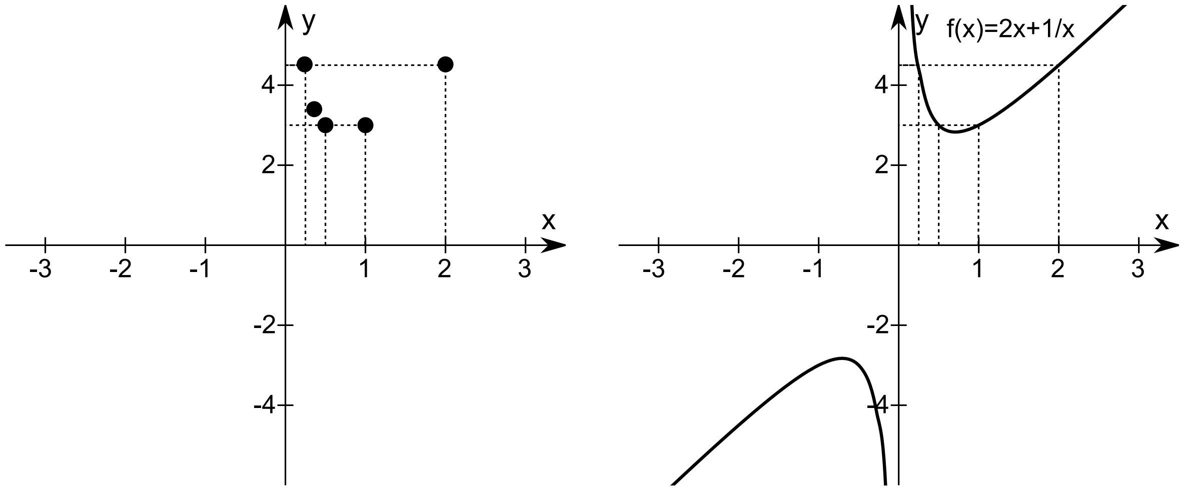
$$f(x) = 0 \iff 2x + \frac{1}{x} = 0 \implies 2x^2 + 1 = 0$$

o que é impossível; então o gráfico desta função não tem pontos sobre o eixo horizontal.

Vamos tabelar alguns valores de f para argumentos positivos. Observe-se que à medida que o argumento se aproxima de 0, o valor da função cresce sem limite, pois a parcela $\frac{1}{x}$ vai tomando valores cada vez maiores; convém por isso incluir na tabela alguns valores próximos de 0, para podermos perceber melhor o comportamento da função.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{3}$	3	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{19}{3}$

Vejamos então o gráfico de f, não esquecendo que para $x < 0$ ele é simétrico em relação à origem.



O traçado deste gráfico já não é tão simples como os anteriores. Por um lado, seria útil saber por exemplo as coordenadas do ponto em que f atinge o seu valor mínimo; por outro, a função parece aproximar-se duma recta vertical quando x se aproxima de 0 e de uma recta oblíqua quando x aumenta ou diminui. Veremos mais adiante como estudar formalmente estas propriedades e obter representações gráficas mais precisas desta função.

4. Para terminar, seja h a função definida pela expressão $h(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Esta função está definida para $x \neq 2$, já que para $x = 2$ temos novamente problemas em efectuar a divisão na expressão de $h(x)$.

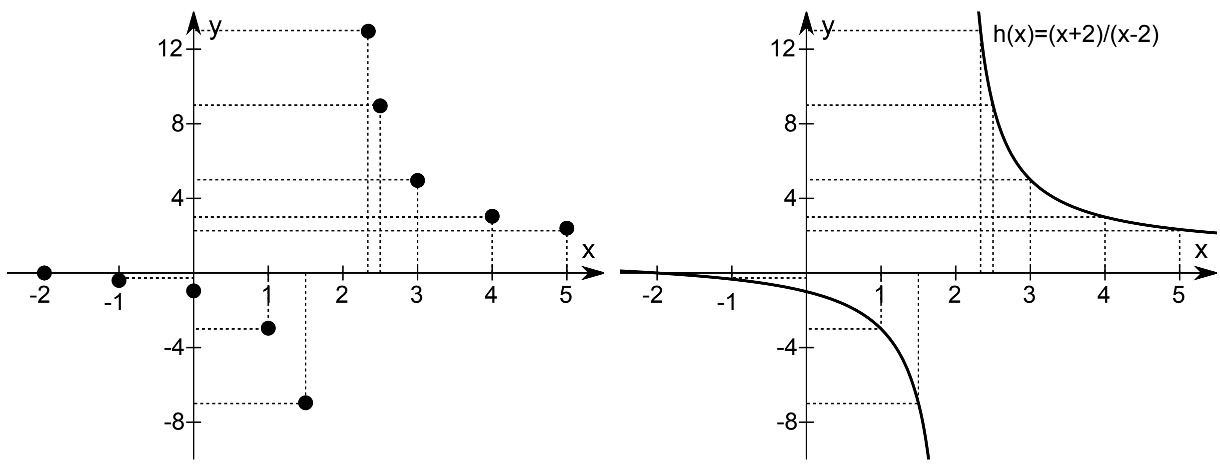
   Avaliando $h(-x)$, obtemos $h(-x) = \frac{-x+2}{-x-2}$, que não corresponde nem a $h(x)$ nem a $h(-x)$; assim, esta função não é par nem ímpar. Na realidade, o seu gráfico possui simetrias, mas não são facilmente determináveis.

   Tal como atrás, vamos tabelar valores de h tendo o cuidado de escolher bastantes valores próximos de 2: perto deste ponto os valores de $h(x)$ crescem muito rapidamente, pelo que convém conhecer mais pontos para ter uma melhor ideia do comportamento do gráfico.

x	-2	-1	0	1	3	4	5
$h(x)$	0	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$\frac{7}{3}$

x	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{2}$
$h(x)$	-7	-11	-15	17	13	9

   O gráfico da função h tem então o seguinte aspecto.



Exercício 2. Seguindo o método usado nos exemplos acima, esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x) = 3x + 2$ (b) $f(x) = (2x + 1)(x - 1)$ (c) $f(x) = \frac{3}{x}$

Um dos objectivos desta disciplina é ser capaz de traçar com rigor gráficos de funções recorrendo às técnicas da Análise Matemática. Para muitos casos simples, contudo, o traçado do gráfico pode ser feito simplesmente recorrendo a conhecimentos prévios sobre o tipo de função com que estamos a lidar. Ao longo desta secção, vamos discutir algumas famílias de funções comuns e como esboçar rapidamente o seu gráfico.

Funções constantes. Suponhamos que f é uma função tal que $f(x)$ toma sempre o mesmo valor. Chamando a a esse valor, temos que os pontos do gráfico de f estão todos à mesma altura — a altura correspondendo ao ponto a sobre o eixo dos y. Então o gráfico de f é uma recta horizontal, que está acima do eixo horizontal se $a > 0$, abaixo desse eixo se $a < 0$ e coincidente com o eixo se $a = 0$ (Figura 2.2).

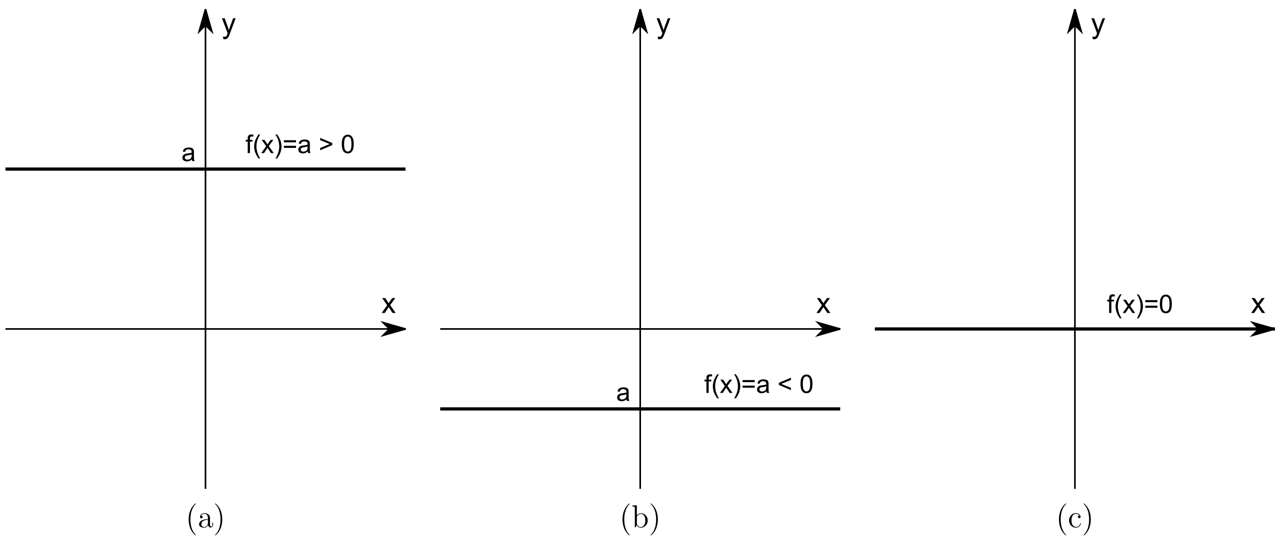


Figura 2.2: Gráfico da função $f(x) = a$ com $a > 0$ (a), com $a < 0$ (b) e $a = 0$ (c).

Funções afim. Uma classe muito importante de funções é a daquelas em que o valor varia em proporção directa com o argumento, eventualmente acrescida de uma parcela constante. Este tipo de funções ocorre muitas vezes na vida real. Por exemplo: os impostos são tipicamente calculados como uma percentagem fixa dum valor base (dando origem a uma relação do estilo $I = k \times V$, onde I é o valor do imposto a pagar, V o valor base e k a taxa de imposto), eventualmente reduzido duma parcela fixa (e agora a relação é do estilo $I = k \times V - A$, onde A é a parcela a abater). Também referimos o exemplo dos preços dos produtos vendidos a granel, que são obtidos multiplicando o argumento (peso do produto) pelo preço por unidade. Na Física, muitas relações básicas são desta forma, como por exemplo a primeira lei de Newton para o movimento: $F = m \times a$, em que F corresponde à força exercida sobre um corpo, m a massa desse corpo e a a aceleração que lhe é incutida.

Genericamente, estamos a tratar de funções com uma expressão do tipo $f(x) = Ax + B$, onde os parâmetros A e B são constantes. Estas funções são conhecidas como *funções afim* ou *funções lineares*; uma das grandes vantagens de trabalhar com funções lineares é a simplicidade dos cálculos — que leva a que haja outros contextos em que é útil *aproximar* funções por funções afim.

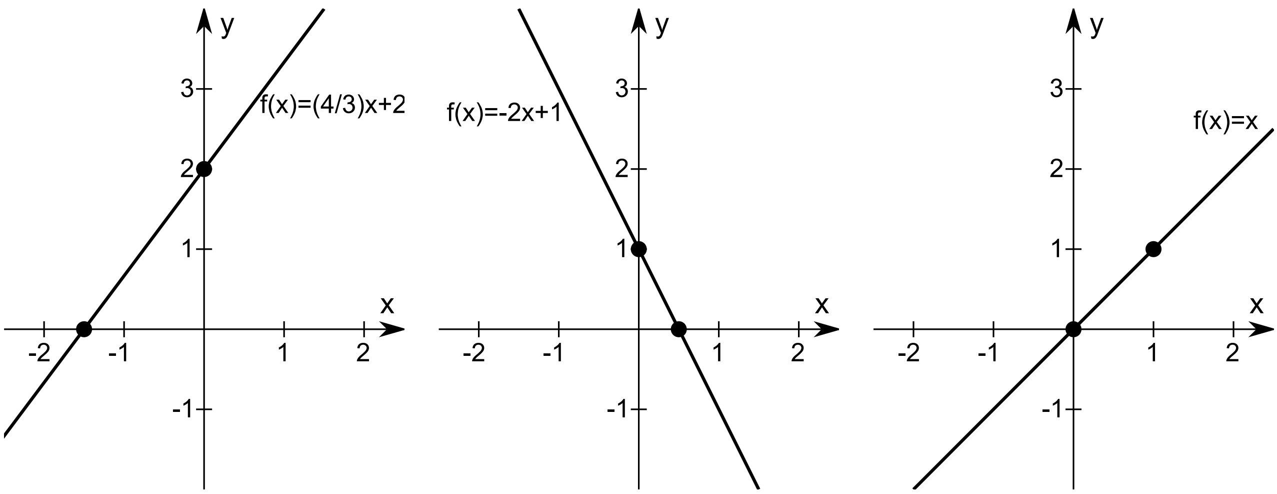
Em termos gráficos, estas funções são muito simples. Dados dois pontos x_0 e x_1, temos que a diferença

$$f(x_1) - f(x_0) = (Ax_1 + B) - (Ax_0 + B) = A(x_1 - x_0)$$

é directamente proporcional à diferença $x_1 - x_0$; isto significa que quando andamos k unidades no argumento da função, o valor desta varia sempre de Ak unidades. O gráfico é então uma linha recta.

Para traçar uma recta, basta encontrar dois pontos por onde ela passe. Fazendo $x = 0$, obtemos $f(0) = B$, donde $(0, B)$ é um ponto da recta. Fazendo $f(x) = 0$, obtemos $x = -\frac{B}{A}$, donde $\left(-\frac{B}{A}, 0\right)$ é outro. Obtemos assim uma forma expedita de traçar gráficos de funções lineares: basta marcar aqueles dois pontos sobre os eixos e traçar a recta. A única excepção ocorre se $B = 0$ (em que ambos os pontos são a origem); mas aí qualquer outro valor de x nos permite obter um ponto — por exemplo, $(1, A)$.

A Figura 2.3 ilustra alguns exemplos de gráficos de funções traçados desta forma.



(a) (b) (c)

Figura 2.3: Gráficos de funções afim.

Exercício 3. Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x) = x - 2$ (b) $f(x) = 2x + 1$ (c) $g(x) = -2x$ (d) $g(x) = -\frac{x}{2} + 2$

Funções quadráticas. A outra classe importante de funções para conhecer nesta fase são as quadráticas: funções cuja expressão é um polinómio de segundo grau. Os gráficos destas funções são curvas, conhecidas como *parábolas*, que são importantes em diversas aplicações (nomeadamente em telecomunicações) devido às suas propriedades geométricas.

As parábolas são curvas que têm sempre um eixo de simetria, embora não sejam necessariamente gráficos de funções pares. Já vimos atrás um exemplo (a função definida por $g(x) = x^2 - 2$); de um modo geral, as parábolas são sempre curvas com a mesma forma do que aquela função. Os parâmetros que variam de função para função são: a orientação (se a abertura da parábola está virada para cima ou para baixo); a posição relativamente aos eixos (mais para a esquerda ou mais para a direita, mais para cima ou mais para baixo); e a abertura da parábola. A Figura 2.4 mostra vários exemplos de parábolas.

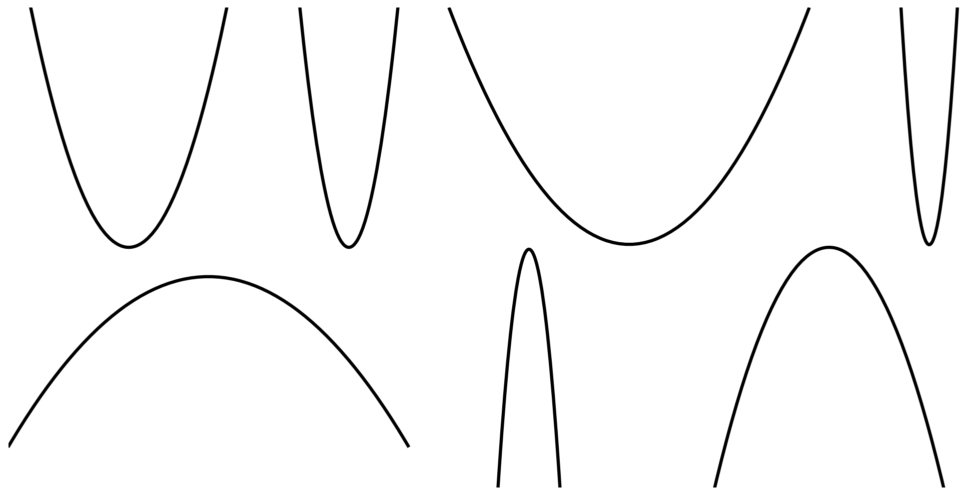


Figura 2.4: Exemplos de parábolas.

Para desenhar o gráfico duma função quadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, basta em geral analisar três parâmetros.

(a) Sinal: a orientação da parábola apenas depende do sinal do coeficiente A do termo de segundo grau. De facto, de forma análoga ao que já vimos no capítulo anterior, quando o valor de x aumenta o termo x^2 domina; uma vez que este é sempre positivo, a função terá valores cada vez maiores quando x aumenta se $A > 0$ e valores cada vez menores se $A < 0$. Por simetria, o comportamento quando x diminui é similar.

(b) Zeros: a função intersecta o eixo quando $f(x) = 0$, o que neste caso corresponde a

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\,.$$

Estes dois pontos — se a expressão denotar um número real — são dois pontos do gráfico.

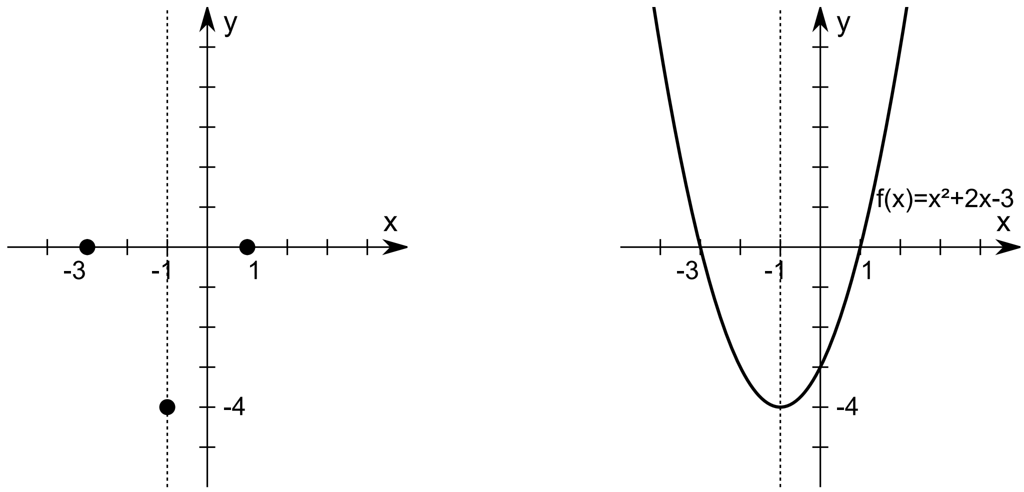
(c) Vértice: por simetria, o ponto médio das raízes é precisamente o eixo de simetria da parábola. Ora neste ponto x tem o valor $-\frac{B}{2A}$. Assim, a recta vertical passando por esse ponto é o eixo de simetria e o valor de f nesse ponto é o mínimo ou máximo absoluto da função.

Nalguns casos, ou porque não há raízes ou porque o vértice da função está sobre o eixo horizontal, é preciso determinar mais alguns pontos; nesse caso, como habitualmente, o mais simples é avaliar f em dois pontos próximos do eixo.

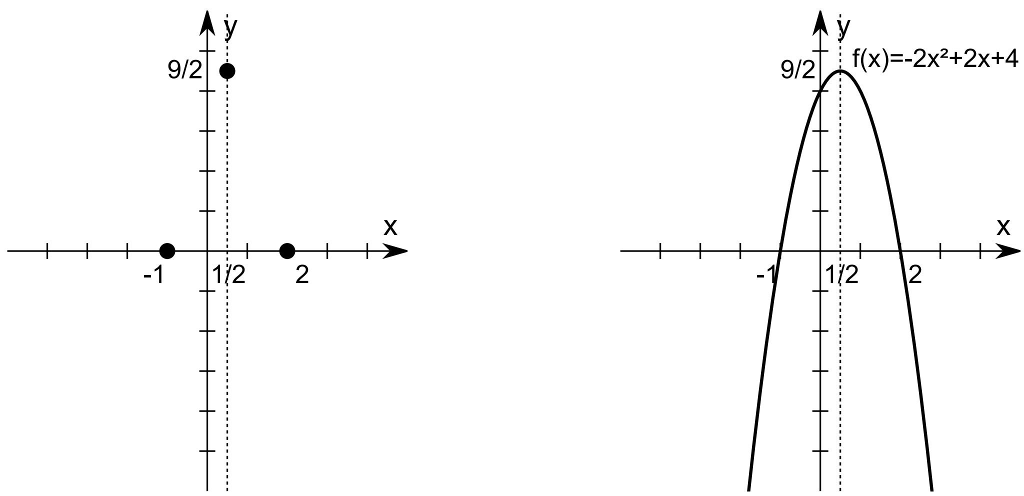
Vejamos alguns exemplos.

Exemplo.

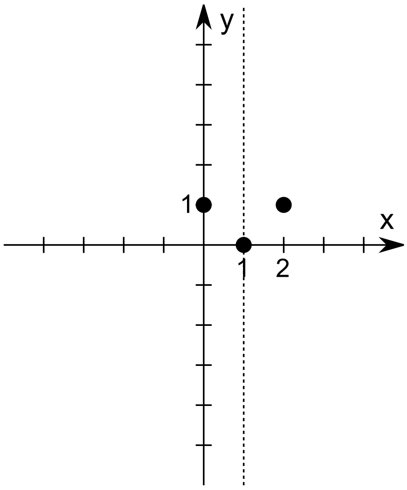
1. Comecemos por estudar a função $f(x) = x^2 + 2x - 3$. O coeficiente de x^2 é 1, pelo que o gráfico de f é uma parábola com concavidade virada para cima; as raízes de f são
$$x = -1 \pm \sqrt{1+3} \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3$$
e o eixo de simetria é $x = -\frac{2}{2\times 1} = -1$, sendo o mínimo da função atingido neste ponto: $f(-1) = -4$. Com esta informação, conseguimos desenhar o gráfico de f facilmente.

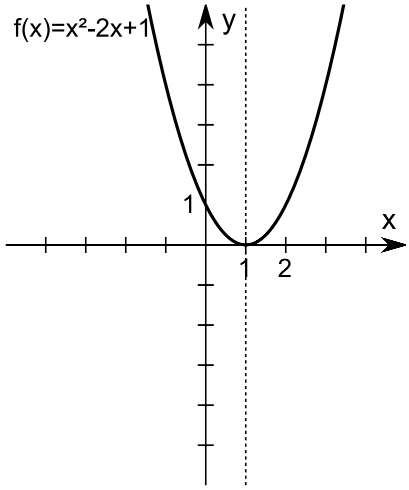


2. Consideremos agora a função $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$. O coeficiente de x^2 é -2, pelo que o gráfico de f é agora uma parábola com concavidade virada para baixo. As raízes de f são
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Longleftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$
e o eixo de simetria é $x = -\frac{2}{2\times(-2)} = \frac{1}{2}$; o máximo de f é $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$. Com esta informação, conseguimos novamente desenhar o gráfico de f sem dificuldades.



3. Vamos agora desenhar o gráfico a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Trata-se novamente duma parábola virada para cima; porém, o seu eixo de simetria é $x = -\frac{-2}{2\times 2} = 1$, e se calcularmos o valor de $f(1)$ obtemos $f(1) = 0$. Para conseguir desenhar a parábola precisamos de mais informação sobre a sua abertura; calculando os valores de f em 0 e em 2, obtemos $f(0) = 1 = f(2)$; e com esta informação já conseguimos desenhar o gráfico da função.

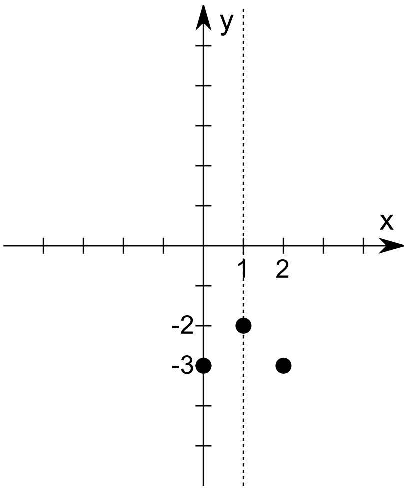


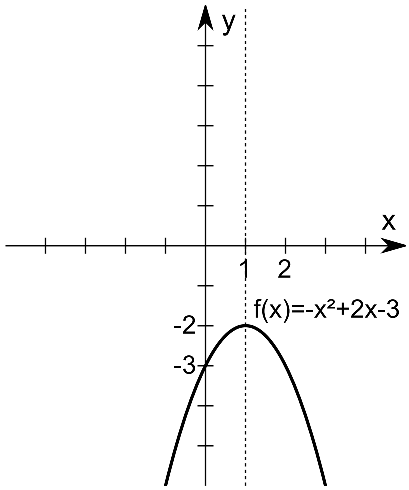


4. Finalmente, vejamos o que se passa com a função $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. O coeficiente de x^2 é -1, pelo que o gráfico de f é uma parábola com concavidade virada para baixo; e o eixo de simetria de f é $x = -\frac{2}{2\times(-1)} = 1$; ora $f(1) = -2$, e sendo este o máximo absoluto da função concluímos que esta parábola não intersecta o eixo horizontal. De facto, se aplicássemos a fórmula resolvente para obter as raízes de f, encontraríamos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-3}}{-1}$$

que não denota nenhum número real. Tal como atrás, para estimar a abertura da parábola vamos tomar dois pontos próximos do eixo de simetria. Calculando $f(0)$ e $f(2)$, obtemos $f(0) = -3 = f(2)$; e podemos novamente desenhar o gráfico de f sem mais.





Exercício 4. Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x) = -2x^2 + 8$

(b) $g(x) = -x^2 - x$

(c) $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$

(d) $h(x) = 3x^2 - 2x$

(e) $f(x) = 2x^2 - 1$

(f) $g(x) = x^2 + 3$

(g) $g(x) = x^2 - 2x - 1$

(h) $f(x) = -x^2 - x - 1$

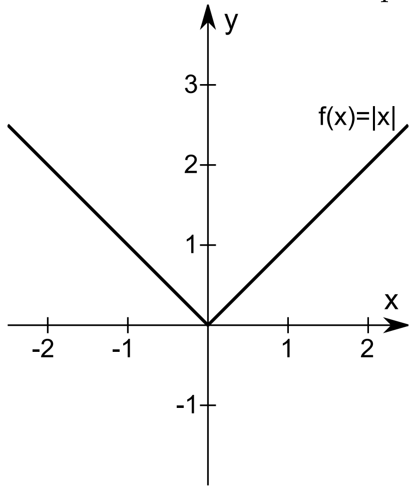
(i) $h(x) = x^2 - 10x + 25$

Função módulo. Uma função um pouco diferente destas é a função módulo ou valor absoluto. O valor absoluto dum número real corresponde à sua distância à origem; dito doutra forma, o módulo dum número obtém-se esquecendo o sinal desse número.

Formalmente, podemos definir o módulo dum número x da seguinte forma.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vemos portanto que esta função se comporta como uma função afim em qualquer dos casos; o seu gráfico é então composto por duas semi-rectas: uma à esquerda da origem, outra à direita.



Exercício 5. Como será o gráfico da função $f(x) = |2x|$? E o de $g(x) = |x - 1|$?

Função potência. O estudo de polinómios de grau superior a 2 já requer o recurso às técnicas que estudaremos adiante. Porém, o caso das funções x^n é simples de compreender e útil.

Quando temos uma função definida por $f(x) = x^n$, com n um inteiro positivo superior a 2, o gráfico assemelha-se a uma parábola, mas mais plana entre -1 e 1 e mais vertical fora desse intervalo. No caso de n ser par, temos uma função par; no caso de n ser ímpar, temos uma função ímpar — e portanto em vez de termos uma curva virada para cima ou virada para baixo, temos os dois comportamentos de cada lado da origem (ver Figura 2.5).

Funções recíprocas. Outro tipo de curva que surge com muita frequência em aplicações à Física e à Engenharia é a hipérbole. Esta curva é mais uma vez um gráfico duma função: a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

O comportamento desta função é relativamente simples de compreender. Em primeiro lugar, ela está definida para $x \neq 0$. Também é simples ver que se trata duma função ímpar. Pensando em valores posivitos do seu argumento, quando $x = 1$ a função também vale 1. Para valores menores do argumento, ela cresce muito rapidamente, aumentando ilimitadamente quando x se aproxima de 0. Quando o valor do argumento aumenta além de 1, a função toma valores cada vez mais próximos de 0.

Tabelando alguns valores desta função, podemos verificar este comportamento e esboçar o seu gráfico, que se encontra na Figura 2.6.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$1/x$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

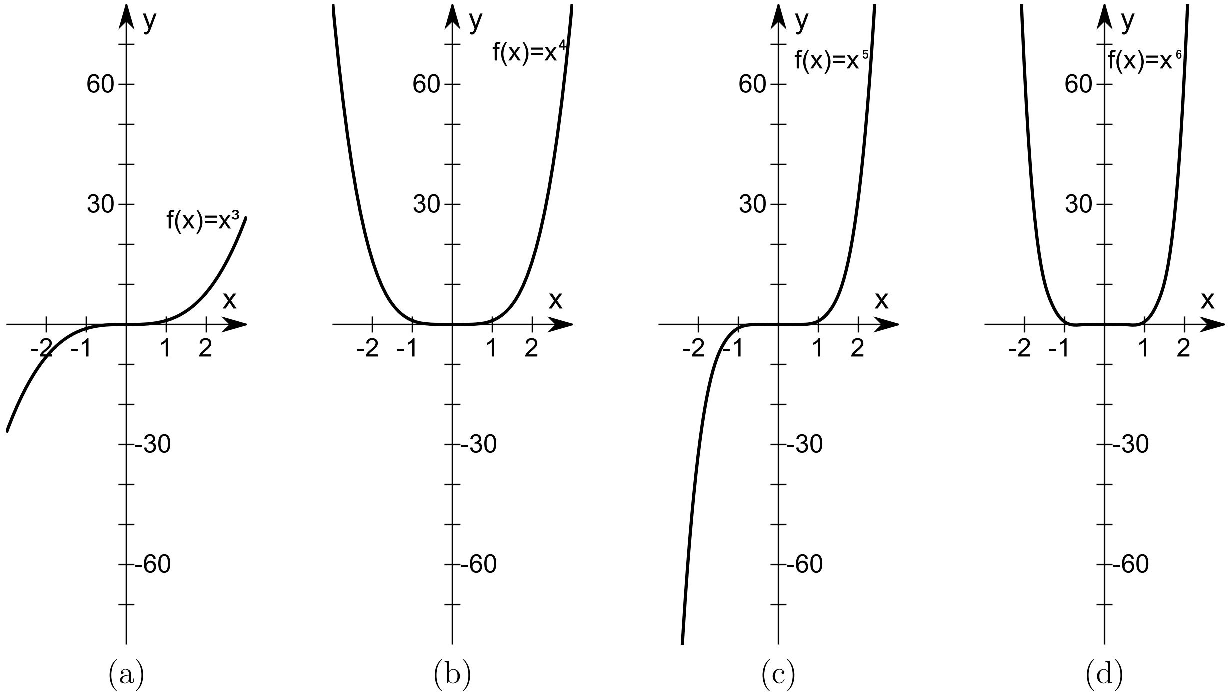


Figura 2.5: Gráficos de (a) $f(x) = x^3$, (b) $f(x) = x^4$, (c) $f(x) = x^5$ e (d) $f(x) = x^6$. Observe-se que as curvas se assemelham a parábolas, sucessivamente mais fechadas.

Quando consideramos funções em que o expoente de x é mais elevado, como $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ou $g(x) = \frac{1}{x^3}$, acontece um fenómeno semelhante ao caso anterior: a curva aproxima-se do eixo horizontal e afasta-se do eixo vertical, sofrendo uma inflexão mais brusca perto do ponto $(1, 1)$. Tal como atrás, a função é par ou ímpar de acordo com o expoente de x. A Figura 2.7 mostra mais alguns exemplos.

Funções definidas por ramos. Em muitas situações, as funções não são definidas por uma única expressão em todo o seu domínio. Vimos já um exemplo duma função deste estilo — a função módulo, cuja regra de cálculo é diferente consoante o seu argumento é positivo ou

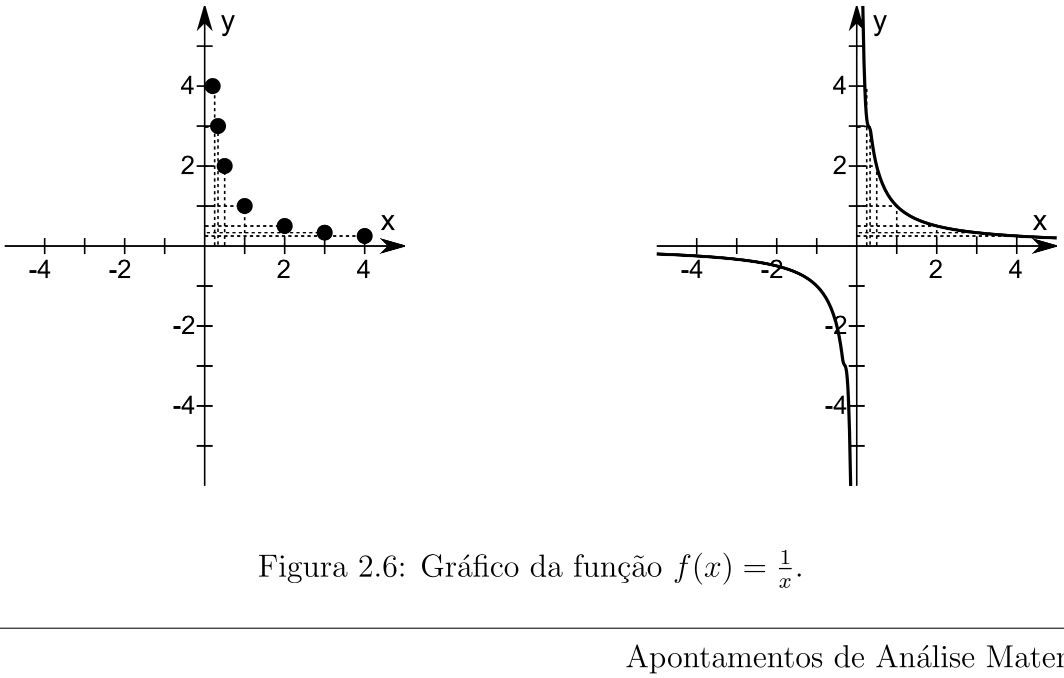
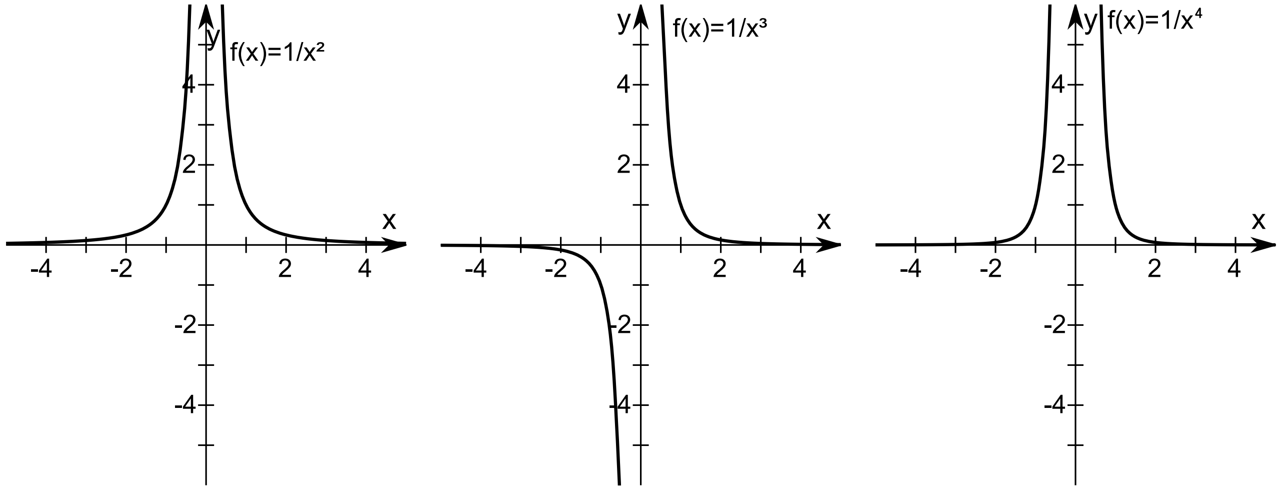


Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.



(a) (b) (c)

Figura 2.7: Gráficos de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (a), $f(x) = \frac{1}{x^3}$ (b) e $f(x) = \frac{1}{x^3}$ (c).

negativo. Estas funções dizem-se *funções definidas por ramos*.

Um exemplo bastante simples duma função definida por ramos é a função de cálculo do IRS: consoante o valor do rendimento dum contribuinte, é-lhe atribuído um escalão; a percentagem de imposto a pagar (ou seja, a regra que determina o valor da função) depende desse escalão.

Outro exemplo também bastante comum é o preço de serviços como fotocópias, cujo preço unitário diminui com a quantidade. Mais uma vez, é preciso olhar primeiro para o valor do argumento para saber como calcular a função.

Tipicamente, as funções definidas por ramos apresentam-se com uma chaveta agrupando as diferentes expressões para cada ramo, juntamente com a indicação dos valores do argumento para que são válidas. Exemplos de funções deste tipo são as funções f, g e h abaixo definidas.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2x-1 & x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2-2 & x \leq 1 \\ x-2 & x > 1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 3 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x \leq 2 \\ 4-x & x > 2 \end{cases}$$

Para traçar o gráfico de funções definidas por ramos, apenas é preciso desenhar o gráfico da função que define cada ramo no intervalo respectivo. Nos pontos limite, é tradição assinalar com uma bola ($\bullet$) o ramo que contém o limite e com um círculo aberto ($\circ$) o ramo que não contém o limite. A Figura 2.8 apresenta os gráficos das três funções acima definidas.

Nesta altura, a construção destes gráficos deve ser já uma tarefa relativamente mecânica.

Exercício 6. Esboce os gráficos das seguintes funções definidas por ramos.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 3 \\ 3 & x > 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases}$

(c) $g(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$

(d) $g(x) = \begin{cases} |x| & x < 1 \\ x^2-2x & x \geq 1 \end{cases}$

(e) $h(x) = \begin{cases} x-2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 4 \\ x-4 & x > 4 \end{cases}$

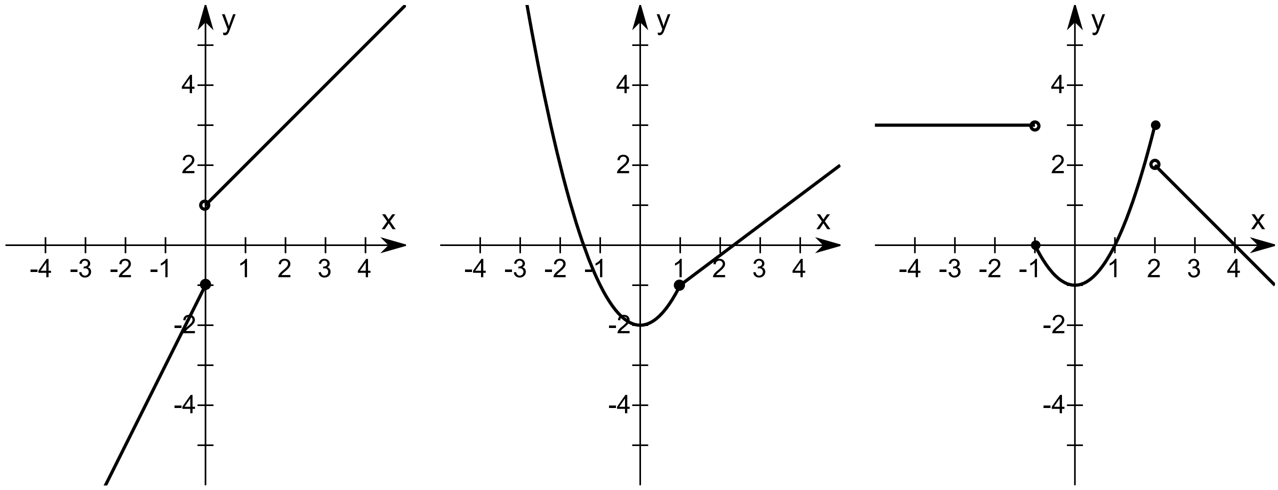
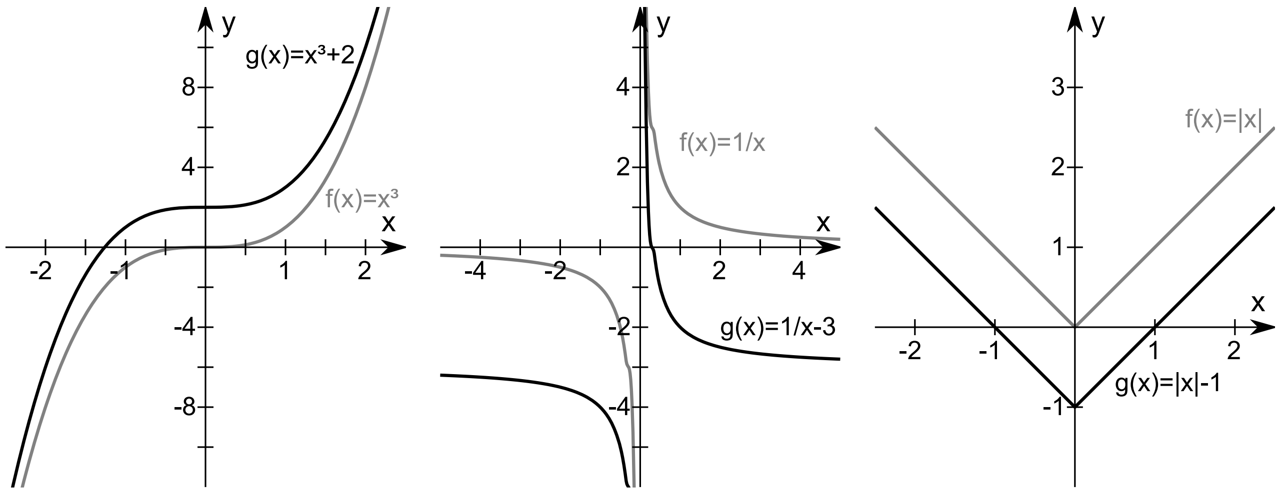


Figura 2.8: Exemplo de três funções definidas por ramos.

Translações. Para terminar, vamos ver duas operações sobre funções que têm um significado gráfico muito simples.

Consideremos duas funções f e g tais que $g(x) = f(x) + k$, para todo o valor de x, sendo k um real fixo. Graficamente, significa isto que todos os pontos do gráfico de g estão k unidades acima (ou abaixo, se k for negativo) do ponto correspondente do gráfico de f. Então, o gráfico de g pode ser obtido deslocando verticalmente o gráfico de f.

Por exemplo: para obter o gráfico da função $g(x) = x^3 + 2$, vamos partir do gráfico de $f(x) = x^3$, que já construímos atrás, e deslocá-lo duas unidades para cima (Figura 2.9 (a)); para construir o gráfico de $g(x) = \frac{1}{x} - 3$, deslocamos o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ três unidades para baixo (Figura 2.9 (b)); e para obter o gráfico de $g(x) = |x| - 1$ vamos deslocar o gráfico de $f(x) = |x|$ uma unidade para baixo (Figura 2.9 (c)).



(a) (b) (c)

Figura 2.9: Gráficos de funções obtidas por translação na vertical.

A segunda transformação é também uma translação, mas na direcção horizontal, e ocorre quando duas funções f e g satisfazem a relação $g(x) = f(x + k)$. Neste caso, se (x, y) for um ponto do gráfico de f, então o gráfico de g tem um ponto $(x - k, y)$: o valor de g em $(x - k)$

corresponde precisamente ao valor de f em $(x-k)+k=x$. Uma vez que isto se passa para todos os pontos do gráfico, conclui-se que o gráfico de g corresponde ao gráfico de f deslocado k unidades para a esquerda (ou para a direita, se k for negativo).

Vejamos alguns exemplos. Se tomarmos $g(x)=(x+2)^3$, temos que $g(x)=f(x+2)$ para $f(x)=x^3$; então o gráfico de g obtém-se por translação do gráfico de f duas unidades para a esquerda (Figura 2.10 (a)). Para $g(x)=\frac{1}{x-3}$, temos a relação $g(x)=f(x-3)$ com $f(x)=\frac{1}{x}$, pelo que vamos deslocar o gráfico daquela função três unidades para a direita (Figura 2.10 (b)). Finalmente, o gráfico de $g(x)=|x-1|$ obtém-se deslocando o gráfico de $f(x)=|x|$ uma unidade para a direita (Figura 2.10 (c)).

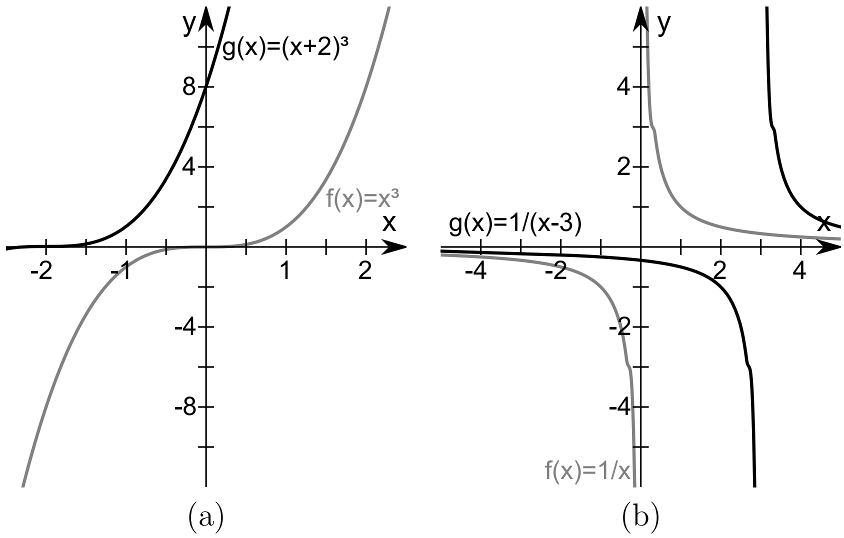


Figura 2.10: Gráficos de funções obtidas por translação na horizontal.

Estas operações podem ser úteis para construir gráficos de funções mesmo em situações em que poderíamos utilizar outras técnicas. Por exemplo, os gráficos construídos acima de $g(x)=x^2-2$ e $f(x)=x^2-2x+1$ poderiam ambos ter sido desenhados como translações do gráfico de $h(x)=x^2$: de facto, tem-se $g(x)=h(x)-2$ e $f(x)=(x+1)^2=h(x+1)$. Deixa-se ao cuidado do leitor verificar que os gráficos anteriormente obtidos são de facto os mesmos que se encontrariam por este processo.

Também há funções que combinam as duas formas de translação. Por exemplo, o gráfico de $g(x)=3+\frac{1}{x+2}$ pode-se obter a partir do gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$ deslocando este duas unidades para a esquerda (obtendo-se $h(x)=\frac{1}{x+2}$) e depois três para cima. Com um pouco de prática, o número de funções cujos gráficos se conseguem desenhar rapidamente aumenta bastante.

Exercício 7. Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x)=x^4-2$

(b) $f(x)=|x-1|+2$

(c) $g(x)=1+\frac{1}{x}$

(d) $g(x)=(x+1)^3-2$

(e) $h(x)=2+\frac{1}{x^2}$

(f) $h(x)=|x|-2$

2.3 Introdução ao estudo de funções

Nesta secção vamos introduzir os conceitos essenciais do estudo de funções. Mais adiante discutiremos as ferramentas da Análise Matemática que nos permitem estudar estas e outras propriedades de forma sistemática; porém, muitas delas possuem um significado físico que é muito claramente interpretável em termos de gráficos. Assim, vamos ver como podemos determiná-las, ainda que informalmente e por vezes sem o mais completo rigor, a partir da análise de gráficos de funções.

Onde for possível, apresentaremos desde já os métodos mais formais para resolver os mesmos problemas.

2.3.1 Domínio e contradomínio

Vamos agora debruçar-nos um pouco mais sobre a questão da determinação de domínios e contradomínios de funções. Recordemos as definições destes conceitos.

Definição. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. O *domínio* de f é o conjunto D_f dos valores de x para os quais é possível calcular o valor de $f(x)$.

O *contradomínio* de f, ou *imagem* de f, é o conjunto $f(\mathbb{R})$ de todos os valores de $f(x)$. Uma função diz-se *sobrejectiva* se o seu contradomínio for o conjunto $\mathbb{R}$.

A notação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ significa que f é uma função que recebe como argumento um número real e devolve como resultado outro número real. Em geral, a notação $f : A \to B$ indica que f recebe argumentos de A e devolve resultados em B; assim, por exemplo, uma sucessão u pode ser vista como uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

As determinações do domínio e contradomínio duma função fazem-se de forma bastante diferente. O domínio é normalmente determinado por via analítica; o contradomínio é determinado por via gráfica.

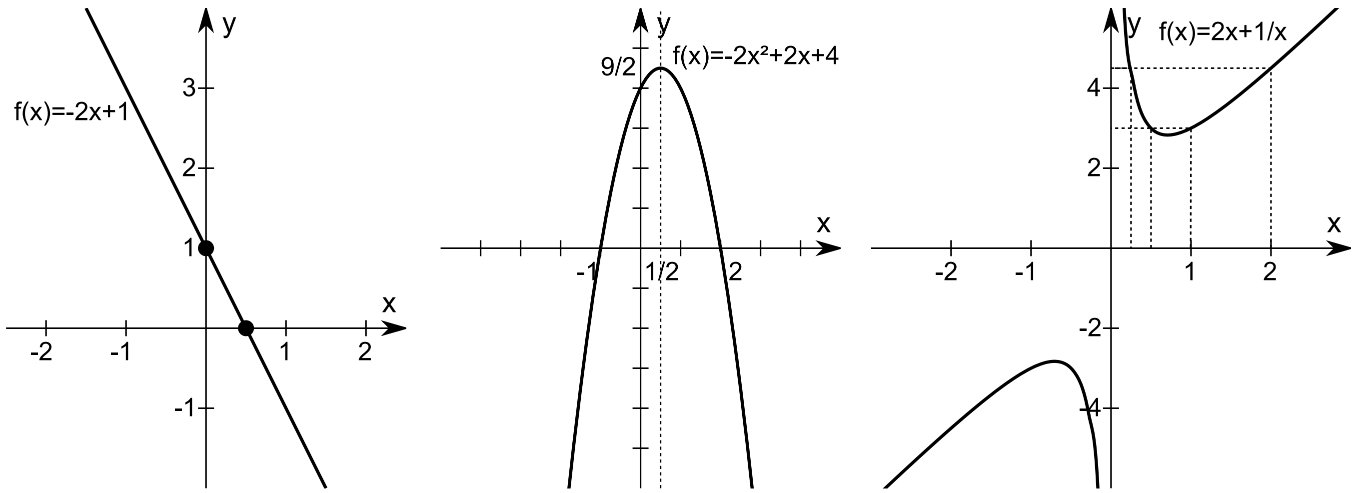
Comecemos pelo contradomínio. O gráfico de f é composto pelos pontos $(x, f(x))$, ou seja, por pontos cuja abcissa (primeira coordenada) é um elemento do domínio de f e cuja ordenada (segunda coordenada) é um elemento do contradomínio de f. Então o contradomínio de f é precisamente o conjunto dos valores de y para os quais há um ponto no gráfico de f. Por outras palavras, se "espalmarmos" o gráfico de f na vertical, o seu contradomínio é a parte do eixo dos yy que fica coberto pelo gráfico "espalmado".

A Figura 2.11 mostra os gráficos de algumas funções que já vimos anteriormente.

O gráfico da função $f(x) = 2x - 1$ é uma recta oblíqua. Isto significa que para cada valor de y é possível determinar um ponto (x, y) no gráfico de f. Então o contradomínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais; em particular, f é sobrejectiva.

O segundo gráfico já é um pouco diferente. Trata-se da função $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$, que corresponde a uma parábola virada para baixo. O gráfico desta função passa por todos os valores de y menores que $\frac{9}{2}$ (o máximo da função) mas não atinge nenhum valor superior a este; o contradomínio de f é então o conjunto dos números reais menores ou iguais a $\frac{9}{2}$, denotado por $\left]-\infty, \frac{9}{2}\right]$, e f não é sobrejectiva.

O terceiro gráfico corresponde à função $f(x) = 2x + 1/x$. Neste caso, vemos que os valores da função começam por crescer até cerca de -3, mas depois a função atinge um máximo e o seu gráfico torna-se uma curva descendente; quando o argumento é positivo, a função começa por decrescer até um pouco abaixo de 3, atingindo um mínimo e voltando a subir. Para os valores de y próximos de 0, não há nenhum ponto no gráfico de f.



(a) (b) (c)

Figura 2.11: Determinação do contradomínio duma função a partir do seu gráfico.

Neste caso não conseguimos escrever explicitamente o contradomínio de f, pois não conhecemos exactamente os valores em que a função tem extremos; mais adiante veremos como os podemos determinar exactamente. Podemos, contudo, afirmar que f não é sobrejectiva.

Exercício 8. A partir dos gráficos das seguintes funções, construídos anteriormente, indique os seus contradomínios. Quais destas funções são sobrejectivas?

(a) $f(x) = (2x+1)(x-1)$ (b) $g(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = |x| - 2$

Antes de prosseguir, convém rever alguma notação para conjuntos de números reais. Já vimos anteriormente que o símbolo $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais; por vezes também se usam os símbolos $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ para denotar os conjuntos dos reais positivos e negativos, respectivamente.

Uma notação mais geral é a notação de *intervalo*. Um intervalo corresponde a um conjunto de reais entre dois limites. Existem nove tipos de intervalos, correspondendo às diferentes

Intervalo	Significado	Descrição
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$	Valores entre a e b (inclusivé)
$[a,b[$	$a \leq x < b$	Valores entre a (inclusivé) e b (exclusivé)
$]a,b]$	$a < x \leq b$	Valores entre a (exclusivé) e b (inclusivé)
$]a,b[$	$a < x < b$	Valores entre a e b (exclusivé)
$[a,+\infty[$	$a \leq x$	Valores maiores ou iguais a a
$]a,+\infty[$	$a < x < b$	Valores estritamente maiores que a
$]-\infty,b]$	$x \leq b$	Valores menores ou iguais a b
$]-\infty,b[$	$x < b$	Valores estritamente menores que b
$]-\infty,+\infty[$	$\mathbb{R}$	Todos os números reais

Tabela 2.1: Tipos de intervalos de números reais.

combinações possíveis: incluindo ou não o extremo inferior ou superior, limitado ou ilimitado inferior ou superiormente, resumidos na Tabela 2.1.

Também é habitual chamar aos intervalos que incluem o extremo *fechados* (à esquerda ou à direita) e aos que não o incluem *abertos* (à esquerda ou à direita). Os intervalos $[a, b]$, $[a, +\infty[$ e $]-\infty, b]$ são chamados simplesmente *intervalos fechados*, enquanto os intervalos $]a, b[$, $]a, +\infty[$ e $]-\infty, b[$ são chamados *intervalos abertos*. Esta terminologia tem uma razão topológica que abordaremos mais adiante.

Para trabalhar com domínios e contradomínios de funções, é frequentemente preciso realizar operações com intervalos. As operações mais habituais entre conjuntos são:

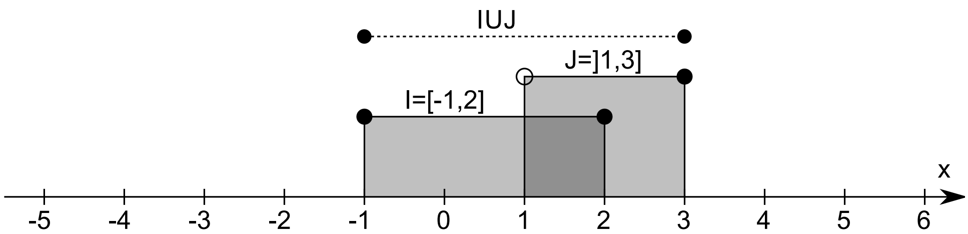
- união: $A \cup B$ contém todos os elementos de A e todos os elementos de B;
- intersecção: $A \cap B$ contém todos os elementos que estão simultaneamente em A e em B;
- diferença: $A \setminus B$ contém os elementos que estão em A mas não em B.

É habitual recorrer (mais uma vez) a uma representação gráfica para trabalhar com estas operações. Aqui, os números reais são representados por uma recta. Os intervalos assinalam-se sobre essa recta; a intersecção de intervalos corresponde à zona abrangida por ambos os intervalos em simultâneo, a união à zona abrangida por qualquer deles e a diferença à zona abrangida por um mas não pelo outro. Vejamos alguns exemplos.

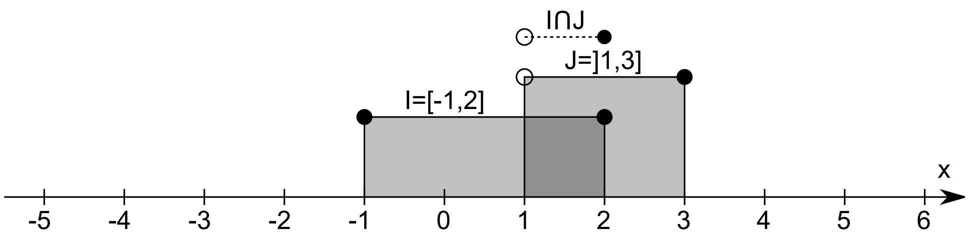
Exemplo.

1. Para calcular $[-1, 2] \cup]1, 3]$, começamos por assinalar os dois intervalos sobre a recta real. Tal como atrás, usamos uma bola ($\bullet$) para indicar que o extremo pertence ao intervalo e um círculo aberto ($\circ$) para indicar que não pertence.

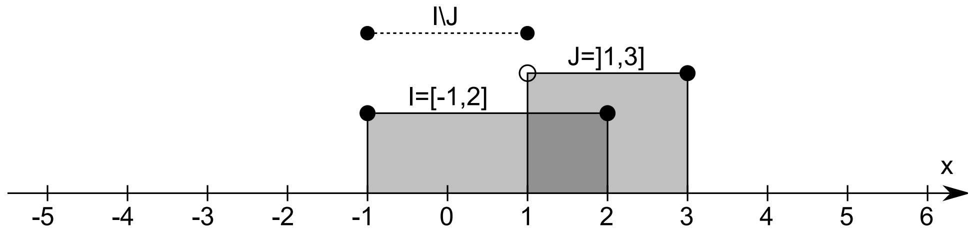
   A união dos dois intervalos corresponde a toda a região sombreada, ou seja, ao intervalo $[-1, 3]$.



2. Para calcular $[-1, 2] \cap]1, 3]$, assinalamos como atrás os dois intervalos sobre a recta real. A união dos dois intervalos corresponde à região assinalada com o sombreado mais escuro, ou seja, ao intervalo $]1, 2]$.



3. Para calcular $[-1, 2] \setminus]1, 3]$, assinalamos novamente os dois intervalos sobre a recta real. A diferença entre os dois intervalos corresponde à região no sombreado mais claro correspondente apenas ao intervalo $[-1, 2]$, ou seja, ao intervalo $[-1, 1]$.



É importante saber realizar estas operações porque na determinação de domínios de funções surgem quase sempre intersecções e, por vezes, uniões e diferenças de intervalos. Neste ponto, os problemas que surgem são relativamente simples; porém, à medida que formos introduzindo funções mais complexas no nosso repertório, o problema do cálculo de domínios pode começar também a ser mais complicado.

Exercício 9. Determine o conjunto designado pelas seguintes expressões.

(a) $[-2,2] \cup [-4,3[$

(b) $]-3,2] \cap]1,5]$

(c) $]-1,1[\setminus [0,1]$

(d) $]-1,1[\cup [0,2[$

(e) $]-3,2] \cap]-1,1[$

(f) $[0,5] \setminus [2,3]$

Consideremos a função f definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. Como já sabemos, para que f esteja definida é necessário que $x \neq 3$. Em termos de conjuntos, podemos escrever

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ ou } D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[\ .$$

Suponhamos agora que tínhamos uma função g definida por $g(x) = \frac{2}{x^2-4}$. Novamente, o domínio de g é o conjunto de pontos em que $x^2 - 4 \neq 0$. Temos

$$x^2 - 4 \neq 0 \iff x^2 \neq 4 \iff x \neq \pm 2\,,$$

donde

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \text{ ou } D_g =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[\ .$$

Finalmente, uma palavra de cautela: o domínio duma função pode estar restringido por outras condições que não a sua expressão. Imaginemos que nos encontrávamos perante a seguinte definição da função h.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & 0 \leq x < 1 \\ 2 - 2x & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

A função h está definida para valores no intervalo $[0,1[$ pela expressão $h(x) = x^2 + 2$ e para valores no intervalo $[1,3]$ pela expressão $h(x) = 2 - 2x$. Para valores fora daqueles intervalos, não se pode calcular $h(x)$ pela simples razão de que não foi dada nenhuma expressão para aquela função. Neste caso, tem-se

$$D_h = [0,1[\cup [1,3] = [0,3]\,.$$

Exercício 10. Determine o domínio das seguintes funções.

(a) $f(x) = 2x - 2$

(b) $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$

(c) $g(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2+1}$

(d) $g(x) = \frac{3}{|x+1|}$

(e) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & |x| < 1 \\ \frac{x^2-3x}{2} & x > 2 \end{cases}$

Graficamente, o domínio duma função corresponde ao conjunto dos pontos no eixo horizontal que têm algum ponto do gráfico da função acima ou abaixo deles. Em geral, esta informação é determinada previamente, antes da construção do gráfico; porém, em situações em que a função é estudada a partir do seu gráfico, esta forma de determinar o seu domínio é bastante útil.

2.3.2 Monotonia, extremos e assímptotas

Desde sempre, uma das principais motivações para estudar problemas que geram funções foi resolver problemas de máximos e mínimos: descobrir o valor do argumento que torna o valor duma função tão elevado ou tão reduzido quanto possível. O estudo deste tipo de problemas foi um dos factores que esteve na origem do desenvolvimento do Cálculo Diferencial, que será o tema do Capítulo 3.

Nesta secção vamos introduzir a terminologia relevante e mostrar como estes conceitos têm um significado gráfico muito preciso, que nos permite resolver estes problemas para todas as funções que já encontrámos até agora.

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *monótona crescente* num intervalo se o seu valor aumenta ao longo desse intervalo e *monótona decrescente* se o seu valor diminui ao longo desse intervalo.

Formalmente, f é monótona crescente em $[a, b]$ se $f(x) \geq f(y)$ sempre que x e y forem dois elementos de $[a, b]$ com $x > y$; f é monótona decrescente em $[a, b]$ se $f(x) \leq f(y)$ sempre que x e y forem dois elementos de $[a, b]$ com $x > y$.

Uma função afim $f(x) = Ax + B$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$ se $A > 0$ e monótona decrescente no mesmo intervalo se $A < 0$. Já a função $f(x) = x^2$ é monótona decrescente em $]-\infty, 0]$ e monótona crescente em $[0, +\infty[$. O ponto 0, em que a função muda de comportamento, é um *extremo local*.

Definição. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um número real. Se existem números reais b e c tais que f é monótona crescente em $[b, a]$ e monótona decrescente em $[a, c]$, então o ponto a diz-se um *máximo local* de f; se existem números reais b e c tais que f é monótona decrescente em $[b, a]$ e monótona crescente em $[a, c]$, então o ponto a diz-se um *mínimo local* de f.

Um ponto a que é máximo ou mínimo local de f diz-se um *extremo relativo* de f.

Outra definição equivalente é a seguinte: a é um máximo (ou mínimo) local se existe um intervalo $]b, c[$ contendo o ponto a tal que $f(x) \leq f(a)$ (ou $f(x) \geq f(a)$) para $x \in]b, c[$.

Definição. O número real a diz-se o *máximo absoluto* de f se $f(x) \leq f(a)$ para todo o valor x no domínio de f; a diz-se o *mínimo absoluto* de f se $f(x) \geq f(a)$ para todo o valor x no domínio de f.

Um máximo ou mínimo absoluto de f diz-se um *extremo absoluto* de f.

Na prática, o termo *máximo* (ou *mínimo*) aplica-se quer ao ponto a, quer ao valor de $f(a)$. É preciso ter atenção ao contexto para clarificar a qual destes valores (em geral diferentes) é que o termo se refere.

Graficamente, estas propriedades são muito simples de observar. Uma função é monótona crescente (decrescente) num intervalo se o seu gráfico é uma curva ascendente (descendente) nesse intervalo; e atinge um máximo (mínimo) local num ponto que é o mais (menos) elevado do gráfico numa região à sua volta.

Vejamos como é que estes conceitos se aplicam às classes de funções que estudámos atrás.

1. As funções constantes têm apenas um valor; assim, esse valor é simultaneamente máximo e mínimo absoluto da função, e todos os números reais são extremos absolutos de qualquer função constante.

2. Uma função afim $f(x) = Ax + B$ é monótona em todo o seu domínio, uma vez que o seu gráfico é uma recta sempre com o mesmo declive. Se $A > 0$, a função é crescente; se $A < 0$, a função é decrescente.

3. O comportamento das funções quadráticas já é diferente. Sendo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, vimos que o gráfico de f tem um eixo de simetria em $x = -\frac{B}{2A}$. Se $A > 0$, então este gráfico é uma parábola virada para cima; então a função é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{B}{2A}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{B}{2A}, +\infty\right[$, sendo o ponto $x = -\frac{B}{2A}$ sobre o eixo de simetria o mínimo absoluto da função (ver Figura 2.12, (a)). Se $A < 0$, então a parábola está virada para baixo, pelo que a função é crescente em $\left]-\infty, -\frac{B}{2A}\right]$ e decrescente em $\left[-\frac{B}{2A}, +\infty\right[$, e o ponto $x = -\frac{B}{2A}$ é agora o máximo absoluto da função (Figura 2.12, (b)).

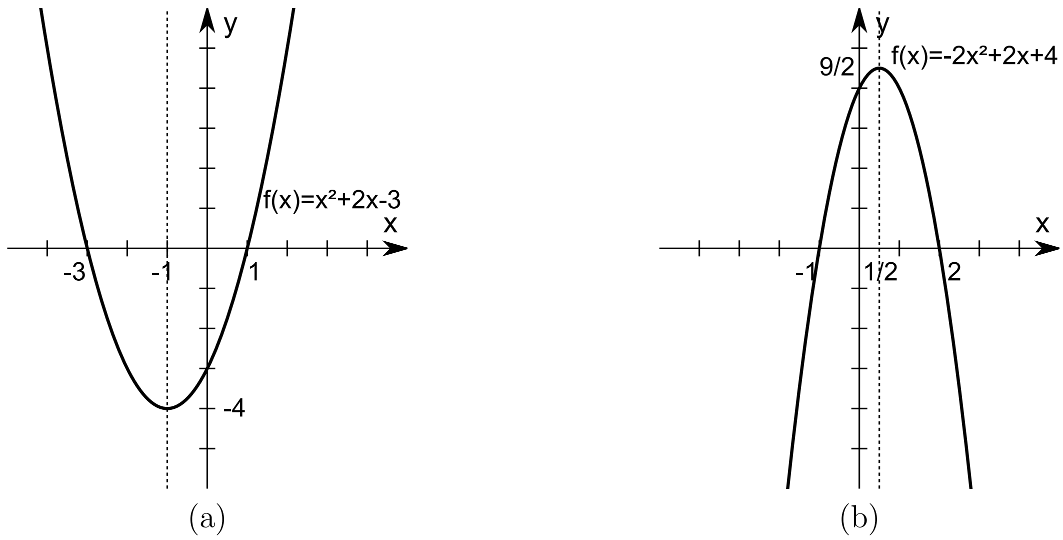


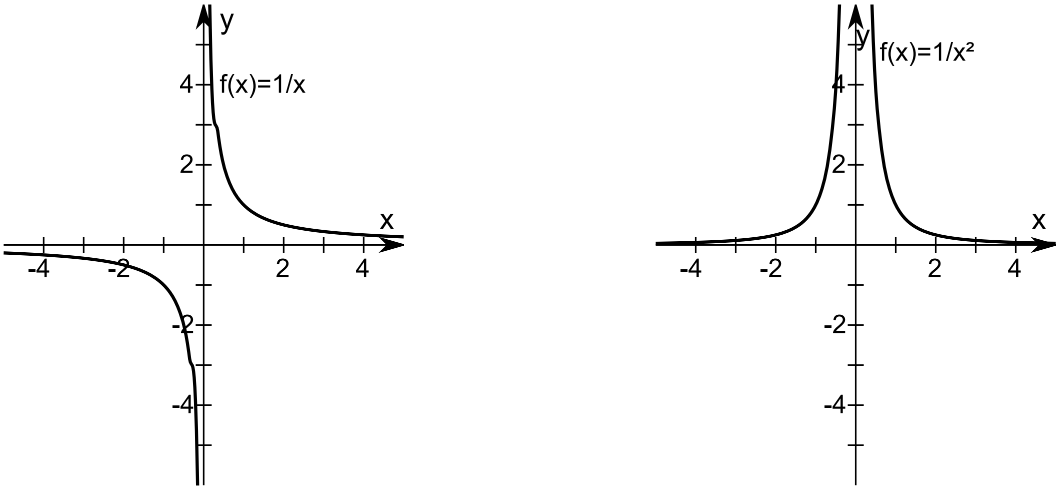
Figura 2.12: As duas orientações possíveis do gráfico duma função quadrática. No caso $A > 0$, o ponto sobre o eixo de simetria é um mínimo; no caso $A < 0$, esse ponto é um máximo.

4. Em termos de monotonia, a função módulo tem um comportamento semelhante a uma função quadrática. Uma vez que $|x| \geq 0$, o seu mínimo absoluto é atingido precisamente quando $x = 0$, sendo a função monótona decrescente à esquerda desse ponto e monótona crescente à direita.

5. As funções com expressão x^n caem novamente em duas categorias. Se n é ímpar, a função é monótona crescente em todo o seu domínio, não tendo portanto extremos relativos. Se

n é par, então o gráfico da função tem um eixo de simetria em $x = 0$ e, tal como no caso das parábolas, o ponto sobre este eixo é o mínimo absoluto da função. Neste caso, a função é monótona decrescente em $]-\infty, 0]$ e monótona crescente em $[0, +\infty[$.

6. A situação relativa às funções com expressão $\frac{1}{x^n}$ é bastante diferente.



(a) (b)

Figura 2.13: Os dois comportamentos possíveis das funções $\frac{1}{x^n}$.

Comecemos por considerar a função $f(x) = \frac{1}{x}$ (Figura 2.13 (a)). Esta função é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$; porém, seria errado afirmar que é decrescente em todo o seu domínio: considerando os pontos -1 e 1, temos que $-1 < 1$ mas $f(-1) = -1$, que é menor que $f(1) = 1$.

Além disso, esta função não tem extremos relativos. Consideremos o que se passa no ramo em que o argumento é positivo. A função é decrescente e positiva, mas assume valores arbitrariamente grandes (basta escolhermos argumentos suficientemente próximos de 0) e valores arbitrariamente próximos de 0 (basta escolhermos argumentos suficientemente grandes), sem contudo chegar a atingir este valor. Da mesma forma, quando o argumento de f é negativo a função assume todos os valores negativos, mas não tem extremos.

No caso da função definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (Figura 2.13 (b)), a situação é semelhante, embora ligeiramente diferente. Em termos de monotonia, estamos agora perante uma função monótona crescente em $]-\infty, 0[$ e monótona decrescente em $]0, +\infty[$; tal como a anterior, esta função não tem extremos relativos.

Todas as funções com expressão $\frac{1}{x^n}$ exibem um destes dois comportamentos, consoante n seja impar (caso de $\frac{1}{x}$) ou par (caso de $\frac{1}{x^2}$).

7. Quando nos encontramos perante funções definidas por ramos, surge uma nova situação: a função pode atingir um extremo relativo no limite do ramo, sendo preciso efectuar essa verificação. Consideremos novamente os gráficos das três funções por ramos estudadas anteriormente.

A função representada na Figura 2.14 (a) é monótona crescente em $\mathbb{R}$, não tendo portanto qualquer extremo relativo. Já a função da Figura 2.14 (b) é monótona decrescente para $x \leq 0$ e monótona crescente para $x \geq 0$, apresentando um mínimo absoluto em $x = 0$

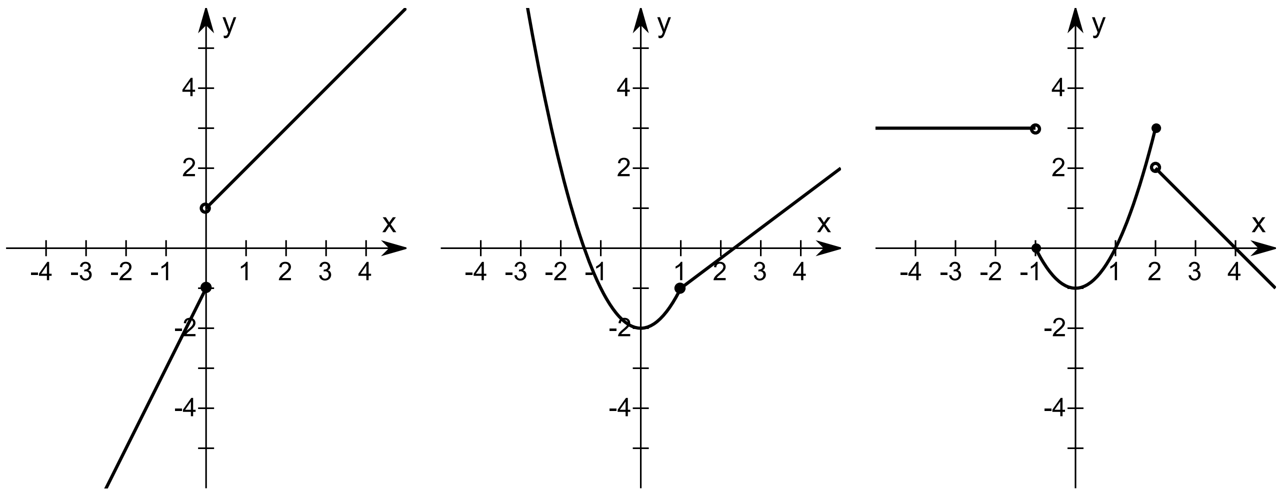


Figura 2.14: Funções definidas por ramos. Estas funções podem ter extremos relativos nos pontos de mudança de ramo.

com valor -2. Em ambos os casos, o comportamento da função é idêntico à esquerda e à direita do ponto de mudança de ramo, pelo que estes pontos não são extremos relativos.

No caso da função da Figura 2.14 (c), a situação é diferente. No intervalo $]-\infty,-1[$ a função é constante, sendo todos os seus pontos máximos e mínimos relativos; uma vez que a função nunca atinge valores superiores a 3, estes extremos são mesmo extremos absolutos.

No intervalo $[-1,0]$ a função é decrescente. Contudo, o ponto -1 não é um extremo relativo, pois o valor que a função toma nesse ponto (0) é inferior ao valor que toma em pontos menores (3). Já o ponto 0 é um mínimo relativo, sendo a função depois crescente em $[0,2]$.

Finalmente, o intervalo $[2,+\infty[$ é novamente um intervalo de monotonia decrescente. Aqui já temos um extremo relativo no ponto 2: nesse ponto a função atinge o valor 3, que é superior aos valores à esquerda e à direita. Neste caso, encontramos um extremo relativo num ponto de mudança de ramo.

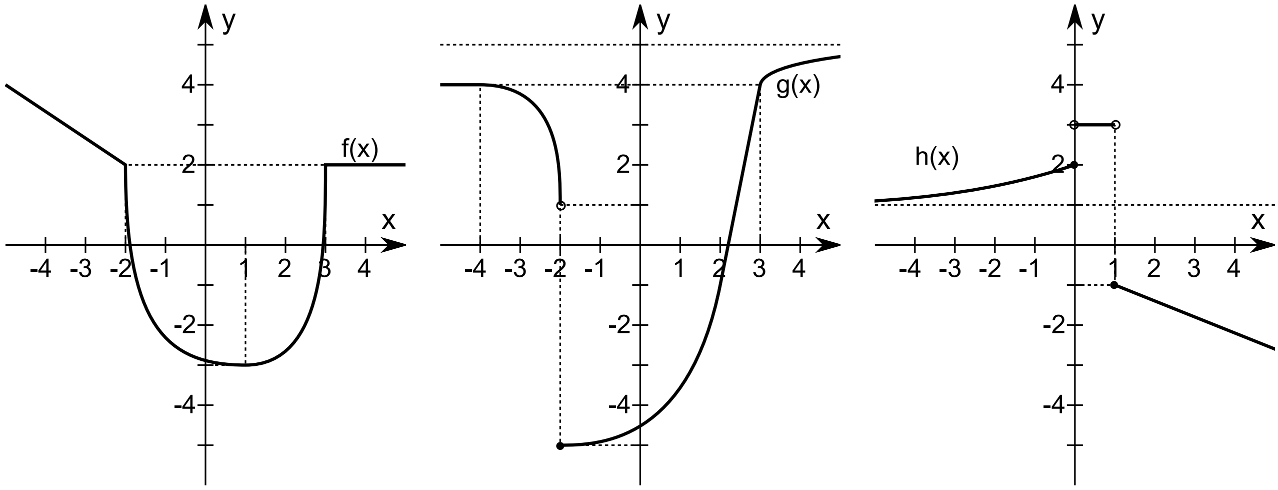
Os gráficos das funções como $f(x)=\frac{1}{x}$ apresentam uma particularidade interessante: a função tem intervalos de monotonia que não terminam com um extremo relativo. Visualmente, observa-se que nestes intervalos a função se aproxima duma recta — uma recta vertical, quando x se aproxima de 0, e uma recta horizontal, à medida que x aumenta ou diminui sem limite.

Quando o gráfico duma função se aproxima duma recta, diz-se que essa recta é uma *assímptota* do gráfico. Mais adiante veremos como determinar assímptotas de uma forma sistemática, incluindo assímptotas oblíquas (que não ocorrem nestes tipos de funções); neste momento, é importante perceber o seu significado geométrico e ser capaz de as identificar graficamente.

2.3.3 Análise de gráficos de funções

Vamos agora pôr em prática tudo aquilo que vimos nas secções anteriores analisando algumas funções apenas a partir dos seus gráficos.

Consideremos os seguintes exemplos de gráficos de funções.



(a) (b) (c)

A função f, cujo gráfico está representado em (a), está definida para todos os números reais. Até $x = -2$, a função é uma função afim decrescente; entre -2 e 3, a função decresce até atingir o valor -3 (no ponto $x = 1$) e volta a subir, atingindo o valor 2. A partir do ponto 3, a função é constante.

Assim, temos que

$$D_f = \mathbb{R} \text{ e } f(\mathbb{R}) = [-3, +\infty[\,.$$

A função é monótona decrescente em $]-\infty, 1]$ e monótona crescente em $[1, 3]$, atingindo o seu mínimo absoluto em $x = 1$.

A função g, cujo gráfico está representado em (b), também está definida para todos os números reais, sendo o seu domínio portanto $\mathbb{R}$. A função é constante com valor 4 até $x = -4$, decrescendo depois até $x = -2$; aí o valor da função salta para -5, subindo depois cada vez mais lentamente até se aproximar do valor 5.

Novamente $D_g = \mathbb{R}$. Quanto ao contradomínio, observe-se que a função tem um mínimo absoluto de valor -5; por outro lado, embora se aproxime do valor 5, nunca o atinge — a recta $y = 5$ é uma assímptota horizontal (à direita) do gráfico de g. Então $g(\mathbb{R}) = [-5, 5[$. A função é ainda monótona decrescente no intervalo $[-4, -2[$ e monótona crescente em $[-2, +\infty[$, tendo um mínimo absoluto com valor -5 em $x = -2$ e um máximo relativo com valor 4 para todos os valores de x até -4.

Finalmente, a função h, cujo gráfico se apresenta em (c), é composta por três ramos que no seu conjunto cobrem todos os números reais. No primeiro ramo, a função cresce muito lentamente desde 1 (valor que nunca chega a atingir) até $x = 0$, onde toma o valor 2. Entre 0 e 1 (sem incluir os extremos), é constante de valor 3; finalmente, a partir de $x = 1$, a função é uma função afim decrescente.

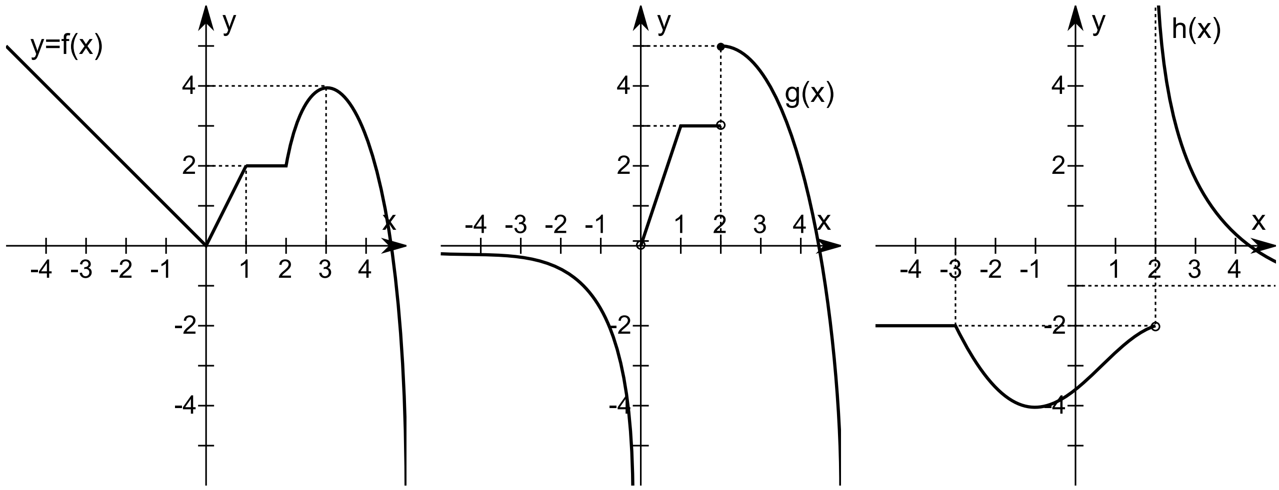
Tem-se

$$D_h = \mathbb{R} \text{ e } h(\mathbb{R}) =]-\infty, -1] \cup]1, 2] \cup \{3\}\,.$$

De facto, os valores menores que -1 são imagem do troço final da função; o segundo intervalo corresponde ao troço $x \leq 0$, onde a função toma os valores todos entre 1 e 2 sem contudo atingir 1 (mas tomando o valor 2). O valor 3 é o valor de h no troço em que é constante.

Esta função é monótona crescente em $]-\infty, 0]$ e monótona decrescente em $[1, +\infty[$, tendo máximos relativos em todos os pontos do intervalo $]0, 1[$. A recta $y = 1$ é uma assímptota horizontal (à esquerda) do gráfico de f.

Exercício 11. Estude as funções cujos gráficos se apresentam na figura seguinte.



2.4 Função exponencial e funções trigonométricas

Embora a Análise Matemática se debruce sobre o estudo de *todas* as funções reais de variável real, há um conjunto de funções que tendem a ocorrer com bastante mais frequência do que outras, quer por questões ligadas às aplicações (são funções que modelam comportamentos do mundo real), quer por questões de complexidade (são funções simples para efectuar cálculos, e portanto usadas para aproximações), quer por questões mais teóricas mas com impacto prático (surgem como resolução de problemas concretos).

Nas secções anteriores falámos de funções afim, quadráticas e potências; todas estas funções são casos particulares de *polinómios* ou *funções polinomiais*. Um polinómio é uma função cuja expressão pode ser escrita apenas usando potências e multiplicação por constantes; com as ferramentas de que dispomos neste momento não nos é possível tratar polinómios em geral, pelo que nos cingimos aos casos discutidos atrás. Estas funções são contudo de grande importância, já que são as mais simples de toda a classe das funções reais em termos computacionais e, por esse motivo, são extremamente utilizadas na prática em contextos requerendo cálculos aproximados. Os polinómios têm ainda a vantagem de serem funções definidas para qualquer número real.

Outro tipo de função que encontrámos foram as funções recíprocas, ou potências de expoente negativo: funções com expressões como $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ e similares, que podem também ser escritas na forma x^{-1}, x^{-2}, e assim por diante. Estas funções não são polinómios (em particular, não estão definidas para todos os números reais), mas são um caso particular de *funções racionais*: funções que podem ser definidas como quociente (ou divisão) de dois polinómios. Outros exemplos de funções racionais que já encontrámos são $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ e $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. Estas funções surgem com grande frequência na modelação de problemas concretos, e tendo um comportamento substancialmente diferentes dos polinómios exigem um tratamento próprio.

Nesta secção vamos discutir dois novos tipos de funções: as funções exponenciais e as funções trigonométricas. Estas funções são mais uma vez bastante diferentes de todas as que já encontrámos; e são de particular interesse quer por motivos teóricos, quer por motivos práticos. As suas propriedades analíticas levam a que sejam soluções de muitos problemas concretos, pelo que exponenciais, senos e cosenos sejam funções recorrentes em áreas tão diversas como a Física, a Estatística, a Economia e a Biologia. A função exponencial tem um papel importante nos modelos matemáticos da Economia, enquanto as funções trigonométricas estão na base das séries de Fourier, que são uma ferramenta fundamental em Electrotecnia e Telecomunicações.

2.4.1 Função exponencial

Uma das operações aritméticas definida sobre números reais é a potência: a^b. Até agora, considerámos a função que se obtém a partir desta operação mantendo o expoente constante e fazendo variar a base: x^2, x^3, x^6 são exemplos de funções deste tipo.

Outra forma de obter uma função definida com base na operação de potenciação é manter a base constante, mas permitir que o expoente varie. Obtêm-se assim funções como 2^x, 3^x ou 10^x.

Estas funções exibem todas um comportamento muito semelhante, substancialmente diferente de todas as que encontrámos até agora. Por motivos que se tornarão claros mais adiantes, a função exponencial por excelência é a que tem por base o número e, conhecido como número de Neper, que encontrámos já no contexto das sucessões; de facto, esta é a exponencial "mais simples" (num sentido muito concreto que é universalmente aceite) à qual todas as outras se reduzem como teremos oportunidade de ver mais adiante.

A função exponencial é uma função que está definida para todos os números reais: uma vez que o número e é positivo e podemos tomar potências de qualquer expoente com base e. Das regras operatórias das potências, sabemos em particular que $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{x+y} = e^x e^y$ e $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Decorre daqui que $e^x > 0$ para todos os números reais x, tendo-se $e^x > 1$ para $x > 0$ e $e^x < 1$ para $x < 0$. Da relação $e^{x+y} = e^x e^y$ decorre ainda que a função é monótona crescente em todo o seu domínio: se $y > 0$ então $x + y > x$ e $e^{x+y} = e^x e^y > e^x$ porque $e^y > 1$.

O gráfico da função exponencial é então uma curva com assímptota horizontal $x = 0$ à esquerda e que cresce muito rapidamente para valores positivos de x (mais rapidamente, na realidade, do que qualquer potência x^n. O seu contradomínio é portanto o intervalo $]0, +\infty[$ dos reais positivos e a função não tem extremos relativos. A Figura 2.15 mostra o gráfico desta função.

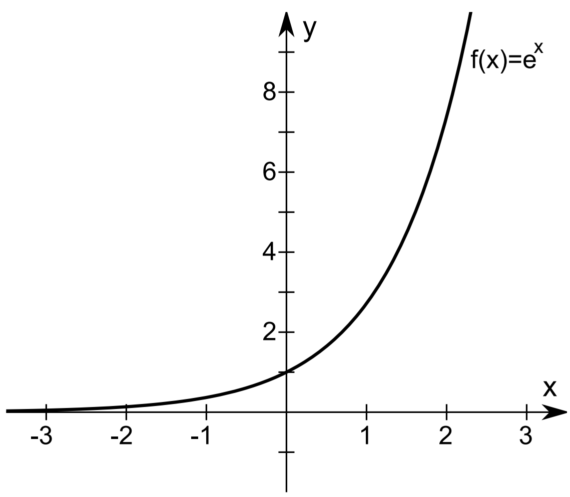


Figura 2.15: O gráfico da função exponencial.

Todas as funções exponenciais da forma a^x, com $a > 1$, têm gráficos semelhantes. O crescimento é tanto maior quanto maior for a; para traçar o gráfico, a melhor referência é sempre o valor da função no ponto 1 (que é precisamente a).

Quando $a < 1$, o comportamento da exponencial inverte-se: agora a recta $x = 0$ é assímptota horizontal à direita e a função é monótona decrescente. O gráfico de referência agora é a função $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$, que se obtém do anterior por uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas.

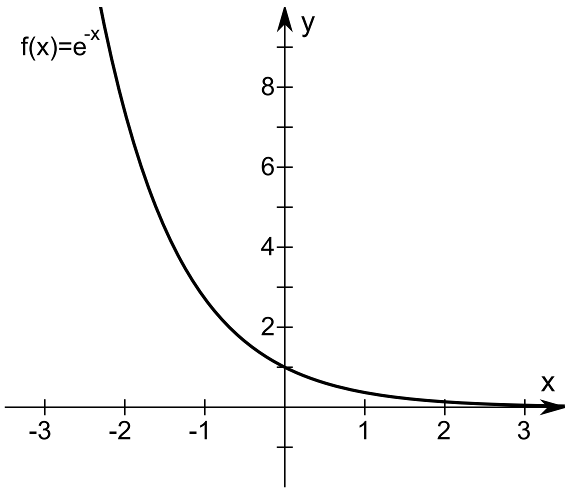


Figura 2.16: O gráfico da função exponencial negativa.

2.4.2 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas podem ser definidas de várias formas, todas elas equivalentes. Historicamente, surgiram da observação de propriedades geométricas de triângulos que são invariantes relativamente a mudanças de escala; é essa abordagem que seguiremos nesta apresentação.

Um dos resultados sobre triângulos conhecido desde a Antiguidade é o seguinte: dois triângulos com todos os ângulos iguais são semelhantes, ou seja, podem ser transformados um no outro apenas por via duma mudança de escala (ampliação ou redução). Uma vez que a soma dos ângulos internos dum triângulo é 180^o, basta verificar que dois triângulos têm dois ângulos iguais para concluir que o terceiro também será necessariamente igual àqueles dois e que os triângulos serão portanto semelhantes; pensando em triângulos rectângulos, chegamos à seguinte conclusão: dois triângulos rectângulos com um ângulo agudo igual são semelhantes.

De facto, dois triângulos rectângulos têm automaticamente um ângulo recto, pelo que se um dos outros dois ângulos também for igual nos dois triângulos o terceiro sê-lo-á automaticamente. Isto significa que, se as medidas dos lados de um deles forem a, b e c, então as medidas dos lados do outro serão $k \times a$, $k \times b$ e $k \times c$, respectivamente, para um número real fixo k (ver Figura 2.17).

Desta observação podemos tirar duas conclusões. Em primeiro lugar, conseguimos caracterizar completamente a forma dum triângulo rectângulo a partir da medida dum dos seus ângulos agudos. Em segundo lugar, sabendo esse ângulo conhecemos os valores das *proporções* entre os lados do triângulo. De facto, se dois triângulos são semelhantes, as razões entre os seus lados são constantes: escolhendo por exemplo os dois catetos nos triângulos da figura anterior,

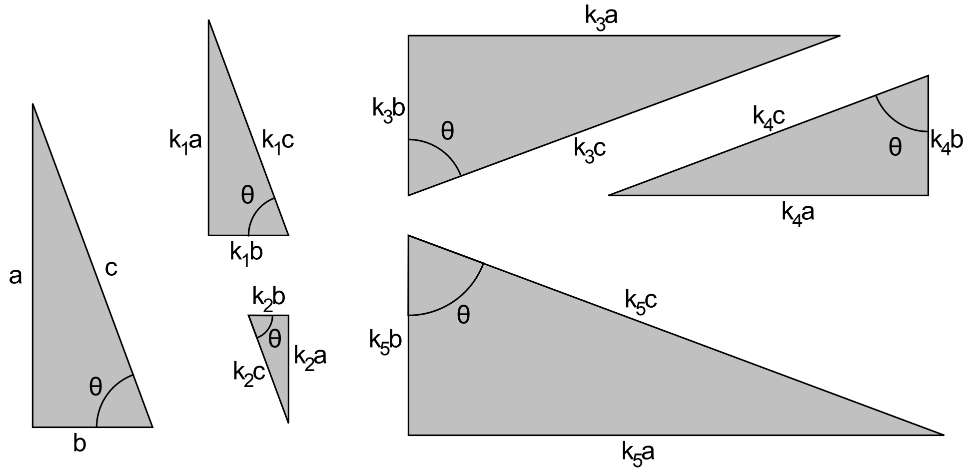


Figura 2.17: Triângulos semelhantes. Todos estes triângulos têm um ângulo recto e um ângulo agudo com a mesma medida θ.

o quociente entre eles é $\frac{a}{b}$ para o primeiro triângulo, $\frac{k_1 a}{k_1 b} = \frac{a}{b}$ para o segundo, $\frac{k_2 a}{k_2 b} = \frac{a}{b}$ para o terceiro, e assim sucessivamente.

Podemos então definir funções que associam a cada ângulo θ o valor do quociente entre determinados lados dum triângulo rectângulo com um ângulo agudo de valor θ. Há seis quocientes que podemos calcular, descritos na Tabela 2.2.

As notações usadas para estas funções não são, infelizmente, universais. Neste texto usamos a notação anglo-saxónica, que é a habitualmente usada em Engenharia, nos teclados das máquinas de calcular e em linguagens de Programação. A notação francesa, também usada frequentemente em Portugal, usa $\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{cotg}\theta$ e $\operatorname{cosec}\theta$ para $\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$, $\cot(\theta)$ e $\csc(\theta)$, respectivamente.

É importante ainda salientar que, em Matemática, estas funções estão definidas assumindo que os ângulos são medidos em *radianos*. Há duas razões para isto. Em primeiro lugar, trabalhar com ângulos em radianos simplifica muitos cálculos: um radiano é definido como a medida do ângulo tal que o comprimento do arco de circunferência associado é igual ao raio da mesma circunferência (ver Figura 2.18), o que evita muitos factores multiplicativos em conversões entre ângulos e arcos. Em segundo lugar, tal como sucedia com a exponencial, o radiano é a medida natural do ponto de vista da Análise Matemática, no sentido em que as funções trigonométricas com o argumento em radianos se comportam duma forma especialmente simples. Assim, daqui em diante usaremos sempre os radianos como unidades de medida sem mais comentários.

Da definição das funções trigonométricas há um conjunto de relações que são imediatas.

Função		Razão entre...
Seno	$\sin(\theta) = \frac{a}{c}$	o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa
Coseno	$\cos(\theta) = \frac{b}{c}$	o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa
Tangente	$\tan(\theta) = \frac{a}{b}$	o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo
Cotangente	$\cot(\theta) = \frac{b}{a}$	o cateto adjacente e o cateto oposto ao ângulo
Secante	$\sec(\theta) = \frac{c}{b}$	a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo
Cosecante	$\csc(\theta) = \frac{c}{a}$	a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo

Tabela 2.2: Definição das funções trigonométricas. As letras a, b e c referem-se ao triângulo da Figura 2.17.

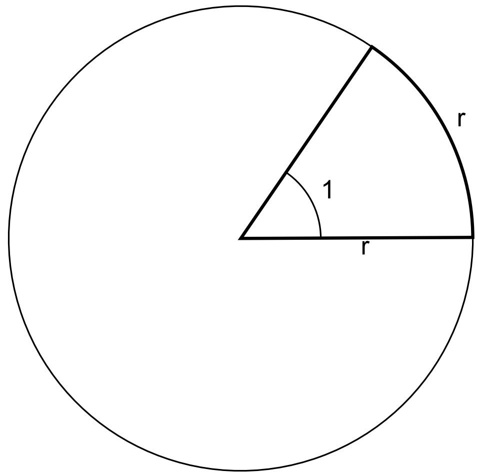


Figura 2.18: Definição de radiano. O ângulo assinalado mede precisamente 1; os segmentos no traço mais grosso têm todos o mesmo comprimento. Uma vez que o perímetro da circunferência é $2\pi r$, conclui-se que uma volta completa corresponde a um ângulo de 2π radianos.

Em particular, temos que

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \qquad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}\,,$$

motivo pelo qual estas funções são pouco usadas na prática; a função cotangente surge por vezes nalguns contextos, mas as funções secante e cosecante praticamente desapareceram.

Também podemos definir a tangente à custa do seno e do coseno, como

$$\tan(\theta) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\,.$$

Não obstante, a tangente é uma função extremamente útil por si só; esta relação é contudo útil na prática para derivar propriedades da tangente à custa de propriedades de senos e cosenos.

Do Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$a^2 + b^2 = c^2 \Longleftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1\,,$$

relação que é conhecida como *Fórmula Fundamental da Trigonometria*. A partir desta deduzem-se muitas outras; por exemplo, dividindo ambos os membros por $\cos^2(\theta)$ obtemos

$$\tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,.$$

Exercício 12. Use a fórmula fundamental da trigonometria e as relações entre as funções trigonométricas para derivar as seguintes relações.

(a) $\cot^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\sin^2(\theta)}$

(b) $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos(\theta)}$

(c) $1 - \cos(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

(d) $\cot^2(\theta) - cos^2(\theta) = \frac{\cos^4\theta}{\sin^2(\theta)}$

(e) $\frac{1}{\sin(\theta)} - \sin(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\tan(\theta)}$

(f) $1 - \sin(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(\theta)}$

Da mesma forma, podemos determinar os valores de *todas* as funções associadas a um ângulo apenas a partir duma delas. O mais simples é fazê-lo a partir do seno ou coseno; da relação $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ obtemos o valor da outra função, e a partir daí o de todas as restantes. A partir da tangente, recorre-se à relação $\tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ para determinar o coseno e prossegue-se da mesma forma.

Exercício 13.

(a) Sabendo que $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$, calcule os valores de $\cos(\theta)$, $\tan(\theta)$, $\cot(\theta)$, $\sec(\theta)$ e $\csc(\theta)$.

(b) Sabendo que $\cos(\theta) = \frac{5}{13}$, calcule os valores de $\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$, $\cot(\theta)$, $\sec(\theta)$ e $\csc(\theta)$.

(c) Sabendo que $\tan(\theta) = \frac{8}{15}$, calcule os valores de $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$, $\cot(\theta)$, $\sec(\theta)$ e $\csc(\theta)$.

Outras relações entre funções trigonométricas saem da sua definição à custa de triângulos. No triângulo acima, um dos ângulos agudos tem medida θ, donde o outro ângulo agudo tem medida $\frac{\pi}{2} - \theta$ (a soma dos três ângulos é π e o ângulo recto mede $\frac{\pi}{2}$). Então o quociente $\frac{a}{c}$ designa não apenas $\sin(\theta)$, mas também $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$: é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa do triângulo.

Exercício 14. Verifique que as seguintes identidades são válidas.

(a) $\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (b) $\tan(\theta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (c) $\sec(\theta) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Antes de prosseguirmos, vamos generalizar as funções trigonométricas a valores reais arbitrários de θ e ver como podemos determinar de forma sistemática os seus valores. Para tal, consideremos não um triângulo, mas um círculo unitário centrado na origem dum referencial e a recta $x = 1$, tangente vertical a esse círculo no ponto $(1, 0)$, conforme ilustrado na Figura 2.19.

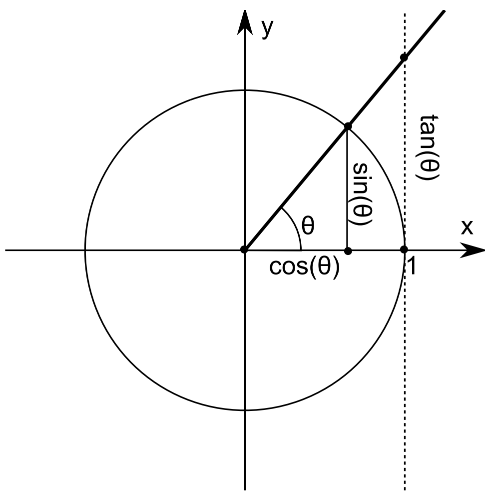


Figura 2.19: O círculo trigonométrico. A circunferência desenhada tem raio 1, a recta a tracejado é a recta $x = 1$. A figura ilustra as diferentes funções trigonométricas de θ.

Suponhamos que temos uma semi-recta partindo da origem que faz um ângulo θ com o eixo horizontal. Unindo perpendicularmente o ponto (x, y) de intersecção desta recta com o círculo ao eixo horizontal, obtemos um triângulo rectângulo com lados x, y e 1. Então temos que $\sin(\theta) = \frac{y}{1} = y$ e $\cos(\theta) = \frac{x}{1} = x$, ou seja, as coordenadas do ponto de intersecção são $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Se prolongarmos esta semi-recta até intersectar a recta vertical, obtemos outro triângulo rectângulo em que o cateto adjacente ao ângulo mede 1. Calculando a tangente de θ através deste triângulo, concluímos que o ponto de intersecção das duas rectas tem coordenadas $(1, \tan(\theta))$.

Podemos usar estes factos para *definir* seno, coseno e tangente de qualquer número real θ, a partir da semi-recta que parte da origem a um ângulo θ com o eixo horizontal. Note-se que um ângulo de 2π corresponde a uma volta completa, pelo que conhecendo os valores destas funções no intervalo $[0, 2\pi]$ podemos determinar os seus valores em qualquer ponto. As funções trigonométricas são também conhecidas como *funções circulares* devido a esta sua interpretação geométrica.

O círculo trigonométrico também é útil para determinar relações entre funções trigonométricas de argumentos diferentes. Vejamos alguns exemplos.

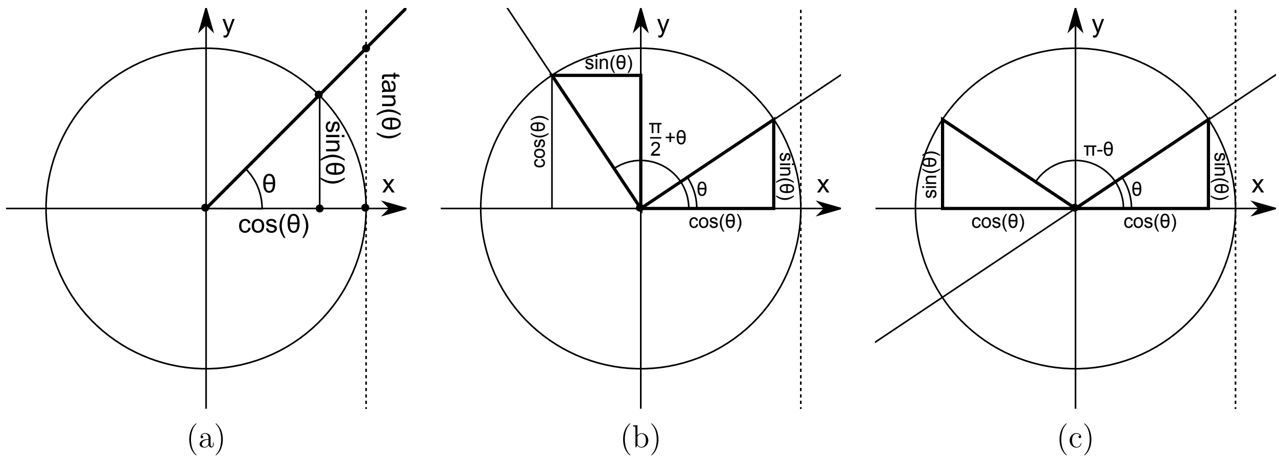


Figura 2.20: Medições de ângulos.

Exemplo.

1. Na Figura 2.20 (a) está representada a semi-recta partindo da origem a um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com a horizontal. Uma vez que $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, o triângulo que resulta da intersecção com o círculo tem os dois ângulos agudos iguais e, por conseguinte, os dois catetos iguais. Então $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, donde em particular $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Da Fórmula Fundamental da Trigonometria, obtemos

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Longrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Uma vez que o valor do seno e do coseno de $\frac{\pi}{4}$ são ambos positivos, concluímos que $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. A Figura 2.20 (b) ilustra a relação entre o ângulo θ e o ângulo $\theta + \frac{\pi}{2}$. A segunda semi-recta faz um ângulo θ com a vertical, pelo que os dois triângulos assinalados na figura são iguais; então temos que $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$ e $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ — os comprimentos vêm da igualdade dos triângulos e os sinais da observação da figura. Conclui-se também que $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\theta)$ e $\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(\theta)$.

3. Finalmente, a Figura 2.20 (c) mostra a relação entre o ângulo θ e o ângulo $\pi - \theta$. Novamente, temos dois triângulos iguais (assinalados na figura), de onde se obtêm imediatamente as relações $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$ e $\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$.

Este raciocínio deve ser exercitado, uma vez que precisaremos frequentemente de recorrer a este tipo de transformações. Apresentamos ainda as fórmulas dos senos e cosenos para a soma e duplicação de ângulos, deixando a sua justificação a cargo do leitor.

$$\sin(\theta+\gamma) = \sin(\theta)\cos\gamma + \sin\gamma\cos(\theta) \qquad \cos(\theta+\gamma) = \cos(\theta)\cos\gamma - \sin(\theta)\sin\gamma$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

Uma vez que estas funções estão definidas para qualquer número real, vamos passar a vê-las como funções reais de variável real; assim, usaremos qualquer letra que seja conveniente para designar o argumento de funções trigonométricas.

Exercício 15. Sabendo que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, indique o valor de:

(a) $\sin\frac{\pi}{4}$
(b) $\cos\frac{\pi}{4}$
(c) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
(d) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
(e) $\sin\frac{3\pi}{4}$
(f) $\cos\frac{3\pi}{4}$
(g) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
(h) $\tan\frac{3\pi}{4}$

Exercício 16. Sabendo que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, indique o valor de:

(a) $\cos\frac{\pi}{6}$
(b) $\tan\frac{\pi}{6}$
(c) $\sin\frac{\pi}{3}$
(d) $\cos\frac{\pi}{3}$
(e) $\tan\frac{\pi}{3}$
(f) $\sin\frac{2\pi}{3}$
(g) $\cos\frac{2\pi}{3}$
(h) $\tan\frac{2\pi}{3}$
(i) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
(j) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
(k) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
(l) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
(m) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
(n) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercício 17. Simplifique as seguintes expressões.

(a) $\frac{4\sin^2(-\alpha)}{\sin\alpha\cos(-\alpha)}$
(b) $\tan(-2\alpha) + \tan(\pi - 2\alpha)$
(c) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
(d) $\sin(-x) + 4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin(4\pi + x)$
(e) $\frac{1-\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)}$
(f) $\frac{\sin(3t)}{\sin t} - \frac{cos(3t)}{\cos t}$

Vamos então discutir brevemente o comportamento das funções trigonométricas e os seus gráficos.

Comecemos pelas funções seno e coseno. Uma vez que ambas correspondem a coordenadas de pontos sobre uma circunferência unitária, os seus valores estão compreendidos entre -1 e 1 — algo que poderíamos ter observado da relação $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Uma vez que $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$ e $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$, os gráficos de ambas mantêm-se iguais quando sofrem uma translação horizontal de 2π unidades. Por este motivo, estas funções dizem-se *periódicas* de período 2π.

Começando no ponto 0, a função seno toma o valor 0. À medida que o valor de x aumenta, o valor de $\sin(x)$ vai aumentando, rapidamente de início e mais lentamente à medida que x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ (estamos a percorrer o círculo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Nesse ponto, a função atinge o valor 1, começando a diminuir lentamente, de início, e depois mais rapidamente, passando por 0 quando $x = \pi$ e diminuindo cada vez mais lentamente até atingir o valor -1, no ponto $x = \frac{3\pi}{2}$. Finalmente, volta a crescer cada vez mais rapidamente até atingir novamente o valor 0 no ponto 2π. Esta oscilação repete-se indefinidamente.

Para traçar o gráfico da função coseno, basta observar a partir do círculo trigonométrico que se tem $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Assim, o gráfico do coseno é idêntico ao do seno, sofrendo apenas uma translação de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

A Figura 2.21 apresenta os gráficos destas duas funções.

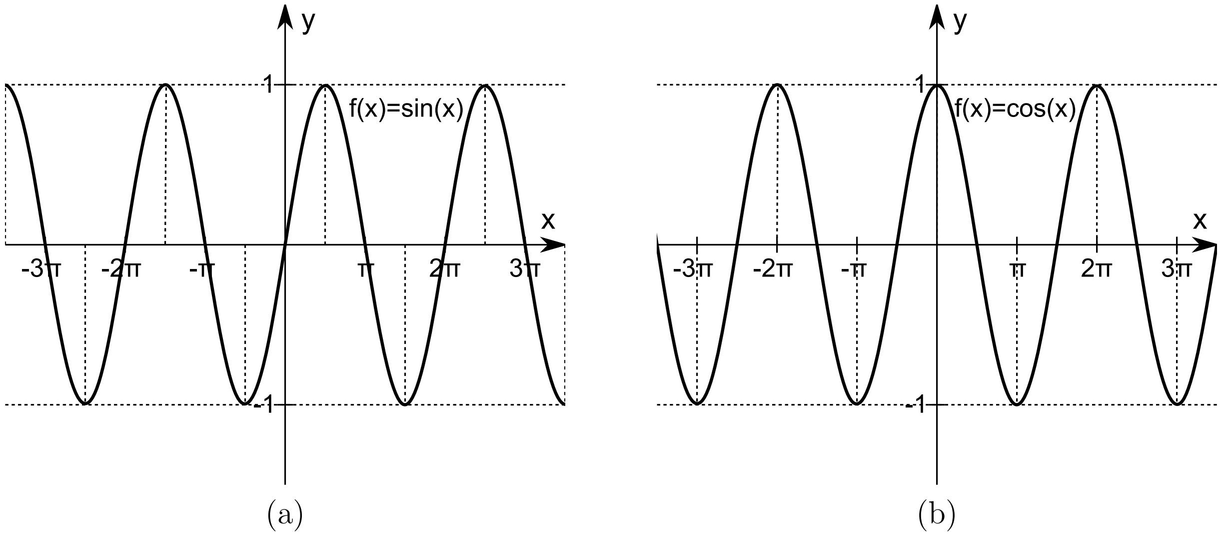


Figura 2.21: Gráficos das funções seno e coseno. Note-se que os gráficos se mantêm inalterados se os deslocarmos 2π unidades para a direita ou para a esquerda. O gráfico do coseno obtém-se por translação do gráfico do seno $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

No que toca à função tangente, comecemos por observar que temos $\tan(x + \pi) = \tan(x)$. Podemos concluir isto de duas maneiras: ou algebricamente, da relação

$$\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)\,,$$

ou por análise do círculo trigonométrico, já que as semi-rectas correspondentes aos ângulos θ e $(\theta + \pi)$ são continuação uma da outra e portanto intersectam a recta da tangente no mesmo ponto.

Assim, esta função também é periódica de período π. Contudo, a tangente não está definida em nenhum valor da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$: nestes pontos, a semi-recta correspondente é vertical e portanto paralela à recta da tangente. Algebricamente, trata-se de pontos em que a função coseno toma o valor 0, não estando portanto definida a operação que permite calcular valores da tangente.

Partindo novamente de 0, onde a tangente toma o valor 0, e aumentando o argumento, esta função é crescente: à medida que aumentamos o ângulo da semi-recta com o eixo horizontal, a sua intersecção com a recta da tangente vai subindo cada vez mais rapidamente, atingindo valores tão elevados quanto se queira à medida que o ângulo se aproxima de $\frac{\pi}{2}$. Esta função tem portanto uma assímptota vertical em $x = \frac{\pi}{2}$. Se observarmos que $\tan(-x) = -\tan(x)$, concluímos que se trata duma função ímpar; dispomos então de informação suficiente para desenhar o seu gráfico, que se apresenta na Figura 2.22.

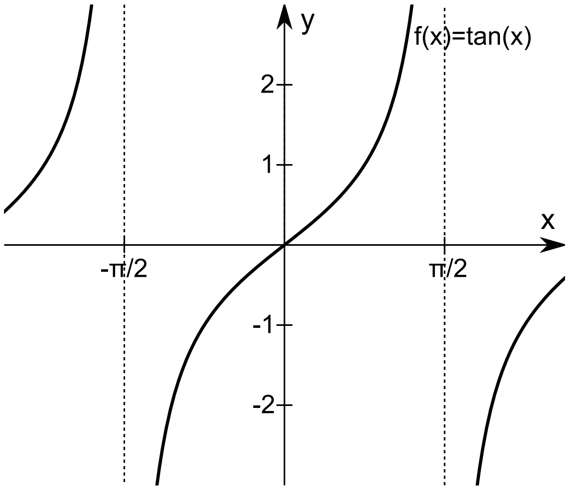


Figura 2.22: Gráfico da função tangente.

Exercício 18. Esboce o gráfico da função cotangente.

2.5 Operações com funções

Da mesma forma que podemos somar, multiplicar, ou realizar outras operações com números reais por forma a obter novos números reais, há um conjunto de operações que podemos realizar com funções que nos permitem obter novas funções. Estas operações incluem não apenas operações que são derivadas directamente das operações aritméticas (sobre os números reais), mas também duas operações que só fazem sentido sobre funções: a composição e a inversão.

2.5.1 Operações aritméticas

Qualquer operação que esteja definida sobre números reais pode ser definida sobre funções simplesmente por aplicação ponto a ponto. Por exemplo: dados dois números reais a e b, podemos calcular a sua soma; generalizando, dadas duas funções f e g, podemos calcular a sua soma (como funções) $f + g$. Esta função é uma função que, quando aplicada a um número real, devolve a soma dos valores de f e g nesse ponto: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Da mesma forma podemos definir todas as operações sobre funções.

- Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferença: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- Produto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- Quociente: $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Em termos de domínio, estas funções estão definidas sempre que as expressões do lado direito de cada igualdade estiverem definidas; com excepção do quociente, isto sucede desde que as expressões $f(x)$ e $g(x)$ estejam definidas, ou seja,

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g \,.$$

No caso do quociente, a situação é um pouco diferente. Para podermos calcular $(f/g)(x)$, não basta podermos determinar os valores de $f(x)$ e $g(x)$: é necessário poder efectuar a sua divisão. Assim,

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \,.$$

Na prática, a determinação destes domínios não oferece mais dificuldade do que anteriormente: já atrás encontrámos várias funções que eram obtidas a partir de outras por meio de operações algébricas, mas conhecendo a sua expressão determinámos o seu domínio directamente. Estas relações são úteis, contudo, por duas razões: em primeiro lugar, oferecem-nos uma forma *sistemática* de determinar o domínio duma função a partir das funções usadas para a definir; em segundo lugar, *mostram* que o domínio de e.g. $f+g$ está relacionado com os domínios de f e de g, independentemente das funções concretas f e g.

Em termos de gráficos, não há, em geral, uma relação óbvia entre os gráficos de f e g e o gráfico de $f+g$, $f-g$, fg ou f/g. Há no entanto uma excepção importante: o caso em que uma das funções (digamos g) é constante, $g(x) = k$. Vimos já que neste caso os gráficos das funções definidas por $f(x)+k$ e $f(x)-k$ correspondem a translações do gráfico de f; os gráficos de $k \times f(x)$ e $\frac{f(x)}{k}$ correspondem a dilatações ou contracções do gráfico de f. Uma vez que $\frac{f(x)}{k} = \frac{1}{k} \times f(x)$, vamos considerar apenas o caso do produto.

Comecemos por considerar o caso em que $k > 0$. Para cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f, temos um ponto correspondente $(x, k \times f(x))$ no gráfico de kf; ora graficamente, podemos obter o gráfico de kf simplesmente mudando a escala no eixo vertical, por forma a que o ponto $y = 1$ passe a ser $y = k$. Se quisermos recuperar a escala original, é só transformar depois o gráfico obtido (Figura 2.23).

No caso em que $k < 0$ há uma pequena diferença, que pode ser entendida facilmente considerando primeiro $k = -1$. Neste caso, a função obtida tem expressão $-f(x)$; ou seja, cada ponto do seu gráfico tem ordenada simétrica do ponto correspondente do gráfico de f. Então o gráfico desta função obtém-se fazendo uma simetria em relação ao eixo horizontal (Figura 2.24).

No caso geral, para obter o gráfico de kf com $k < 0$ só temos de combinar ambas as operações: dilatação/contracção e simetria. A Figura 2.25 ilustra esta situação.

Claro está que em muitos destes exemplos poderíamos ter construído directamente o gráfico de kf a partir dos conhecimentos anteriores; porém, em muitos dos casos esta técnica permite obter este gráfico com bastante menos trabalho.

Exercício 19. Desenhe o gráfico das seguintes funções.

(a) $f(x) = 2e^x$

(b) $f(x) = -\frac{4}{x^2}$

(c) $g(x) = \frac{\tan(x)}{3} + 1$

(d) $g(x) = 3|x-1|$

(e) $h(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 1 & x < 0 \\ 2\cos(x) & x \geq 0 \end{cases}$

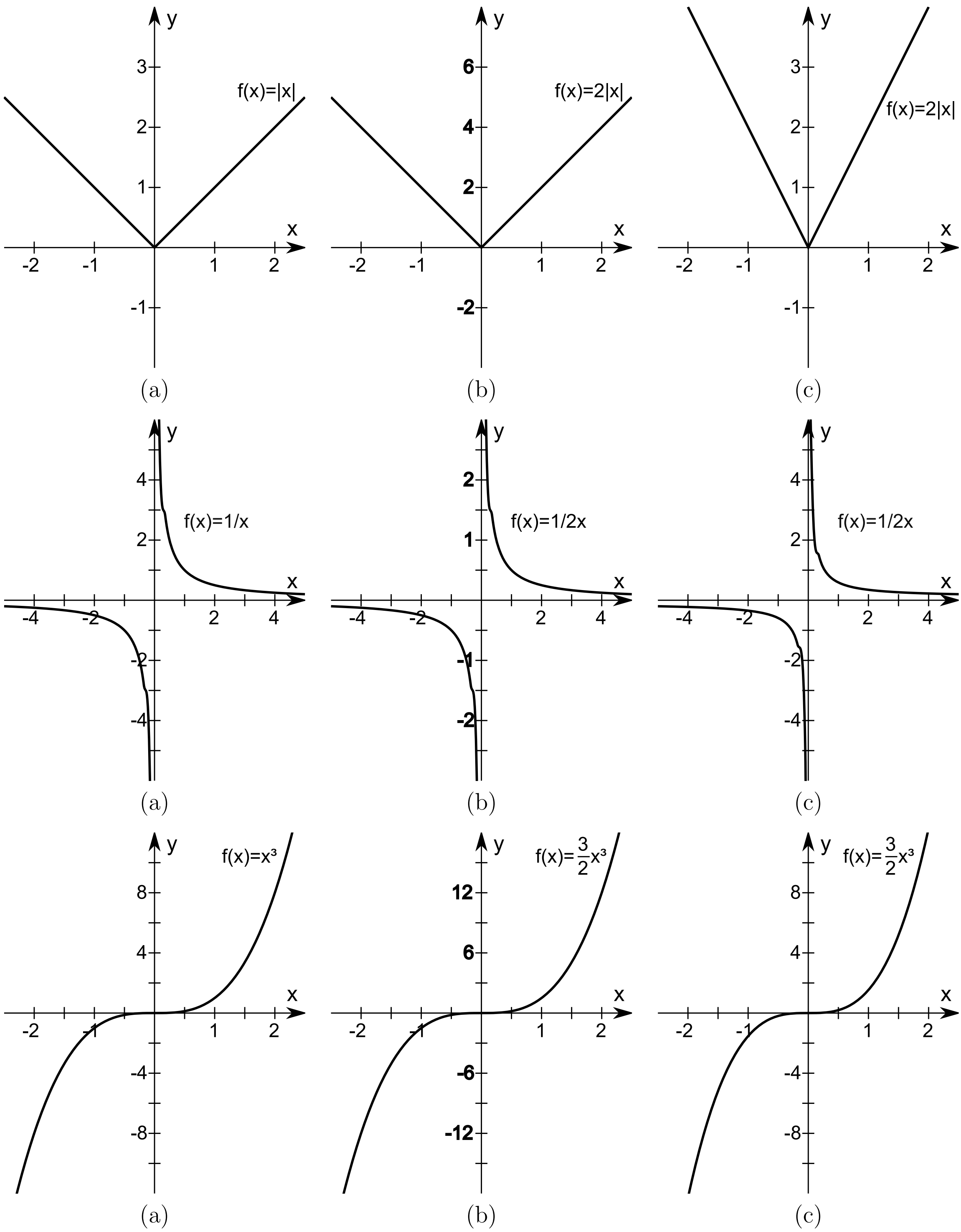


Figura 2.23: Multiplicação duma função por uma constante $k > 0$. A partir do gráfico de f (a), mudamos a escala do gráfico (b) sem alterar a forma da curva; finalmente recuperamos a escala original (c).

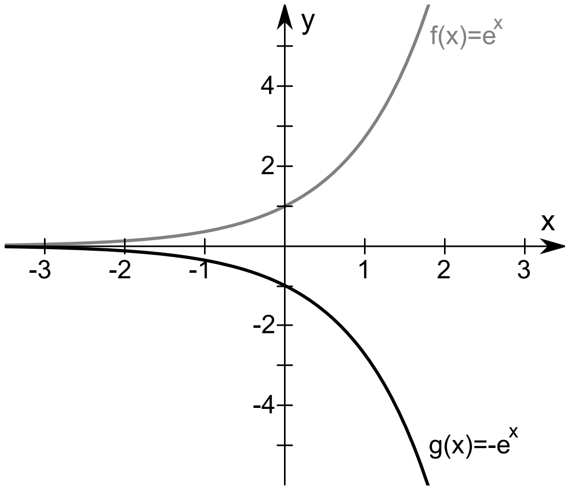


Figura 2.24: Obtenção do gráfico de $-f$ a partir do gráfico de f.

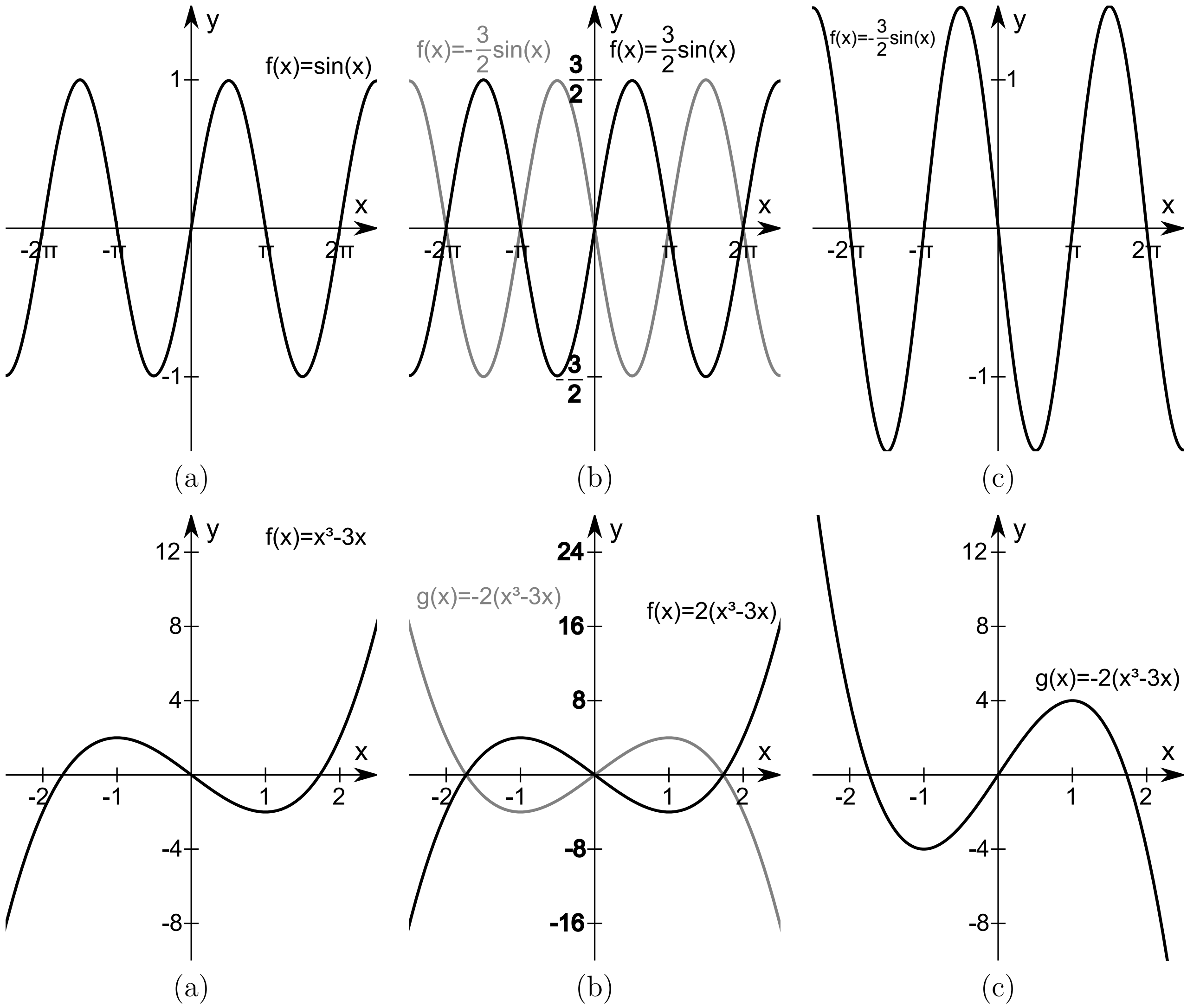


Figura 2.25: Multiplicação duma função por uma constante $k < 0$. Agora, partindo do gráfico de f (a), mudamos a escala do gráfico e aplicamos uma simetria relativamente ao eixo horizontal (b); finalmente recuperamos a escala original (c).

2.5.2 Composição

Uma operação extremamente importante é a composição de funções. Dadas duas funções f e g, a sua composição é a função que tem como regra de transformação aplicar primeiro a função f e depois proceder segundo g a partir do resultado obtido.

Nas máquinas de calcular tradicionais, a composição de funções faz parte da forma como se utilizam: para calcular valores de expressões que não correspondem a uma tecla, é preciso realizar dois ou mais passos. Por exemplo, para calcular $\sin\left(\sqrt{2}\right)$, é preciso primeiro calcular $\sqrt{2}$ e depois aplicar a função seno ao resultado. Mas esta operação é válida para quaisquer funções f e g, desde que g receba argumentos do mesmo tipo do resultado de f.

Definição. A *composição* da função f com a função g é a função $g \circ f$ (lido g *após* f), definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Graficamente, o processo de cálculo pode ser representado da forma seguinte.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, bend left, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Recuperando um dos exemplos iniciais deste capítulo, podemos encarar a operação de determinar o preço duma quantidade de fruta vendida a granel como uma função composta. Num primeiro passo (função f) usamos uma balança para determinar o peso da fruta; no segundo passo (função g) aplicamos a regra que dá o preço associado a um dado valor.

$$\begin{tikzcd} \text{fruta} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \text{peso} \arrow[r, bend left, "g"] & \text{preço} \end{tikzcd}$$

As balanças de supermercado actuais acoplam um módulo de cálculo à balança, calculando directamente o preço a partir da fruta; assim, estas balanças calculam a composição $g \circ f$ das duas funções.

Vejamos agora um exemplo envolvendo números reais. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$. Então

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2 = 9x^2\,,$$

ou, esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & 3x \arrow[r, bend left, "g"] & (3x)^2 = 9x^2 \end{tikzcd}$$

Repare-se que no cálculo da composição a única coisa que precisámos de fazer foi avaliar funções em pontos parametrizados (por x).

Podemos também calcular $f \circ g$; nesse caso, obtemos

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(x^2\right) = 3x^2\,,$$

ou, esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & x^2 \arrow[r, bend left, "f"] & 3x^2 \end{tikzcd}$$

o que mostra que a composição de funções não é, em geral, comutativa.

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo.

1. Tomando $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 1$, o cálculo da sua composição é o seguinte.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & 2x \arrow[r, bend left, "g"] & 2x+1 \end{tikzcd}$$

   Assim, $(g \circ f)(x) = 2x + 1$.

2. Se $f(x) = (x + 1)^2$ e $g(x) = 3x + 2$, obtemos

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & (x+1)^2 \arrow[r, bend left, "g"] & 3(x+1)^2+2 \end{tikzcd}$$

   donde $(g \circ f)(x) = 3(x + 1)^2 + 2 = 3x^2 + 6x + 5$.

3. Para $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 2x$, obtemos

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \sin(x) \arrow[r, bend left, "g"] & 2\sin(x) \end{tikzcd}$$

   e portanto $(g \circ f)(x) = 2 \sin(x)$.

4. Invertendo os papéis de f e g no exemplo anterior, obtemos

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & 2x \arrow[r, bend left, "f"] & \sin(2x) \end{tikzcd}$$

   e portanto $(f \circ g)(x) = \sin(2x)$.

5. Com $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sin(x + 1)$, temos

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & x^3 \arrow[r, bend left, "g"] & \sin\left(x^3+1\right) \end{tikzcd}$$

   donde $(g \circ f)(x) = \sin\left(x^3 + 1\right)$.

6. Sejam agora $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 + x$. A composição destas duas funções obtém-se como atrás.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & e^x \arrow[r, bend left, "g"] & (e^x)^2 + e^x \end{tikzcd}$$

   Logo, $(g \circ f)(x) = (e^x)^2 + e^x = e^{2x} + e^x$.

Novamente, em muitos dos casos acima obtemos uma função que podemos ver como uma função "simples": $2x+1$ e $3x^2+6x+5$ são expressões de polinómios, por exemplo, e $2\sin(x)$ é o produto do seno pela constante 2. Porém, em muitos outros casos não há forma de descrever a função senão como uma composição; é o caso de $\sin(2x)$, $\sin(x^3+1)$ ou $e^{2x} + e^x$ (embora esta última possa ser vista como uma soma em que a primeira parcela é a composição de e^x com $2x$).

Nestas situações, é fundamental perceber que se trata duma função composta. Muitas das técnicas da Análise Matemática tratam a composição de funções de forma especial, pelo que a única forma de analisar funções com expressões como $\sin(x^3+1)$ ou $e^{2x} + e^x$ é recorrendo a estas técnicas. Em particular, neste momento não temos forma de obter o gráfico destas funções a não ser tabelando valores das funções — o que é extremamente impreciso —, donde seremos forçados a recorrer às técnicas mais gerais para poder estudar o comportamento destas funções.

Assim, é desde já fundamental conseguir olhar para uma expressão como $\sin(2x)$ e escrevê-la como uma composição. A técnica é simples: é preciso pensar nos passos intermédios necessários para calcular o seu valor (neste caso, seria necessário começar por calcular $2x$). Notacionalmente, ajuda denotar esse valor intermédio por y e escrever a segunda função como função de y.

Exemplo.

1. Considere-se a função h definida por $h(x) = e^{x^2+1}$. Para calcular o valor de $h(x)$, é preciso começar por calcular $y = x^2 + 1$ para de seguida aplicar a função exponencial.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & x^2+1 \arrow[r, bend left, "g"] & e^{x^2+1} \end{tikzcd}$$

   Então $h = g \circ f$, com $f(x) = x^2 + 1$ e $g(y) = e^y$.

2. Seja agora h definida por $h(x) = \sin(2x + 1)$. Para calcular o valor de $h(x)$, é preciso começar por calcular $y = 2x + 1$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & 2x+1 \arrow[r, bend left, "g"] & \sin(2x+1) \end{tikzcd}$$

   Então $h = g \circ f$, com $f(x) = 2x + 1$ e $g(y) = \sin(y)$.

3. Para a função h definida por $h(x) = (x^2+4)^4$, o cálculo requer que se determine primeiro $y = x^2 + 4$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & x^2+4 \arrow[r, bend left, "g"] & (x^2+4)^4 \end{tikzcd}$$

   Então $h = g \circ f$, com $f(x) = x^2 + 4$ e $g(y) = y^4$.

4. Vejamos agora um exemplo um pouco mais complexo. Seja h a função definida por $h(x) = \sin\left((e^x+1)^2\right)$. Para calcular o valor de $h(x)$, é preciso efectuar três passos e não dois: primeiro, calcular $y = e^x + 1$; de seguida calcular o seu quadrado, obtendo $z = (e^x+1)^2 = y^2$; e finalmente calcular $h(x) = \sin(z)$. Temos portanto

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[rrr, bend right, "f_3\circ f_2\circ f_1"'] & e^x+1 \arrow[r, bend left, "f_2"] & (e^x+1)^2 \arrow[r, bend left, "f_3"] & \sin\left((e^x+1)^2\right) \end{tikzcd}$$

   donde $h = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, com $f_1(x) = e^x + 1$, $f_2(y) = y^2$ e $f_3(z) = \sin(z)$.

Na prática, é raro ter de recorrer a mais do que duas composições. Situações como a do último exemplo são muito complexas e ocorrem pouco frequentemente em situações concretas.

Exercício 20. Escreva cada uma das seguintes funções como uma composição.

(a) $h(x) = \cos(x+3)$

(b) $h(x) = e^{2x+1}$

(c) $h(x) = \sin(e^x)$

(d) $h(x) = \sin^2(x)$

(e) $h(x) = e^{|x|}$

(f) $h(x) = \tan|x^2 - 2|$

Tal como sucedia para as operações aritméticas, podemos encontrar uma fórmula geral para o domínio da composição de duas funções. Embora em muitos casos concretos não seja necessário recorrer a ela, já que da própria expressão da função se deduzem as condições que os seus argumentos têm de satisfazer, há situações em que pode ser interessante dispor desta fórmula.

Para poder calcular o valor de $g\circ f$ num ponto x, é necessário poder realizar duas operações: calcular o valor de $y = f(x)$ (ou seja, $x \in D_f$) e calcular o valor de $g(y)$ (ou seja, $y \in D_g$). Então, temos que

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} .$$

Por exemplo, consideremos a função $h(x) = \frac{1}{x-3}$, que pode ser vista como a composição de $f(x) = x - 3$ com $g(y) = \frac{1}{y}$. O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}$; o domínio de g é $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, o domínio de $h = g \circ f$ é

$$D_h = D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\} .$$

2.5.3 Função inversa

A última operação sobre funções é a inversão. Esta operação é fundamental, já que nos vai permitir alargar substancialmente o nosso repertório de funções até à classe das funções habitualmente usadas em Análise Matemática.

A inversão de funções tem origem no interesse que existe em conseguir resolver equações da forma $y = f(x)$ de forma sistemática. Quando a solução desta equação existe e é única, para cada valor de y, podemos considerar a seguinte regra de transformação: dado y, determinar a solução da equação $f(x) = y$. Esta regra de transformação define uma função f^{-1}, chamada função inversa de f, que por construção tem a propriedade $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, para qualquer $x \in D_f$.

Definição. Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *injectiva* se a equação $f(x) = y$ tem no máximo uma solução para cada valor de y. De forma equivalente, f é injectiva se $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$.

Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *invertível* se existe uma função f^{-1} tal que $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ para qualquer $x \in D_f$.

Estes dois conceitos não são sempre equivalentes; porém, na Análise Matemática e com as convenções que introduzimos anteriormente, uma função é injectiva precisamente quando é invertível. De facto, se f é injectiva, então podemos definir a função inversa de f como explicámos atrás, pelo que f é invertível; reciprocamente, se f for invertível e encontrarmos dois valores x e y tais que $f(x) = f(y)$, então $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, donde f é injectiva.

Proposição. Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é injectiva se e só se for invertível.

Embora a injectividade e a invertibilidade sejam conceitos essencialmente analíticos, o facto é que ambos têm um significado geométrico muito evidente. Relativamente à injectividade, estamos a afirmar que não há dois pontos do gráfico de f com abcissas diferentes e ordenadas iguais; isto corresponde a dizer que a intersecção do gráfico de f com qualquer recta horizontal tem no máximo um ponto.

Em termos de inversão, também é muito simples construir o gráfico de f^{-1} a partir do gráfico de f. O gráfico de f é constituído por todos os pontos da forma $(x, f(x))$ com x no domínio de f. Ora o valor de f^{-1} no ponto $f(x)$ é precisamente x (é o valor que é transformado por f em $f(x)$), pelo que o ponto $(f(x), x)$ é um ponto do gráfico de f^{-1}.

Graficamente, trocar as coordenadas dum ponto corresponde a fazer uma reflexão em relação à recta $y = x$ (ver Figura 2.26 (a)). Assim, a partir do gráfico de f podemos construir o gráfico de f^{-1} efectuando uma reflexão em relação àquela recta, conforme ilustram as Figuras 2.26 (b) e (c).

Analiticamente, determinar a função inversa de f implica conseguir resolver (duma forma sistemática) a equação $y = f(x)$ em ordem a x. Nalguns casos isto é possível; por exemplo, se $f(x) = 3x + 2$, então temos de resolver $y = 3x + 2$, que tem como solução (única) $x = \frac{y-2}{3}$. A função inversa de f é então $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$, ou $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$. Podemos verificar este facto graficamente (Figura 2.27 (a)).

Da mesma forma, se tomarmos $g(x) = x^3 + 2$, então resolvendo a equação $y = x^3 + 2$ obtemos $x = \sqrt[3]{y-2}$; então $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Aqui encontramos uma função cujo gráfico não conseguíamos construir até agora, mas que com os conhecimentos desta secção se torna simples de desenhar (Figura 2.27 (b)).

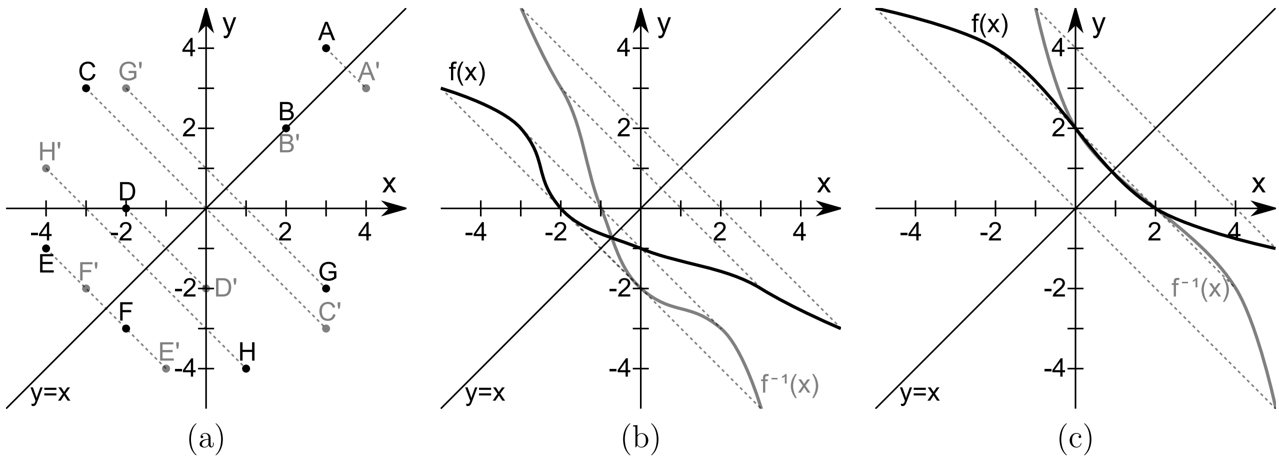


Figura 2.26: Construção do gráfico da função inversa. Em (a), vemos como pontos individuais são reflectidos em relação à recta $y = x$ quando se lhes trocam as coordenadas; em (b) e (c), a mesma construção é aplicada ao gráfico duma função.

Finalmente, para $h(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ temos de resolver a equação $y = \frac{1}{(x-1)^3}$, que gera

$$y = \frac{1}{(x-1)^3} \iff \sqrt[3]{y} = \frac{1}{x-1} \iff \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = x - 1 \iff \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + 1 = x$$

e portanto $h^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$. Atendendo a que o gráfico de h é obtido do de $\frac{1}{x^3}$ por translação, conseguimos construir facilmente o gráfico de h^{-1}, conforme ilustrado na Figura 2.27 (c).

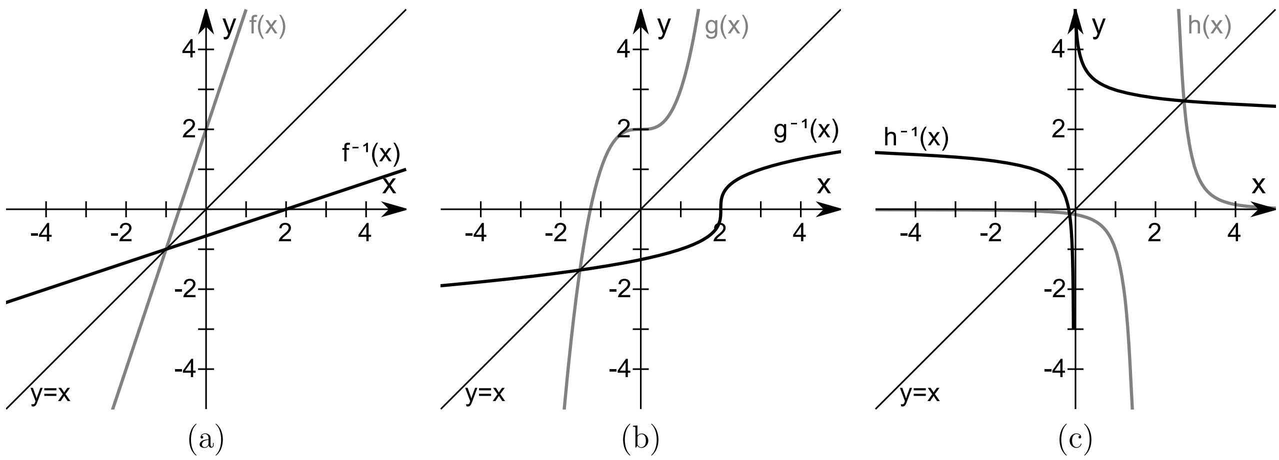


Figura 2.27: Gráficos das funções f^{-1}, g^{-1} e h^{-1}. A sombreado mostram-se os gráficos das funções f, g e h, que podem ser construídos com as técnicas das secções anteriores.

Exercício 21. A partir dos gráficos das seguintes funções, construídos em exercícios anteriores, encontre o gráfico das suas funções inversas. Quais são as expressões destas funções?

(a) $f(x) = \frac{3}{x}$ (b) $g(x) = (x+1)^3 - 2$ (c) $h(x) = 2x + 1$

Inverter uma função troca simplesmente os papéis de objecto e imagem da função. Assim, têm-se claramente as relações $D_f = f^{-1}(\mathbb{R})$ e $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R})$. Atendendo ao significado gráfico da inversão, também é claro que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, ou seja, a função inversa de f^{-1} é a própria função f; isto implica, em particular, que $f^{-1}(f(x)) = x$, para qualquer valor x no domínio de f^{-1}.

Exercício 22. Verifique que as relações $D_f = f^{-1}(\mathbb{R})$ e $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R})$ se verificam em todos os exemplos e exercícios anteriores.

A restrição de a função a inverter ser injectiva é por vezes demasiado forte. Na realidade, podemos inverter funções não injectivas desde que as restrinjamos a um domínio em que o sejam; por exemplo, podemos inverter a função f definida por $f(x) = x^2$ desde que o façamos apenas no intervalo $[0, +\infty[$, em que a equação $y = x^2$ tem uma única solução. Todos os resultados anteriores se continuam a aplicar nestes casos, em particular a construção do gráfico da função inversa.

Exemplo.

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = x^2 - 2$. Esta função não é injectiva; porém, se exigirmos que $x \geq 0$, obtemos uma função injectiva com inversa definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$. Esta função tem domínio $[-2, +\infty[$ (o contradomínio de f) e contradomínio $[0, +\infty[$ (o domínio de f). A construção do gráfico de f^{-1} está ilustrada na Figura 2.28 (a).

2. Consideremos a função g definida por $g(x) = |x-1| + 2$. Esta função também não é injectiva; porém, se exigirmos que $x \geq 1$, obtemos uma função injectiva com expressão $x + 1$ (já que neste intervalo temos $|x-1| = x-1$). A sua inversa é a função definida por $g^{-1}(x) = x - 1$ no domínio $[2, +\infty[$ (o contradomínio de g), cujo gráfico se apresenta na Figura 2.28 (b).

3. Consideremos ainda a função h definida por $h(x) = x^2 - 2x - 3$. O gráfico desta função é uma parábola com eixo de simetria $x = \frac{-2}{-2} = 1$; então, se a restringirmos ao intervalo $]-\infty, 1]$ obtemos uma função injectiva com inversa que podemos calcular.

$$y = x^2 - 2x - 3 \Longrightarrow x^2 - 2x + (-3-y) = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - (-3-y)}$$

   Daqui concluímos que $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+4}$, uma vez que o contradomínio de h^{-1} é o domínio de h. O gráfico de h^{-1} pode ser consultado na Figura 2.28 (c).

Recorrendo ao conceito de função inversa, podemos definir e estudar muitas outras funções.

Raízes e potências de expoente fraccionário. As equações da forma $x^n = y$ têm uma solução quando n é ímpar e duas soluções quando n é par e $y \geq 0$. É habitual chamar à única solução, quando n é ímpar, e à solução positiva, quando n é par e $y \geq 0$, a *raíz de índice* n de y, denotada por $\sqrt[n]{y}$. É usual escrever simplesmente $\sqrt{y}$ em vez de $\sqrt[2]{y}$; também se utiliza a notação $y^{\frac{1}{2}}$, por razões que explicaremos já de seguida.

Já utilizámos raizes nalguns exercícios e exemplos anteriores. Nesta secção vamos fazer um estudo mais sistemático destas funções.

Vamos começar com as raízes de índice ímpar. Uma vez que x^n é uma função sobrejectiva, a sua inversa $\sqrt[n]{x}$ está definida para todos os números reais; o gráfico de $\sqrt[n]{x}$ é obtido por

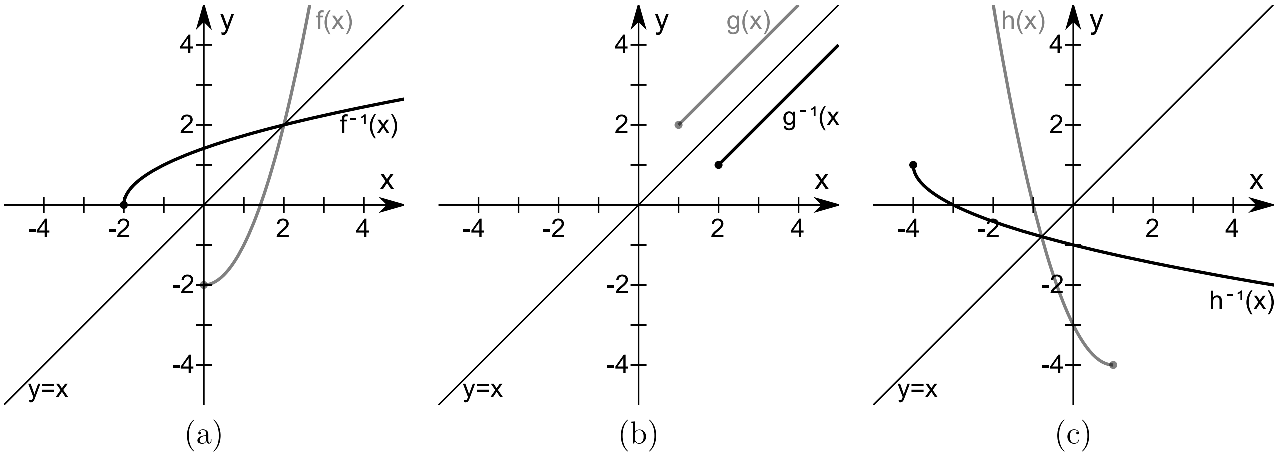


Figura 2.28: Gráficos das funções f^{-1}, g^{-1} e h^{-1}. A sombreado mostram-se os gráficos das funções f, g e h, que podem novamente ser construídos com as técnicas das secções anteriores.

reflexão do gráfico de x^n em relação à recta $y = x$, pelo que podemos desenhar estes gráficos facilmente, conforme ilustrado na Figura 2.29.

Da análise das figuras, torna-se claro que estas funções também são sobrejectivas (x^n está definido para todos os números reais) e que são funções crescentes em todo o seu domínio.

No caso das raízes de índice par, a situação é semelhante, mas com uma pequena complexidade adicional introduzida pela questão do domínio da função. Vimos já em exemplos anteriores que se quisermos inverter a função $f(x) = x^2$ temos de restringir o domínio desta a $[0, +\infty[$ ou a $]-\infty, 0]$; o mesmo se passa com qualquer outra potência de expoente par. Assim, é convenção restringir *sempre* ao ramo positivo da potência e definir $\sqrt[n]{x}$, com n par, como retornando um valor *positivo* de x. Para referir a raiz negativa da equação $y = x^n$, usamos naturalmente a expressão $-\sqrt[n]{y}$.

A Figura 2.30 mostra os gráficos de $\sqrt[n]{x}$ para alguns valores pares de n. Estas funções são à mesma funções crescentes do seu argumento, mas agora definidas apenas em $[0, +\infty[$ e com contradomínio $[0, +\infty[$.

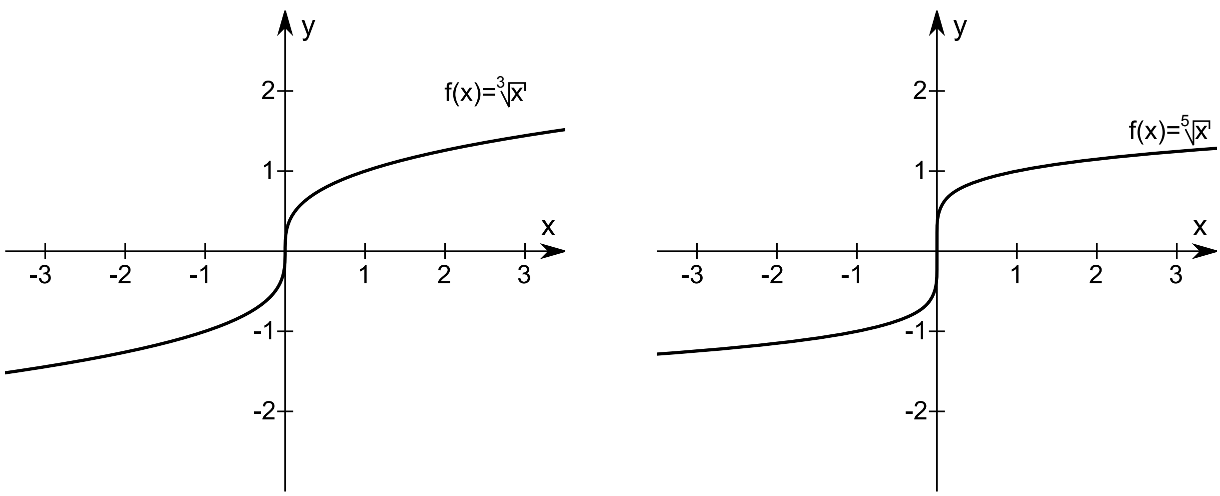


Figura 2.29: Gráficos de raízes de ordem ímpar.

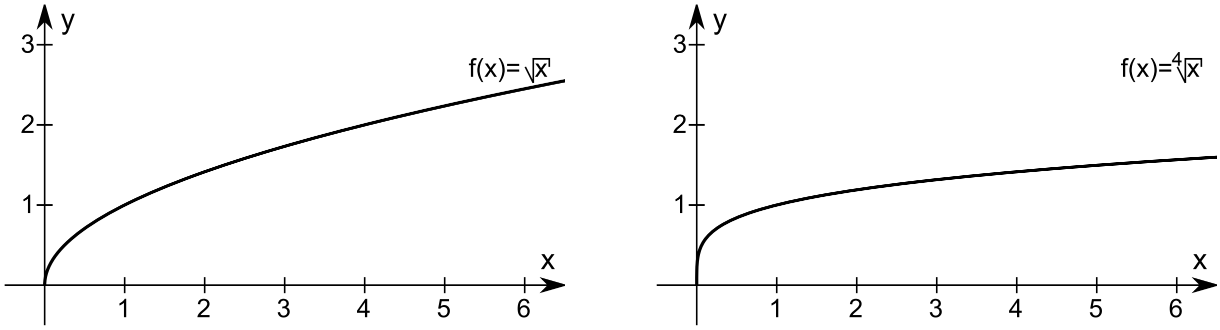


Figura 2.30: Gráficos de raízes de ordem par.

Quer no caso de n par, quer no caso de n ímpar, temos que $\sqrt[n]{x^n} = x$ e $(\sqrt[n]{x})^n = x$ sempre que aquelas expressões estejam definidas, uma vez que $\sqrt[n]{x}$ é a função inversa de x^n e atendendo às propriedades $f\left(f^{-1}(x)\right)$ e $f^{-1}(f(x)) = x$. Por esta razão, atendendo a que a exponenciação satisfaz a propriedade $(x^a)^b = x^{ab}$, é frequente escrever $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. De facto, tem-se

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x = x^1 = x^{\frac{1}{n}\times n} \text{ e } (x^n)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x = x^1 = x^{n\times\frac{1}{n}}.$$

Generalizando esta notação, podemos ainda definir $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$. Em Análise, é muito habitual trabalhar com este tipo de expressões escritas sob a forma de potência uma vez que, conforme teremos oportunidade de apreciar, muitas das regras que se aplicam ao tratamento de potências são também válidas para raízes.

Exercício 23. Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ (c) $g(x) = 2 + x^{\frac{1}{3}}$ (e) $h(x) = -\sqrt[3]{x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} - 1$ (d) $g(x) = 2\sqrt{x} - 2$ (f) $h(x) = 1 - \sqrt{x+3}$

Exercício 24. Use a relação $y = x^n \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ para determinar os valores das seguintes expressões.

(a) $\sqrt{1}$ (c) $-\sqrt{4}$ (e) $\sqrt[3]{1}$ (g) $\sqrt[3]{-8}$ (i) $\sqrt[4]{0}$ (k) $\sqrt[n]{1}$

(b) $\sqrt{0}$ (d) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ (f) $-\sqrt[3]{-1}$ (h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ (j) $\sqrt[5]{-1}$ (l) $\sqrt[n]{0}$

Exercício 25. Para cada uma das seguintes funções f, esboce o seu gráfico e o da sua inversa. Encontre a expressão de f^{-1} resolvendo a equação $y = f(x)$ em ordem a y.

(a) $f(x) = x^2 - 4$ (b) $f(x) = -x^2 + 1$ (c) $f(x) = (x+1)^3 - 2$ (d) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

Logaritmos. Vimos na Secção 2.4.1 que a função exponencial é uma função definida em $\mathbb{R}$, com contradomínio $]0, +\infty[$, e estritamente crescente em todo o seu domínio, logo injectiva. Ao único número natural x tal que $e^x = y$, para $y > 0$, chamamos *logaritmo natural* de y, denotado $\log(y)$. Em geral, para um número qualquer $a > 0$, ao único número x tal que $a^x = y$, para $y > 0$, chamamos *logaritmo de base a* de y, denotado por $\log_a(y)$.

Os logaritmos desempenharam um papel fundamental na Engenharia e na Matemática em geral até ao advento dos computadores, devido às suas propriedades operatórias. Embora se possam utilizar logaritmos de qualquer base, há três bases privilegiadas: a base e, praticamente a única usada em Matemática devido à simplicidade dos logaritmos naturais quando comparados com os outros; a base 10, tradicionalmente usada em Engenharia devido a simplificar os cálculos com notação científica, mas hoje em dia a cair em desuso; e a base 2, cada vez mais usada na Informática devido a ser a base natural para trabalhar em algoritmia.

Tal como nas funções trigonométricas, há duas notações contraditórias para os logaritmos. Em Matemática, usa-se a notação acima definida: $\log(y)$ denota o logaritmo natural de y e $\log_a(y)$ o logaritmo de base a, para qualquer outro valor de $a > 0$. Em Física e Engenharia, é tradição usar $\log(y)$ para o logaritmo de base 10 e o símbolo $\ln(y)$ para o logaritmo natural, usando-se a notação $\log_a(y)$ para as restantes bases. Em Informática, usa-se $\log(y)$ para o logaritmo de base 2, $\ln(y)$ para o logaritmo natural e $\log_a(y)$ para os restantes casos (incluindo o caso $a = 10$).

É importante ter estas convenções em atenção para não se cometer erros ao mudar duma disciplina para a outra. Nestes apontamentos, seguiremos sempre as convenções usadas habitualmente em Matemática, por serem as que se encontram em praticamente todos os livros de texto. Da mesma forma, quando falarmos na função logaritmo estamos a referir-nos implicitamente ao logaritmo natural, sendo em qualquer outro caso sempre explicitada a base.

Graficamente, a função logaritmo obtém-se a partir da exponencial por reflexão em relação à recta $y = x$, conforme apresentado na Figura 2.31.

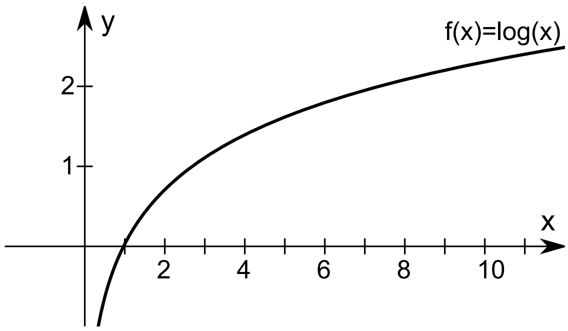


Figura 2.31: Gráfico da função logaritmo.

Da observação do gráfico podemos concluir que o logaritmo também é uma função crescente em todo o seu domínio, que está definida para $x > 0$ e que o seu contradomínio é $\mathbb{R}$. Tem-se ainda $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$ e o eixo dos yy é uma assímptota do seu gráfico.

As propriedades operatórias dos logaritmos serão fundamentais mais adiante, pelo que esta é a altura adequada para as discutir. Todas elas são consequência das regras operatórias das potências e do facto de logaritmo e exponencial serem funções inversas.

Em primeiro lugar, os logaritmos permitem-nos resolver equações — tal como qualquer função inversa. Por exemplo, se quisermos determinar o valor de x tal que $e^x - 2 = 1$, isolamos a exponencial por forma a aplicar logaritmos de ambos os lados.

$$e^x - 2 = 1 \iff e^x = 3 \iff x = \log(3)$$

De forma semelhante, podemos resolver equações envolvendo logaritmos recorrendo a exponenciais.

$$\log\left(2x^2-3\right)=5 \Longleftrightarrow 2x^2-3=e^5 \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3+e^5}{2}}$$

Exercício 26. Resolva as seguintes equações.

(a) $e^{2x+1}=2$

(b) $e^{x^2-1}=1$

(c) $e^{2x}+2e^x-1=0$

(d) $\log(x)=2$

(e) $\log(3x)+2=-1$

(f) $\log(2x+1)=e^2$

Das regras operatórias das potências, temos as relações

$$e^{x+y}=e^xe^y \text{ e } e^{xy}=(e^x)^y \, .$$

Daqui, deduzem-se regras duais para os logaritmos.

Comecemos pela primeira. De $e^{x+y}=e^xe^y$, temos que $x+y=\log\left(e^xe^y\right)$. Fazendo $e^x=a$ e $e^y=b$, temos que $x=\log(a)$ e $y=\log(b)$, donde

$$\log(a)+\log(b)=\log(a\times b)\, .$$

Da segunda regra, partimos de $e^{xy}=(e^x)^y$ para concluir que $xy=\log\left((e^x)^y\right)$. Fazendo $e^x=a$, temos que $x=\log(a)$, e aquela igualdade reduz-se a

$$\log\left(a^y\right)=y\log(a)\, .$$

Uma das consequências desta relação é poder mudar a base de logaritmos com uma divisão. Para quaisquer bases a e b, tem-se que

$$\log_b(x)=\log_b\left(a^{\log_a(x)}\right)=\log_a(x)\log_b(a)$$

donde

$$\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}\, .$$

Em particular, tomando $b=e$, esta fórmula permite-nos calcular logaritmos de qualquer número em qualquer base apenas recorrendo a logaritmos naturais.

Exercício 27. Simplifique as seguintes expressões.

(a) $\log(2)+\log(3)$

(b) $\log(4)-\log(2)$

(c) $\log\left(2^3\right)-\log\left(2^2\right)$

(d) $\log_2(5)\log_5(3)$

(e) $\log(xy)-\log(x)$

(f) $3\log(x)-log\left(x^2\right)$

São estas propriedades que tornam os logaritmos tão úteis para o cálculo: permitem transformar produtos em somas e potências em produtos. Durante cerca de dois séculos, todos os cálculos complexos em Engenharia foram feitos recorrendo a logaritmos. Qualquer número real positivo pode ser escrito na forma $a\times 10^b$, onde o número a, chamado a *mantissa*, está no intervalo $[1, 10[$ e b (o *expoente*) é um número inteiro. Esta notação é conhecida como *notação científica*.

O cálculo de logaritmos de valores em notação científica é simples: de acordo com as propriedades acima, tem-se que $\log\left(a \times 10^b\right) = \log(a) + b\log(10)$. Trabalhando com logaritmos de base 10 esta expressão é ainda mais simples: $\log_{10}\left(a \times 10^b\right) = \log_{10}(a) + b$, com $\log_{10}(a)$ um valor no intervalo $[0, 1[$.

A partir daqui, multiplicar dois números resume-se a somar os seus logaritmos e voltar a converter a notação científica (aplicando exponenciais); e o cálculo de potências transforma-se a cálculo de produtos, que pode ser novamente transformado em somas. Com o auxílio de tabelas de logaritmos, cujas dimensões chegaram a ser significativas, e um pouco de prática, era possível realizar à mão cálculos duma complexidade muito elevada.

O advento das calculadoras e dos computadores tornou estas técnicas relativamente obsoletas. Contudo, o conhecimento das regras operatórias dos logaritmos continua a ser uma ferramenta essencial em muitos domínios de aplicação da Matemática.

Exercício 28. Recorra à tabela de logaritmos de base 10 incluída abaixo para efectuar as seguintes operações. Confirme os seus resultados efectuando directamente os cálculos.

(a) $(3.027 \times 10^{-5}) \times (2.25 \times 10^2)$

(b) $(3.027 \times 10^3) \times (1.194 \times 10^4)$

(c) $\left(2.25 \times 10^{-1}\right)^2 \times (1.194 \times 10^2)$

(d) $(3.027 \times 10^{-2}) \times \left(2.25 \times 10^2\right)^3$

x	1.194	2.25	3.027	3.443	3.614	6.045	6.808
$\log_{10}(x)$	0.077	0.352	0.481	0.537	0.558	0.781	0.833

Funções trigonométricas inversas. Para terminar esta secção, vamos discutir as funções inversas das funções trigonométricas. Aqui é preciso fazer um compromisso relativamente ao domínio: todas estas funções são periódicas, pelo que não só não são injectivas, como para cada valor de y há mesmo uma infinidade de valores de x satisfazendo $f(x) = y$ (desde que y esteja no contradomínio de f).

Tendo em conta a origem das funções trigonométricas em propriedades geométricas dos triângulos rectângulos, é natural centrarmos a nossa atenção no que se passa no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, em que todas as funções estão definidas e são injectivas. Para obtermos o seu contradomínio completo, basta estendermos este intervalo por forma a apanhar os seus valores negativos; assim, o *domínio principal* do seno, tangente e cosecante é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (aberto no caso da tangente) e o domínio principal do coseno, cotangente e secante é o intervalo $[0, \pi]$ (aberto no caso da cotangente).

Nestes intervalos, ilustrados na Figura 2.32, estas funções são injectivas. Assim, é nestes intervalos que as vamos inverter.

As funções trigonométicas inversas designam-se por "arco de ...", devido à relação entre ângulos medidos em radianos e comprimentos de arcos de circunferência. Assim, por exemplo, a função inversa do seno chama-se "arco de seno", denotada por arcsin; a expressão $\arcsin(x)$ lê-se habitualmente como "arco cujo seno é x".

A Figura 2.33 mostra os gráficos das funções trigonométricas inversas mais usadas: arco de seno e arco de tangente. O arco de coseno e arco de cotangente podem definir-se simplesmente

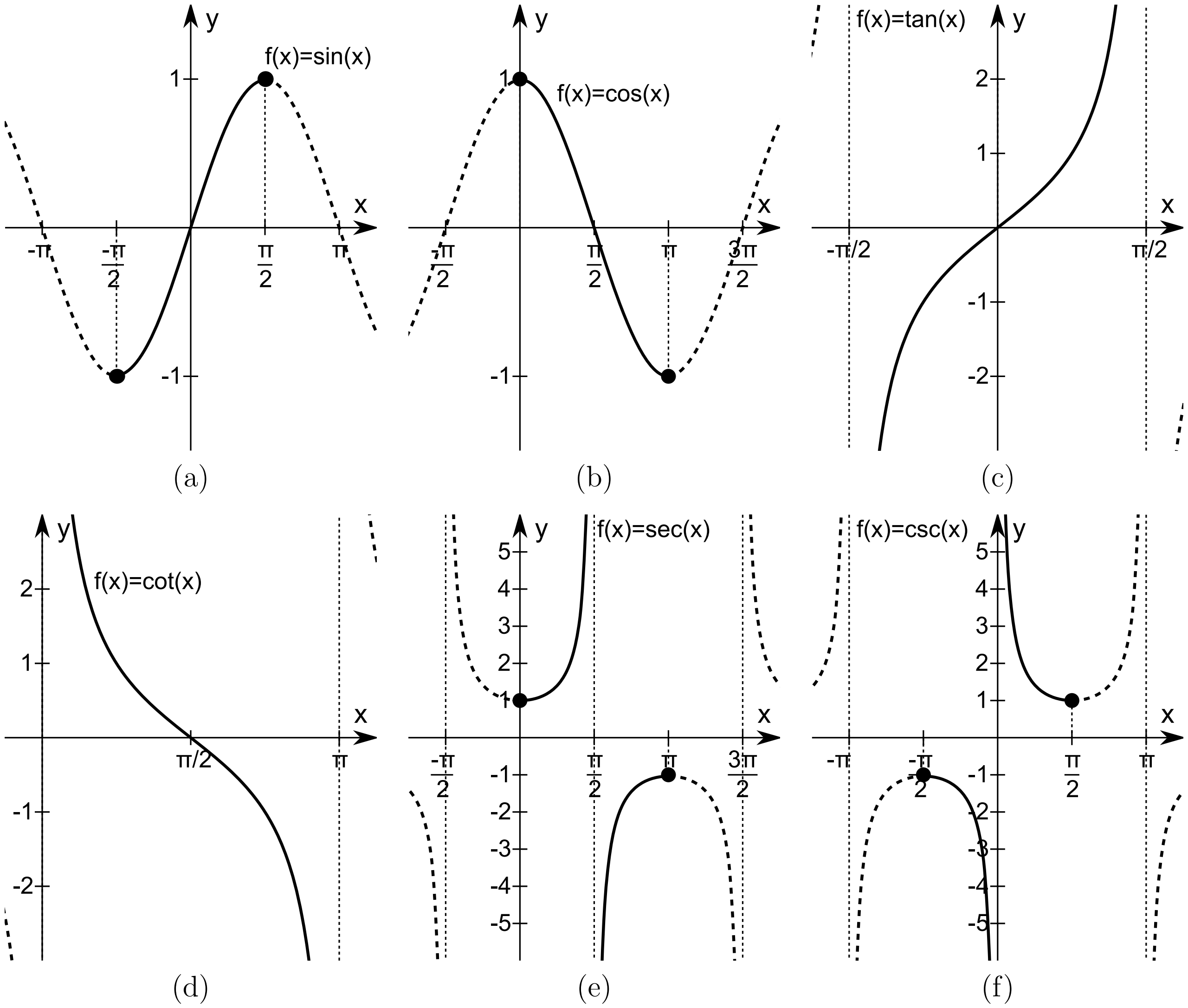


Figura 2.32: Domínios principais das funções trigonométricas seno (a), coseno (b), tangente (c), cotangente (d), secante (e) e cosecante (f).

pelas relações $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ e $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, enquanto que os arcos de secante e cosecante só raramente são referidos.

Destes gráficos podemos observar que as funções arco de seno e arco de tangente são ambas crescentes em todo o seu domínio. A primeira está definida em $[-1, 1]$ e tem como contradomínio o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; a segunda está definida em $\mathbb{R}$ e tem como contradomínio o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tendo duas assímptotas horizontais de equações $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 29. Determine o valor das seguintes constantes.

(a) $\arcsin(0)$

(b) $\arccos(0)$

(c) $\arcsin(1)$

(d) $\arccos(-1)$

(e) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

(f) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(g) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(h) $\arctan(-1)$

(i) $\operatorname{arccot}(0)$

(j) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

(k) $\operatorname{arccot}(1)$

(l) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

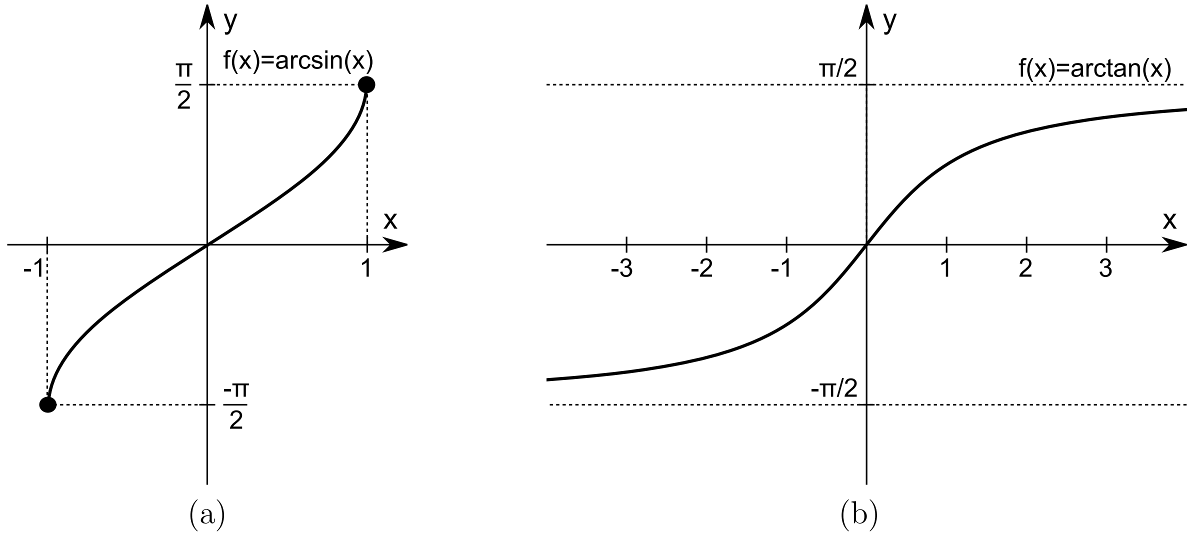


Figura 2.33: Gráficos das funções arco de seno (a) e arco de tangente (b).

Exercício 30. Esboce os gráficos das funções arco de coseno, arco de cotangente e arco de secante.

Exercício 31. Use funções trigonométricas inversas para encontrar uma solução de cada uma das seguintes equações.

(a) $\sin(x) = \frac{1}{3}$

(b) $\tan(x) = \frac{2}{3}$

(c) $\cos\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{5}$

(d) $\tan(2x) = 3$

(e) $\tan(x+1) - 2 = 0$

(f) $3\sin(\pi x) - 2 = -\sqrt{2}$

Daqui em diante, vamos trabalhar com o conjunto de funções que inclui os polinómios, exponenciais e funções trigonométricas, bem como todas as funções construídas a partir desta pelas operações algébricas, de composição e função inversa. Estas funções chamam-se *funções transcendentes elementares*.

2.6 Limites e continuidade

Para podermos desenvolver o nosso estudo de funções, precisamos de introduzir mais um conceito: o conceito de limite duma função num ponto. É esta noção que vai estar depois na base de muitas das técnicas que vamos desenvolver para estudar o comportamento de funções duma forma sistemática.

2.6.1 Noções básicas de topologia

Antes de definirmos este conceito, precisamos dumas noções de topologia. A Topologia é uma área da Matemática que estuda conceitos de relação espacial entre pontos e conjuntos; para o nosso estudo, precisamos apenas de algumas noções elementares sobre o conjunto dos números reais.

Definição. Seja A um conjunto de números reais.

- Um ponto x diz-se *interior* a A se existe um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $x \in\,]a, b[\, \subseteq A$.
- Um ponto x diz-se *exterior* a A se existe um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $x \in\,]a, b[$ e $]a, b[$ não intersecta A.
- Um ponto x diz-se *fronteiro* a A se qualquer intervalo aberto $]a, b[$ contendo x intersecta A.
- Um ponto x diz-se *ponto de acumulação* de A se qualquer intervalo aberto $]a, b[$ contendo x intersecta A em pontos diferentes de x.

O conjunto dos pontos interiores de A diz-se o *interior* de A; o conjunto dos pontos exteriores de A diz-se o *exterior* de A; o conjunto dos pontos fronteiros de A diz-se a *fronteira* de A, representada por ∂A; e o conjunto dos pontos de acumulação de A diz-se o *conjunto derivado* de A, representado por A'. À união do interior de A com a sua fronteira chama-se *fecho* de A, denotado por $\overline{A}$. Um conjunto A diz-se *aberto* se só contém pontos interiores e *fechado* se é igual ao seu fecho. Chama-se ainda *complementar* de A ao conjunto A^c que contém todos os pontos que não pertencem a A; têm-se as relações $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = \mathbb{R}$.

Graficamente, os conceitos de interior, exterior e fronteira denotam exactamente o que aquelas palavas significam: os pontos interiores estão dentro do conjunto A, no sentido em que não só pertencem a A como os pontos à sua volta também; os pontos exteriores a A estão fora de A, mais uma vez no sentido em que os pontos à sua volta também não pertencem a A; e os pontos fronteiros separam os pontos interiores de A dos pontos exteriores de A. Os pontos fronteiros dividem-se em duas categorias: os pontos isolados, que pertencem a A mas não estão próximos de mais nenhum ponto desse conjunto, e os pontos de acumulação. Observe-se que todos pontos interiores a A são necessariamente pontos de acumulação de A.

A Figura 2.34 apresenta alguns exemplos destes conceitos relativos ao conjunto $A = [-4, -2] \cup \{0\} \cup\,]1, 3]$. Os pontos -5, -1, $\frac{9}{2}$ e 6 estão fora do conjunto, bem como a vizinhança (assinalada) que os contém. Os pontos $-\frac{7}{2}$, $-\frac{5}{2}$ e 2 estão dentro do conjunto, bem como os intervalos marcados que os contêm. Já para os pontos -4, 0, 1 e 3, o intervalo assinalado intersecta A e o complementar de A, sendo claro que o mesmo se passa por muito pequeno que o intervalo se torne; estes pontos são pontos de fronteira. No caso dos pontos -4, 1 e 3, cada intervalo contém uma infinidade de pontos em A e fora de A: estes pontos são pontos de acumulação do conjunto A; no caso do ponto 0, o único ponto de A contido no intervalo

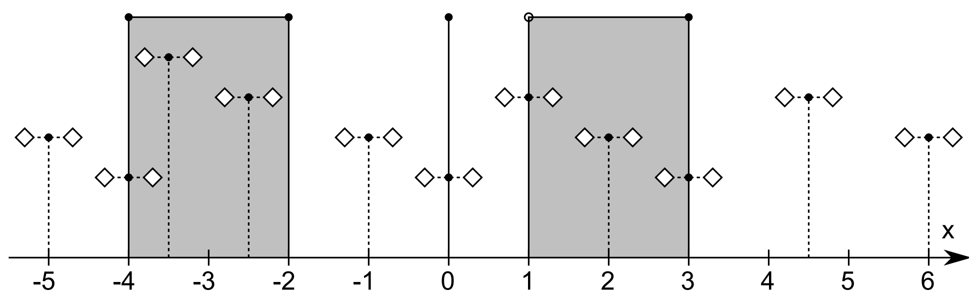


Figura 2.34: Pontos interiores, exteriores, fronteiros e de acumulação do conjunto A.

assinalado (e em qualquer outro mais pequeno) é o próprio ponto 0, pelo que este ponto é um ponto isolado. Os pontos $-\frac{7}{2}$, $-\frac{5}{2}$ e 2 também são pontos de acumulação do conjunto.

Uma vez que vamos estar essencialmente interessados em intervalos (já que estaremos a trabalhar com domínios de funções), é útil ter a ideia de como é que estes conceitos se traduzem em termos de intervalos. Para um intervalo I da forma $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$, com $a<b$, temos que:

- o interior de I é $]a,b[$;

- o fecho e o derivado de I são $[a,b]$;

- a fronteira de I é $\{a,b\}$.

Estas propriedades justificam a terminologia de intervalo aberto e intervalo fechado: os intervalos abertos são os que coincidem com o seu interior, ou seja, os da forma $]a,b[$; e os intervalos fechados são os que coincidem com o seu fecho, ou seja, os da forma $[a,b]$.

Para intervalos ilimitados a caracterização é semelhante. Para $I=]-\infty,b[$ ou $I=]-\infty,b]$, temos que:

- o interior de I é $]-\infty,b[$;

- o fecho e o derivado de I são $]-\infty,b]$;

- a fronteira de I é $\{b\}$;

e analogamente para $I=]a,+\infty[$ ou $I=[a,+\infty[$. Novamente, estas propriedades são coerentes com a terminologia de intervalo aberto ou fechado que temos vindo a usar.

Vejamos alguns exemplos. Os pontos 0, 1 e 2 são interiores ao intervalo $[-2,3]$, enquanto os pontos -3 e 4 são pontos exteriores a este intervalo. A fronteira de $[-2,3]$ é o conjunto $\{-2,3\}$. As mesmas relações continuam a verificar-se se considerarmos em vez deste o intervalo $]-2,3[$.

Já para o intervalo $[1,+\infty[$ só temos um ponto fronteiro, o ponto 1. Todos os pontos acima deste valor são pontos interiores (como por exemplo 2, π ou $\sqrt{5}$), enquanto todos os valores inferiores a 1 são pontos exteriores a este intervalo (como por exemplo 0, $\frac{1}{2}$ ou -4).

Exercício 32. Indique o interior, exterior, fronteira e derivado dos seguintes conjuntos.

(a) $[1,2]$ (b) $]-2,1]$ (c) $]-\infty,-2[$ (d) $]3,+\infty[$ (e) $[-1,+\infty[$ (f) $\mathbb{R}$

Para um conjunto que seja uma união de intervalos, só há que ter cuidado com os pontos fronteiros e de acumulação. Por exemplo, se $A=]1,3]\cup]3,4]$, então o ponto 3, que é fronteiro a ambos os intervalos $]1,3]$ e $]3,4]$, é interior a A e não fronteiro. Já para $A=]1,3[\cup]3,4]$, o ponto 3 é mesmo um ponto fronteiro deste conjunto.

Exercício 33. Determine o interior, exterior, fronteira e derivado dos seguintes conjuntos.

(a) $]1,5[\cup]-1,3]$ (c) $\{0,1\}\cup]1,2]$ (e) $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

(b) $[0,1[\cup]1,2]$ (d) $]2,+\infty[\cup\{0\}\cup]-2,-1]$ (f) $\emptyset$

O conceito de ponto de acumulação é fundamental para a definição de limite. Uma das caracterizações alternativas (e úteis) de ponto de acumulação é a seguinte.

Proposição. Um ponto x é ponto de acumulação dum conjunto A se e só se existe uma sucessão de termos em $A \setminus \{x\}$ cujo limite é x.

Por exemplo: o ponto 0 é ponto de acumulação de $]0,1]$ porque a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ é uma sucessão de termos em $]0,1]$ cujo limite é 0. Já o ponto -1 não é ponto de acumulação desse conjunto porque nenhuma sucessão de termos positivos pode ter limite -1.

Exercício 34. Seja $A =]-3,-2] \cup]1,3[$. Para cada um dos seguintes pontos de acumulação de A, encontre uma sucessão de termos em A cujo limite seja esse ponto.

(a) -3 (b) $-\frac{5}{2}$ (c) -2 (d) 1 (e) 2 (f) 3

Exercício 35. Seja $A =]-2,0] \cup \{2\} \cup]3,4[$. Para quais dos seguintes pontos é que existe uma sucessão de termos em A cujo limite seja esse ponto?

(a) -3 (b) -2 (c) 0 (d) 1 (e) 2 (f) 3

2.6.2 Limite duma função num ponto

Os números reais são por natureza uma abstracção matemática. Na vida real, é impossível medir exactamente uma distância ou um intervalo de tempo; assim, muitas vezes é mais importante saber como é que uma função se comporta *próximo* dum ponto a do que propriamente nesse ponto. Em particular, é extraordinariamente útil saber como é que os valores da função variam quando o argumento se aproxima nesse ponto.

A formalização desta ideia leva ao conceito de limite duma função num ponto. Há várias definições possíveis de limite, que para o caso da Análise Matemática são coincidentes. Apresentaremos aqui uma definição baseada em sucessões (limite à Heine), que tem a vantagem de ser bastante concreta e fácil de usar na prática.

Definição. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação do domínio de f. O número real b é o *limite (à Heine)* de f em a, denotado $\lim_{x\to a} f(x) = b$, se para qualquer sucessão u tal que $\lim u_n = a$ se tiver $\lim f(u_n) = b$.

O requisito de a ser um ponto de acumulação do domínio de f prende-se com a ideia de o limite reflectir o comportamento da função quando o argumento está "próximo" de a; se a for um ponto exterior ao domínio de f, não há qualquer informação sobre o comportamento de f em pontos próximos de a, porque f não está definida para esses valores. Se a for um ponto isolado, também não faz sentido falar no limite de f em a.

Podemos desde já estender esta definição ao caso em que $a = \pm\infty$ ou $b = \pm\infty$ com o significado óbvio; a única ressalva a fazer é definir quando é que $\pm\infty$ é ponto de acumulação do domínio de f. Dizemos que $-\infty$ é um ponto de acumulação de um conjunto se esse conjunto não for minorado; e dizemos que $+\infty$ é ponto de acumulação do domínio de um conjunto se esse conjunto não for majorado. Em termos de limites de sucessões, estamos a ser coerentes com o que dissemos atrás: $+\infty$ (ou $-\infty$) é ponto de acumulação dum conjunto se existir uma sucessão de termos nesse conjunto que é um infinitamente grande positivo (ou negativo).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo.

1. Tomemos a função f definida por $f(x) = x + 1$ e calculemos o seu limite no ponto 2. Se u é uma sucessão com limite 2, então

$$\lim f(u_n) = \lim (u_n + 1) = \lim u_n + 1 = 2 + 1 = 3\,,$$

donde $\lim_{x\to 2} x + 1 = 3$.

2. Tomemos a função f definida por $f(x) = x^2$ e calculemos o seu limite quando $x \to +\infty$. Se u é um infinitamente grande positivo, então $f(u_n) = u_n^2$ também é um infinitamente grande positivo; logo $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

3. Consideremos a função g definida por $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1}$ e vamos calcular o seu limite no ponto 1. Observe-se que neste ponto a função não está definida.

   Se u é uma sucessão com limite 1 e cujos termos são diferentes de 1, então

$$\lim g(u_n) = \lim \frac{(u_n - 1)^2}{u_n - 1} = \lim (u_n - 1) = \lim u_n - 1 = 1 - 1 = 0\,,$$

donde $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = 0$.

4. Consideremos agora a função h definida por $h(x) = \frac{|x|}{x}$ e vejamos o que se passa no ponto 0. Sejam $u_n = \frac{1}{n}$ e $v_n = -\frac{1}{n}$ duas sucessões com limite 0. Temos que

$$\lim h(u_n) = \lim \frac{|u_n|}{u_n} = \lim \frac{u_n}{u_n} = \lim 1 = 1$$
$$\lim h(v_n) = \lim \frac{|v_n|}{v_n} = \lim \frac{-v_n}{v_n} = \lim -1 = -1$$

tendo em conta que v_n é uma sucessão de termos negativos. Uma vez que há duas sucessões u e v que tendem para 0 tais que $h(u_n)$ e $h(v_n)$ têm limites diferentes, podemos concluir que a função h não tem limite no ponto 0.

5. Finalmente, seja h definida por $h(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ e calculemos $\lim_{x\to 0} h(x)$. Sendo u um infinitésimo, temos que

$$\lim h(u_n) = \lim e^{\frac{1}{u_n^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty\,,$$

observando que u_n^2 é um infinitésimo positivo.

Consideremos uma variante da função anterior: $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Se calcularmos o limite de h em 0, concluímos que este não está definido. De facto, se u for um infinitésimo positivo, temos que

$$\lim h(u_n) = \lim e^{\frac{1}{u_n}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty\,,$$

enquanto que se u for um infinitésimo negativo temos

$$\lim h\left(u_n\right) = \lim e^{\frac{1}{u_n}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

Estas situações são muito comuns, e dão origem ao conceito de *limite lateral*: o limite da função f quando nos aproximamos de a vindos duma direcção.

Definição. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação do domínio de f. O número real b é o *limite à direita* de f em a, denotado $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, se para qualquer sucessão decrescente u tal que $\lim u_n = a$ se tiver $\lim f\left(u_n\right) = b$.

O número real b é o *limite à esquerda* de f em a, denotado $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$, se para qualquer sucessão crescente u tal que $\lim u_n = a$ se tiver $\lim f\left(u_n\right) = b$.

Exemplo. Consideremos novamente a função h definida por $h(x) = \frac{|x|}{x}$. Se u for um infinitésimo positivo qualquer, então $|u_n| = u_n$, donde

$$\lim h\left(u_n\right) = \lim \frac{|u_n|}{u_n} = \lim \frac{u_n}{u_n} = \lim 1 = 1$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1\,.$$

Se v for um infinitésimo negativo, então $|v_n| = -v_n$, donde

$$\lim h\left(v_n\right) = \lim \frac{|v_n|}{v_n} = \lim \frac{-v_n}{v_n} = \lim -1 = -1\,,$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1\,.$$

Claro que se $\lim_{x\to a} f(x)$ existir, então esse limite coincide com os limites de f à direita e à esquerda desse ponto; o recíproco também é verdade.

Proposição. O limite de f em a existe se e só se existirem e forem iguais os limites laterais de f nesse ponto.

Exemplo.

1. Seja f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Se u for uma sucessão que tende para 1, então $u_n^2 - 1$ é um infinitésimo positivo; logo

   $$\lim f\left(u_n\right) = \lim \frac{1}{u_n^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty\,.$$

   Logo $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$.

2. Seja agora g definida por $f(x) = \frac{-3}{x^3+8}$ e estudemos o limite desta função no ponto $x = -2$. Se u for uma sucessão que tende para -2 por valores superiores, então $u_n^3 + 8$ é um infinitésimo positivo; logo

   $$\lim g\left(u_n\right) = \lim \frac{-3}{u_n^3 + 8} = \frac{-3}{0^+} = -\infty\,.$$

Porém, se u for uma sucessão que tende para -2 por valores *inferiores*, então $u_n^3 + 8$ é um infinitésimo negativo; neste caso, tem-se

$$\lim g\left(u_n\right) = \lim \frac{-3}{u_n^3 + 8} = \frac{-3}{0^-} = +\infty\,.$$

Concluímos assim que $\lim_{x\to -2^+} \frac{-3}{x^3+8} = -\infty$ e que $\lim_{x\to -2^-} \frac{-3}{x^3+8} = +\infty$. Esta função tem limites laterais diferentes no ponto -2, logo $\lim_{x\to -2} \frac{-3}{x^3+8}$ não existe.

Exercício 36. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x-3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{2}{3}^+} \log(3x-2)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to \pm 3} \frac{x^2-2x+3}{x^2-9}$

2.6.3 Continuidade e cálculo de limites

O primeiro exemplo da secção anterior ilustra uma característica comum a muitas funções: o limite num ponto em que a função está definida é igual ao seu valor nesse ponto. Nem todas as funções têm esta propriedade — veremos já de seguida alguns exemplos — mas muitas das que conhecemos satisfazem-na. Estas funções são ditas *contínuas*.

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua* no ponto a se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Todas as funções transcendentes elementares são contínuas no interior do seu domínio. Isto é consequência das propriedades dos limites; por exemplo, para ver que a soma de duas funções f e g contínuas num ponto a é contínua em a, escolhe-se uma sucessão arbitrária u tal que $\lim u_n = a$ e verifica-se que

$$\lim(f+g)\left(u_n\right) = \lim\left(f\left(u_n\right) + g\left(u_n\right)\right) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)\,.$$

O tratamento das restantes operações algébricas é semelhante.

Para a composição, observe-se que se f é contínua em a, g é contínua em $f(a)$ e u é uma sucessão que tende para a, então a sucessão de termo geral $f\left(u_n\right)$ é uma sucessão que tende para $f(a)$, donde $g\left(f\left(u_n\right)\right)$ tende para $g(f(a)) = (g\circ f)(a)$.

É possível demonstrar de forma semelhante que as funções trigonométricas são contínuas e que a inversa duma função contínua é contínua.

Tal como para os limites, podemos considerar o conceito de continuidade lateral.

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua à direita* do ponto a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e *contínua à esquerda* do ponto a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

É fácil ver que f é contínua em a precisamente quando é contínua à direita e à esquerda de a.

A continuidade simplifica muito o cálculo de limites, já que nos permite passar limites através das operações algébricas. Por exemplo, o primeiro limite que calculámos acima poderia ter sido deduzido como

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1 = 2 + 1 = 3\,,$$

ou mais simplesmente invocando a continuidade dos polinómios: $f(x) = x + 1$ é uma função contínua em 2, logo $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$.

Quando o ponto em que se calcula o limite não é um ponto do domínio da função, continuam-se a aplicar todas as regras anteriores (já que estas só dependem de propriedades de limites de sucessões). Em particular, temos o seguinte resultado.

Proposição. Sejam f e g funções reais de variável real e a um ponto de acumulação de f e g. Então verificam-se as seguintes relações sempre que a expressão da direita denotar um número real.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \\
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a} f(x)^{\pm \lim_{x\to a} g(x)}
\end{aligned}$$

A estas igualdades convém ainda acrescentar a relação $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$, válida sempre que g for uma função contínua no ponto designado por aquele limite.

Se permitirmos limites infinitos, estas regras continuam válidas (mais uma vez, porque já o eram para sucessões); temos apenas de ter cuidado com os símbolos que denotam indeterminações: $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞. Estas situações resolvem-se de forma semelhante à usada para as levantar quando envolviam sucessões; contudo, quando consideramos todas as funções transcendentes elementares, surgem alguns casos novos que convém discutir.

Indeterminações de tipo $\infty - \infty$. Estas indeterminações resolvem-se normalmente pondo factores em evidência na expressão do limite a determinar.

Exemplo.

1. Para calcular $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right)$, pomos x em evidência:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left(x - 2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \times (+\infty - 2 + 0) = +\infty\,.$$

2. Para calcular $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$, pomos $\frac{1}{x-2}$ em evidência:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) = (\pm\infty)(1 \pm \infty) = +\infty\,,$$

onde $\pm\infty$ indica um limite de $+\infty$ à direita e de $-\infty$ à esquerda de 2.

3. Para calcular $\lim_{x\to 0}\left(\log(x) + \frac{1}{x}\right)$, observemos em primeiro lugar que este limite é um limite à direita, já que a função cujo limite estamos a calcular não está definida para valores negativos de x. Aqui, vamos definir uma nova variável $t = \frac{1}{x}$ e reescrever este limite em função de t. Temos que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\log(x) + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to +\infty}\left(\log\frac{1}{t} + t\right) = \lim_{t\to +\infty}(t - \log(t)) = +\infty$$

tendo em conta que já sabemos que o crescimento da função logaritmo é inferior ao de qualquer polinómio.

Este último exemplo ilustra dois pontos importantes. Primeiro, é por vezes útil mudar a variável do limite para reduzir a um limite já conhecido. Segundo, conhecendo as ordens de crescimento das várias funções, pode-se muitas vezes justificar directamente qual o valor o limite sem necessitar de efectuar cálculos sofisticados.

Exercício 37. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2-x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} (e^x - 2x\log(x))$ (c) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{3}{x-3} + e^{\frac{1}{x-3}}\right)$

Indeterminações de tipo $\frac{0}{0}$. Há várias situações que podem dar origem a este tipo de indeterminação. Regra geral, a técnica depende do tipo de expressão.

Para quocientes de polinómios, aplica-se factorização, utilizando o resultado que diz que um polinómio que se anula num ponto a é factorizável por $(x-a)$. Um algoritmo geral de divisão de polinómios está descrito na Secção 4.4.1.

Exemplo.

1. O cálculo de $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ gera uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$, já que ambos os polinómios naquele quociente se anulam em $x=1$. Então, podemos dividi-los ambos por esse valor, obtendo $x^2-1=(x+1)(x-1)$ e $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$. Temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

2. A mesma técnica funciona com expressões polinomiais envolvendo outras funções. Por exemplo, para calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)+3\cos^2(x)-2\cos^3(x)}{\cos^3(x)-3\cos(x)}$, que é novamente uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$, podemos dividir ambos os termos da fracção por $\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)+3\cos^2(x)-2\cos^3(x)}{\cos^3(x)-3\cos(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos(x)}\,(1+3\cos(x)-2\cos^2(x))}{\cancel{\cos(x)}\,(\cos^2(x)-3)} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+3\cos(x)-2\cos^2(x)}{\cos^2(x)-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

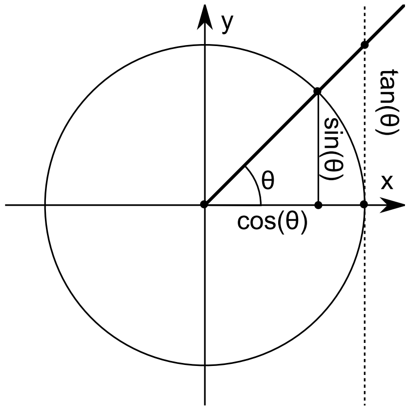
3. Um terceiro exemplo, agora envolvendo exponenciais, é

$$\lim_{x\to\log 2} \frac{2-e^x}{4-e^{2x}} = \lim_{x\to\log 2} \frac{\cancel{2-e^x}}{\cancel{(2-e^x)}\,(2+e^x)} = \lim_{x\to\log 2} \frac{1}{2+e^x} = \frac{1}{2+e^{\log 2}} = \frac{1}{4}\,.$$

Exercício 38. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{5x-15}$ (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{(x-2)^2}$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ (d) $\lim_{x\to 2} e^{\frac{x^2-4}{x^2+x-6}}$

Outro tipo de indeterminações envolve relações trigonométricas e resolve-se reduzindo a um limite particular: o limite $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}$. Para analisar o valor deste limite, vamos voltar a olhar para o círculo trigonométrico.



Comecemos pelo limite à direita, ou seja, quando $\theta > 0$. Tendo em conta que o arco assinalado na figura tem comprimento precisamente θ, já que se trata dum círculo unitário e θ é a medida do ângulo correspondente, é imediata a relação $\sin(\theta) < \theta$. Por outro lado, a área do sector circular assinalado é $\frac{\theta}{2}$ (atendendo a que o raio do círculo é 1) e a área do triângulo maior é $\frac{\tan(\theta)}{2}$; então também se tem $\theta < \tan(\theta)$.

Obtemos então a relação

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta)\,.$$

Dividindo todos os membros desta desigulddade por $\sin(\theta)$, que é um valor positivo, obtemos

$$1 < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{\tan(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}\,;$$

sendo u_n um infinitésimo positivo, concluímos que

$$1 < \frac{u_n}{\sin(u_n)} < \frac{1}{\cos(u_n)}\,.$$

Ora $\lim\frac{1}{\cos(u_n)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1$; pelo Teorema da sucessão enquadrada, ter-se-á necessariamente $\lim\frac{u_n}{\sin(u_n)} = 1$, donde $\lim\frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1$. Logo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Por outro lado, uma vez que o seno e a tangente são funções ímpares, para $\theta < 0$ tem-se

$$\tan(\theta) < \theta < \sin(\theta)\,;$$

dividindo por $\sin(\theta)$, que agora é um valor negativo, obtemos novamente

$$1 < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{\tan(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}\,,$$

donde podemos repetir o raciocínio anterior para concluir que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Uma vez que a função $\frac{\sin(x)}{x}$ tem limites laterais iguais no ponto 0, concluimos que esta função tem limite no ponto 0 e que este limite vale 1.

Observe-se que os resultados que vimos sobre limites de subsucessões garantem que para qualquer função f se tem $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$. Assim, temos por exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1 \qquad \lim_{x\to -2} \frac{\sin(2x+4)}{2x+4} = 1 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\log(x))}{\log(x)} = 1 \qquad \text{etc.}$$

Vejamos como podemos usar esta relação para calcular muitos outros limites importantes.

Exemplo.

1. O cálculo de $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$ é agora imediato usando as propriedades dos limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}_{1} \left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = 1\,.$$

2. Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$, vamos multiplicar ambos os membros da fracção por $1 + \cos(x)$ por forma a conseguir reescrevê-la em termos de senos.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x)(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\cos(x)}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\right) \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)}\right)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)}_{1}^{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Também podemos levantar indeterminações semelhantes a esta noutros pontos que não 0 por mudança de variável. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(2x)}{x-\pi} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t+2\pi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin(2t)}{2t} = 2 \lim_{t\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin(2t)}{2t}\right)}_{1} = 2
\end{aligned}$$

onde tomámos $t = x - \pi$ para reduzir o problema a um cálculo dum limite no ponto 0.

Exercício 39. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$ (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{\sin^2(x-2)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{\sin(2x)}{x\cos(x)}\right)$

O outro tipo de indeterminações deste tipo envolve exponenciais e resolve-se reduzindo a expressão ao limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. Para determinar o valor deste limite, observe-se em primeiro lugar que, dos resultados sobre limites de sucessões, sabemos que

$$e^x = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^n}\right)$$

usando a fórmula do binómio de Newton, onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ denota o número de combinações de n elementos tomados k a k. Subtraindo 1 e dividindo por x, obtemos

$$\frac{e^x - 1}{x} = \lim \left(\binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{x}{n^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n^n} \right).$$

Tendo em conta que $\binom{n}{k}$ é um polinómio de grau k, todas as fracções $\binom{n}{k} \frac{x^{k-1}}{n^k}$ são infinitésimos para $k \geq 2$. Assim, quando x tende para 0 obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \lim_{n} \left(\binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{x}{n^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n^n} \right) \\ &= \lim_{n} \lim_{x\to 0} \left(\binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{x}{n^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n^n} \right) = \lim \binom{n}{1} = \lim \frac{n!}{n!} = 1\,.\end{aligned}$$

Os mesmos comentários que fizemos atrás aplicam-se: temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(x)} - 1}{\tan(x)} = 1 \qquad \text{etc.}$$

Vejamos alguns exemplos em que podemos usar este limite para levantar indeterminações.

Exemplo.

1. Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$, a forma mais simples é fazer aparecer o termo x^2 no denominador. Então temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} x \underbrace{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}_{1} = 0\,.$$

2. Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(-x)}$, vamos proceder da mesma forma e usar o limite notável visto anteriormente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(-x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right)}_{1} \frac{2}{-1} \underbrace{\left(\frac{-x}{\sin(-x)}\right)}_{1} = 1 \times (-2) \times 1 = -2$$

3. Finalmente, nalguns casos temos de usar mudanças de variável:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2e^x - 2e}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2e\left(e^{x-1} - 1\right)}{x - 1} = 2e \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\left(e^t - 1\right)}{t}}_{1} = 2e\,, \text{ com } t = x - 1.$$

Exercício 40. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{\sin(x-1)}{x-1}}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{3x-3}-1}{2x-2}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-e^x}{x^2}$ (d) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\tan(9x)}{\sin(3x)}}$

Indeterminações de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Estas indeterminações resolvem-se recorrendo às técnicas que já usávamos para as levantar quando trabalhávamos com sucessões. Nalgumas circunstâncias, pode ser útil reduzi-las a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ por meio da identidade

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}}\,.$$

Exemplo.

1. Para calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2-x-1}$, dividimos o numerador e denominador da fracção por x^2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

2. Da mesma forma, o limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{7x}+2e^{2x}-5e^{x}}{e^{3x+1}+2e^{5x}-1}$ pode ser calculado dividindo ambos os membros por e^{5x}.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{7x}+2e^{2x}-5e^{x}}{e^{3x+1}+2e^{5x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}+2e^{-3x}-5e^{-4x}}{e^{-2x+1}+2-e^{-5x}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$$

3. Já para calcular $\lim_{x\to-\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}{x}$, vamos começar por reescrever esta tangente como uma cotangente (recorrendo a $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cot(t)$).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cot\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0^-}\frac{t}{\tan(t)}=1$$

Exercício 41. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log\frac{3x^5+2x^3-x}{1+x^2-4x^5}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{x^2+1}{2x^2+3}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{x^2}+2e^{2x}-5e^{x}}{e^{3x+1}+2e^{5x}-1}$

Indeterminações de tipo $0\times\infty$. Estas indeterminações resolvem-se quase sempre reduzindo a um dos dois casos anteriores.

Exemplo.

1. Para levantar a indeterminação em $\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, vamos reescrever a multiplicação por x como divisão por $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

2. A mesma técnica permite calcular $\lim_{x\to-\infty}x\left(2e^{\frac{1}{x}}-2\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(2e^{\frac{1}{x}}-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0^-}\frac{2e^{t}-2}{t}=2$$

3. Para determinar $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\tan(x)$, basta expandir a definição da tangente e aplicar identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\tan(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin(x)\frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = 0\end{aligned}$$

Exercício 42. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}$ (b) $\lim_{x\to1}(e^x-1)\log(x-1)$ (c) $\lim_{x\to1}\log(x)\log(x-1)$

Indeterminações de tipo 0^0, ∞^0 e 1^∞. Estas indeterminações levantam-se sempre, tal como no caso das sucessões, recorrendo à fórmula

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))},$$

que gera uma indeterminação de tipo $0\times\infty$ no expoente. Essa indeterminação pode ser posteriormente levantada recorrendo às técnicas descritas atrás.

Exemplo.

1. Para calcular $\lim_{x\to0^+}x^x$, que gera uma indeterminação de tipo 0^0, aplicamos a transformação $x^x=e^{x\log x}$, obtendo

$$\lim_{x\to0^+}x^x = \lim_{x\to0^+}e^{x\log(x)} = e^{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{t}\right)} = e^{\lim_{t\to+\infty}-\frac{\log(t)}{t}} = e^0 = 1\,.$$

2. Para calcular $\lim_{x\to+\infty}(3x+2)^{\frac{1}{x}}$, podemos usar a mesma técnica.

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\log(3x+2)}{x}} = e^0 = 1\,.$$

3. Para calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$, que é uma indeterminação do tipo 1^∞, podemos recorrer ao limite notável $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{6(x-1)}{2}+3}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^3\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^6\\ &= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^3\right)}_{1}\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^6}_{e}\\ &= e^6\end{aligned}$$

Exercício 43. Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 1}(1-x)^{x^2-1}$ (b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$ (c) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{1+\log x}}$

2.6.4 Funções definidas por ramos e prolongamentos por continuidade

Há um caso de funções cuja continuidade não é imediata a partir da sua definição: as funções definidas por ramos. De facto, quando definimos uma função com expressões diferentes em diferentes subintervalos, a continuidade das funções transcendentes elementares garante que ela é contínua nos pontos interiores de cada um desses subintervalos e que é contínua à direita ou à esquerda dos extremos que estejam incluídos no intervalo. Porém, nada garante que os pontos de mudança de ramo não sejam mesmo pontos de descontinuidade.

Vejamos uma função simples que ilustra estas duas situações: a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<-1 \\ x^2-2x & -1\leq x<2 \\ x-2 & x\geq 2 \end{cases}$$

Da continuidade das funções transcendentes elementares (em particular, dos polinómios), sabemos que f é contínua em todos os pontos da recta real com excepção de -1 e 2. Sabemos ainda que é contínua à direita do ponto -1 (já que a expressão que a define nesse ponto é igual à expressão que a define à direita desse ponto) e do ponto 2 (por uma razão análoga).

Para que f seja contínua nos pontos -1 e 2, basta então que seja contínua à esquerda em cada um deles. Vejamos o que se passa.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x+1 = -1+1 = 0 \neq f(-1) = -1$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2-2x = 4-4 = 0 = f(2) = 0$$

Então f é contínua em todos os pontos do seu domínio excepto no ponto -1.

Exercício 44. Indique quais os pontos em que as seguintes funções são contínuas.

(a) $g(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x<0 \\ 1+e^{1-x} & x\geq 0 \end{cases}$ (b) $h(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right) & x\geq 0 \end{cases}$

Mais do que determinar se uma função é contínua, interessa muitas vezes determinar parâmetros que a tornam contínua. É frequente, por exemplo, ter funções que são lineares em cada intervalo, e que se pretende que sejam contínuas; então, torna-se necessário determinar o termo independente da expressão que define a função em cada intervalo por forma a atingir este objectivo.

Exemplo. No sistema fiscal português, o Imposto sobre o Rendimento das Pessoas Singulares (IRS) é determinado em função do rendimento colectável apurado em cada ano civil por aplicação duma taxa, definida em função dum escalão determinado por esse mesmo rendimento. Porém, as transições entre escalões são contínuas, no sentido em que, num ponto de transição entre escalões, o imposto calculado pela fórmula de ambos os escalões tem o mesmo valor. Assim, ao valor do imposto a pagar é abatida uma parcela cujo valor é fixo em cada escalão. Ou seja, o imposto a pagar por um rendimento R no escalão i é dado por $I(R) = Rt_i - A_i$, onde A_i designa a parcela a abater nesse escalão.

Em 2010, os escalões de rendimento e as taxas associadas são as seguintes.

Escalão	Rendimento	Taxa
1	até €4793	10.5%
2	€4793 a €7250	13%
3	€7250 a €17.979	23.5%
4	€17.979 a €41.349	34%
5	€41.349 a €59.926	36.5%
6	€59.926 a €64.623	40%
7	acima de €64.623	42%

Vejamos como determinar as parcelas a abater em cada escalão. No primeiro escalão, esta parcela vale 0. Queremos que a função I seja contínua; então, tem de ser contínua no ponto 4793, pelo que temos que ter $\lim_{R\to 4793^-} I(R) = \lim_{R\to 4793^+} I(R)$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to 4793^-}(Rt_1 - A_1) = \lim_{R\to 4793^+} Rt_2 - A_2 &\iff 4793 \times 0.105 = 4793 \times 0.13 - A_2 \\ &\iff A_2 = 119.825\end{aligned}$$

donde a parcela a abater no segundo escalão é €119.825. (O valor previsto na lei é de €119.82.)

Conhecendo A_2, podemos determinar A_3 da mesma forma. Para que a função R seja contínua na transição para o terceiro escalão, temos de ter

$$\begin{aligned}\lim_{R\to 7250^-}(Rt_2 - A_2) = \lim_{R\to 7250^+} Rt_3 - A_3 &\iff 7250 \times 0.13 - 119.825 = 7250 \times 0.235 - A_3 \\ &\iff A_3 = 881.075\end{aligned}$$

que é a parcela a abater no terceiro escalão. (O valor previsto por lei é de €881.08.)

Continuando este raciocínio, podemos calcular A_4, A_5, A_6 e A_7.

Exercício 45. Verifique que os valores das parcelas a abater a partir do quarto escalão do IRS são $A_4 =$ €2768.87, $A_5 =$ €3802.595, $A_6 =$ €5900.005 e $A_7 =$ €7192.465.

Exercício 46. Determine o valor de k que torna cada uma das seguintes funções contínuas em todo o seu domínio.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - k & x > 1 \\ \sin(x-1) + 2 & x \leq 1 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ k - \sin(x) & x < 0 \end{cases}$

Outra situação importante é a situação em que pretendemos aumentar o domínio duma função por forma a incluir a um ponto de acumulação do domínio e de modo a que a função resultante seja contínua. Podemos fazer isto se a função tiver limite (finito) nesse ponto.

Por exemplo: seja f a função definida por $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, que está definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Se calcularmos o limite de f no ponto 1, obtemos

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\,.$$

Isto significa que podemos estender continuamente a função f ao ponto 1 definindo-a da seguinte forma.

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Um exemplo um pouco mais interessante é o da função g definida por $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ao contrário da função f anterior, a expressão de g não pode ser simplificada; porém, sabemos que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, pelo que podemos prolongar g a toda a recta real da seguinte forma.

$$g^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Em contrapartida, a função h definida por $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, também com domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, não pode ser prolongada à origem de forma contínua: o limite $\lim_{x\to 0} h(x)$ não existe. Para verificar este facto, basta escolher dois infinitésimos u_n e v_n tais que $\lim h(u_n) \neq \lim h(v_n)$. Podemos conseguir isto escolhendo u_n por forma a que $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0$ (para o que basta garantir que $\frac{1}{u_n}$ é um múltiplo de π, o que se obtém fazendo $u_n = \frac{1}{n\pi}$) e v_n tal que $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = 1$ (o que se obtém desde que $\frac{1}{v_n}$ seja a soma de $\frac{\pi}{2}$ com um múltiplo de 2π, por exemplo com $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$).

Exercício 47. Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade.

(a) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ (b) $g(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{x^2-x}$ (c) $h(x) = \left(\frac{x+2}{4-x}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

A continuidade tem implicações importantes no estudo de funções. Há dois resultados fundamentais para funções contínuas: o Teorema do valor intermédio (ou de Bolzano) e o Teorema de Weierstrass. Vamos dar alguma atenção ao primeiro, já que é uma boa aplicação da matéria coberta até aqui e tem um interesse prático importante.

Teorema (Teorema do valor intermédio)**.** Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e y um valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um ponto x tal que $a < x < b$ e $f(x) = y$.

Este teorema justifica a forma de traçar gráficos que temos vindo a usar empiricamente desde o início: uma função contínua não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios — o que implica que quaisquer dois pontos do seu gráfico estão ligados, ou seja, o seu gráfico é uma linha sem quebras. As únicas excepções que vimos até agora foram as funções definidas por ramos, que podiam ter saltos nos pontos de mudança de ramos (que acabámos de ver que podem ser de facto descontinuidades) e as funções cujo domínio não é contíguo, cujo gráfico necessariamente tem uma quebra nos pontos que não pertencem ao domínio da função.

Numericamente, este teorema (e em particular a sua prova) tem grande interesse porque permite obter soluções de equações com a precisão que se queira. Vamos ver a construção num caso particular: o caso em que $y = 0$ e $f(a) < f(b)$. Todos os casos podem ser reduzidos a este: para resolver $f(x) = y$ resolvemos a equação equivalente $f(x) - y = 0$; e se $f(a) > f(b)$ aplicamos o método à função $-f$.

Demonstração (Método da bissecção)**.** Vamos definir recursivamente duas sucessões a e b da seguinte forma:

1. $a_0 = a$ e $b_0 = b$;

2. tomando $c = \frac{a_n+b_n}{2}$ (o ponto médio do intervalo $[a_n, b_n]$):

   (a) se $f(c) < 0$, então $a_{n+1} = c$ e $b_{n+1} = b_n$;

   (b) se $f(c) > 0$, então $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c$.

Por construção, a sucessão a é uma sucessão crescente e a sucessão b é uma sucessão crescente. Ambas as sucessões são limitadas (todos os seus temos estão no intervalo inicial $[a_0, b_0]$), logo são convergentes. Uma vez que a cada passo reduzimos o intervalo $[a_n, b_n]$ a metade, temos também que $|a_n - b_n| \leq \frac{b_0-a_0}{2^n}$; então $\lim a_n = \lim b_n$.

Sendo $x = \lim a_n = \lim b_n$, vamos ver que $f(x) = 0$. Uma vez que f é contínua, temos que $f(x) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Mas $f(a_n) < 0$ para qualquer n, donde $\lim f(a_n) \leq \lim 0 = 0$; analogamente, $\lim f(b_n) \geq \lim 0 = 0$. Então $f(x) = 0$. $\square$

Vejamos como podemos aplicar este método para encontrar soluções de equações que não são resolúveis analiticamente. Consideremos a equação $\sin(x) = \log(x)$. Traçando os gráficos destas duas funções, vemos que esta equação tem uma solução no intervalo $[2, 3]$ (Figura 2.35).

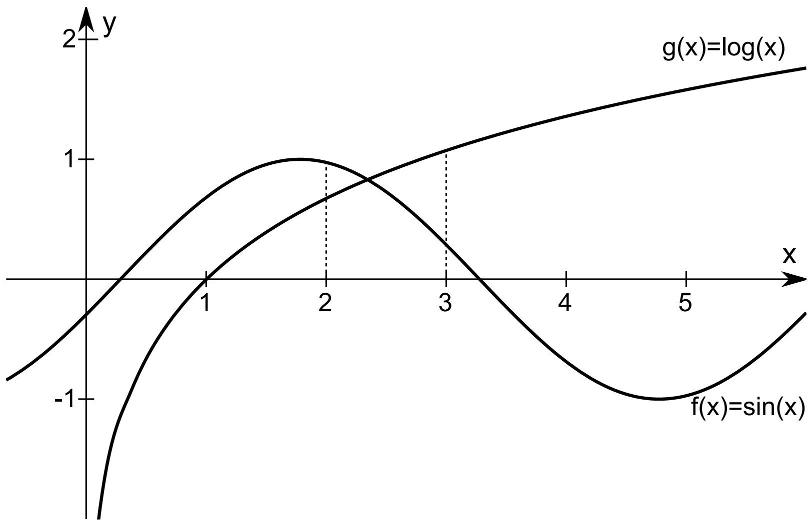


Figura 2.35: Os gráficos de $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \log(x)$ intersectam-se num ponto com abcissa entre 2 e 3.

Para usar o método da bissecção, tomamos $h(x) = \log(x) - \sin(x)$ e vamos resolver a equação $h(x) = 0$, observando que $h(2) < 0$ e $h(3) > 0$. Podemos construir uma tabela como a seguinte.

n	a_n	b_n	c	$h(c)$	Caso
0	2	3	2.5	0.317	(b)
1	2	2.5	2.25	0.033	(b)
2	2	2.25	2.125	-0.096	(a)
3	2.125	2.25	2.188	-0.032	(a)
4	2.188	2.25	2.219	-1.1×10^{-4}	(a)
5	2.219	2.25	2.235	0.016	(b)
6	2.219	2.235	2.227	0.008	(b)
7	2.219	2.227	2.223	0.004	(b)
8	2.219	2.223	2.221	0.002	(b)
9	2.219	2.221	2.220	9×10^{-3}	(b)

Podemos portanto concluir que a solução da equação $\sin(x) = \log(x)$ se encontra no intervalo $[2.219, 2.220]$. Com os meios computacionais disponíveis actualmente, é muito fácil aplicar este método para obter soluções com precisões de oito ou dez casas decimais quase instantaneamente. Note-se que $f(x)$ é zero com três casas decimais para qualquer valor de x naquele intervalo.

A Figura 2.36 mostra a sequência de pontos determinados.

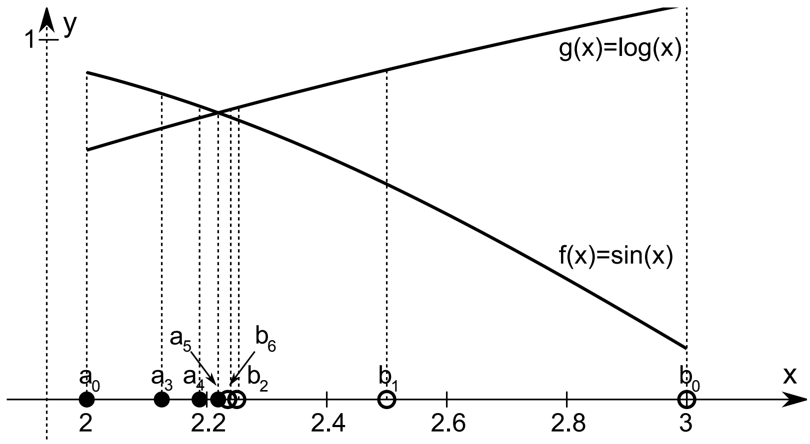


Figura 2.36: Resolução numérica da equação $\sin(x) = \log(x)$.

Exercício 48. Aplique o método da bissecção para encontrar soluções das seguintes equações.

(a) $e^x = 2 - x$ (b) $x^2 - 2x = \sin(x)$ (c) $x^3 - 2x = 3$

O outro resultado terá um interesse teórico nos capítulos seguintes.

Teorema (Weierstrass)**.** Uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ tem mínimo e máximo nesse intervalo.

2.6.5 Determinação de assímptotas de gráficos de funções

A outra aplicação do cálculo de limites ao estudo de funções tem a ver com a determinação de assímptotas. Vimos anteriormente que uma assímptota do gráfico duma função é uma recta da qual o gráfico se aproxima cada vez mais; usando os conceitos que entretanto introduzimos, podemos dizer que o gráfico da função *tende* para a recta.

Vamos começar por analisar os dois casos que vimos atrás (assímptotas horizontais e verticais) para depois vermos uma situação um pouco mais geral. Não vamos incidir demasiado sobre as implicações da determinação das assímptotas na construção de gráficos de funções porque essa questão será abordada no final do Cálculo Diferencial (Secção 3.4), quando dispusermos de todas as técnicas necessárias para efectuar um estudo completo duma função.

Assímptotas horizontais. O gráfico duma função tem uma assímptota horizontal quando, à medida que o valor de x aumenta (ou diminui) indefinidamente, o gráfico se aproxima duma recta horizontal, de equação $y = a$. Isto significa que os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais do valor a, ou que o limite de f quando $x \to +\infty$ (ou $x \to -\infty$) é precisamente a.

Os exemplos que vimos atrás são precisamente deste estilo: a função exponencial tem uma assímptota horizontal à esquerda de equação $y = 0$; e sabemos já que temos

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

Esta função não tem assímptota horizontal à direita, já que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

O outro exemplo de assímptota horizontal que vimos foi o gráfico de $\arctan(x)$, que tem assímptotas $y = -\frac{\pi}{2}$ à esquerda e $y = \frac{\pi}{2}$ à direita. Um pouco de reflexão mostra que de facto se tem

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Mas há muitas outras funções cujos gráficos têm assímptotas horizontais. O exemplo típico envolve funções racionais, mas há muitas outras.

Exemplo.

1. O gráfico da função f definida por $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ tem assímptota horizontal $y = 3$ à direita e à esquerda, visto que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3\,.$$

2. O gráfico da função g definida por $g(x) = \frac{4x^2+2}{-3x^2-3x+1}$ tem assímptota horizontal $y = -\frac{4}{3}$ à direita e à esquerda, pois
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+2}{-3x^2-3x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+\frac{2}{x^2}}{-3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\frac{4}{3}\,.$$

3. O gráfico da função h definida por $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ tem assímptota horizontal $y = 0$ à direita e à esquerda, uma vez que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0\,.$$

4. O gráfico da função g definida por $g(x) = x\left(2e^{\frac{1}{x}} - 2\right)$ tem uma assímptota horizontal em $y = 2$, novamente à direita e à esquerda, uma vez que (conforme vimos atrás)
$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(2e^{\frac{1}{x}} - 2\right) = 2\,.$$

Exercício 49. Determine se as seguintes funções têm assímptotas horizontais e, no caso afirmativo, indique as suas expressões.

(a) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ (b) $g(x) = \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$ (c) $k(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)(x+5)}$ (d) $n(x) = \frac{x^2+2x}{x+2}$

Assímptotas verticais. De forma semelhante, o gráfico de f tem uma assímptota vertical de equação $x = a$ quando, numa vizinhança do ponto a, se aproxima da recta vertical com essa equação. Isto significa que ou à direita ou à esquerda (ou de ambos os lados) de a a função f toma valores cada vez maiores em módulo, ou seja, que *pelo menos um* dos limites laterais $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ é infinito. Se o limite for $+\infty$, a função aproxima-se da metade superior da assímptota; se o limite for $-\infty$, a aproximação é à metade inferior da assímptota.

Note-se que o gráfico de f nunca pode ter uma assímptota vertical nos pontos em que f é contínua, uma vez que nesses pontos ela toma o valor dos seus limites laterais (que não podem portanto ser infinitos). Assim, ao procurar assímptotas verticais vamos cingir-nos aos pontos de acumulação que não pertencem ao domínio da função.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo.

1. O gráfico da função f com expressão $f(x) = \frac{1}{x}$ tem um assímptota vertical de equação $x = 0$. De facto,
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty\,.$$
A aproximação do gráfico à assímptota é à metade inferior, à esquerda, e à metade superior, à direita.

2. Se pensarmos em $g(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, vemos que o gráfico desta função só pode ter uma assímptota vertical no ponto $x = 1$, que é o único ponto que não pertence ao seu domínio. Calculando os limites laterais nesse ponto, temos que
$$\lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{5}{0^\pm} = \pm\infty\,,$$
donde esta função tem uma assímptota vertical nesse ponto. Novamente, a aproximação do gráfico à assímptota é à metade inferior, à esquerda, e à metade superior, à direita.

3. Já a função h definida por $h(x) = \frac{-x^2-3x+2}{\log(x)}$ tem domínio $]0,1[\cup]1,+\infty[$, pelo que pode ter assímptotas verticais nos pontos 0 (à direita) e 1.

   No ponto 0, temos que
$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2-3x+2}{\log(x)} = \frac{2}{-\infty} = 0\,,$$
donde a função é prolongável por continuidade àquele ponto e não tem assímptota vertical.

Quanto ao ponto 1 temos

$$\lim_{x\to 1^\pm} h(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{-x^2-3x+2}{\log(x)} = \frac{-2}{0^\pm} = \mp\infty\,,$$

donde esta função tem uma assímptota vertical nesse ponto. Agora a aproximação do gráfico à assímptota à esquerda de 1 é à metade superior, enquanto que à direita é à metade inferior.

Exercício 50. Determine se as seguintes funções têm assímptotas verticais e, no caso afirmativo, indique as suas expressões.

(a) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ (b) $g(x) = \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$ (c) $k(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)(x+5)}$ (d) $n(x) = \frac{x^2+2x}{x+2}$

Assímptotas oblíquas. Há um outro caso que ainda não considerámos até agora, que é o caso em que o gráfico da função se aproxima duma recta oblíqua (ver Figura 2.37).

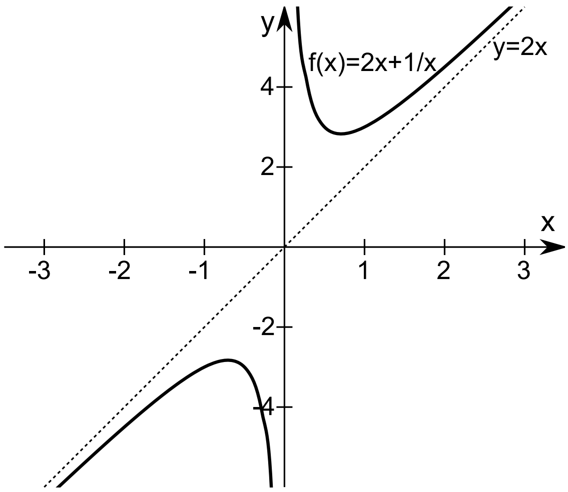


Figura 2.37: Um gráfico duma função com assímptota oblíqua. À medida que o valor de x tende para $\pm\infty$, o gráfico aproxima-se cada vez mais da recta $y = 2x$.

Para que o gráfico de f tenha uma assímptota oblíqua de equação $y = mx + b$ quando $x \to \pm\infty$, é necessário novamente que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (mx+b) = 0\,.$$

Manipulando um pouco esta equação, obtemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (mx+b) = 0 \iff \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (mx+b) = 0 \iff m = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - b}{\lim_{x\to\pm\infty} x} \Longrightarrow m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

donde podemos determinar os coeficientes m e b da assímptota oblíqua, caso esta exista.

Podemos verificar estes valores para a função do exemplo acima. Temos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2x+\frac{1}{x}-2x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

confirmando que a equação da assímptota é de facto $y = 2x$.

Observe-se que no caso particular $m = 0$ obtemos uma assímptota horizontal.

Exemplo.

1. Comecemos novamente por uma função racional: a função h tal que $h(x) = \frac{3x^3-2x}{9-x^2}$. Para determinar se esta função tem assímptotas oblíquas, vamos começar por calcular

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-2x}{9x-x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1} = -3\,.$$

Então esta função pode ter uma assímptota de equação $y = -3x + b$ à esquerda e outra à direita, não necessariamente com o mesmo valor de b. Vamos determinar este valor.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}(h(x)+3x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^3-2x}{9-x^2}+3x\right)\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{3x^3}-2x+27x-\cancel{3x^3}}{9-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{25}{x}}{\frac{9}{x^2}-1} = 0\end{aligned}$$

Concluimos portanto que a recta $y = -3x$ é assímptota à esquerda e à direita do gráfico de h.

2. Consideremos a função g definida por $g(x) = \frac{x^2+e^x}{3x+2}$. Quando x aumenta, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^x}{3x^2+2x} = +\infty$$

uma vez que a exponencial cresce mais rapidamente do que qualquer polinómio. Então o gráfico desta função não tem assímptotas oblíquas à direita.

Já quando x diminui, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+e^x}{3x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{e^x}{x^2}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$$

tendo em conta que a exponencial tende para 0 quando o seu argumento tende para $-\infty$. Então esta função pode ter uma assímptota oblíqua de equação $y = \frac{x}{3} + b$ à esquerda. Para determinar o valor de b, vamos calcular

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-\frac{x}{3}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+e^x}{3x+2}-\frac{x^2+\frac{2x}{3}}{3x+2}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\frac{2x}{3}}{3x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x}-\frac{2}{3}}{3+\frac{2}{x}} = -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

donde a equação da assímptota é $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$.

3. Pode haver situações em que encontramos um valor finito para m sem que contudo haja uma assímptota oblíqua. O exemplo mais simples é o do gráfico da função logaritmo; temos
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x}=0 \text{ mas } \lim_{x\to+\infty}(\log(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty}\log(x)=+\infty\,.$$

Estes exemplos são todos bastante simples, já que não considerámos funções definidas por ramos. Nos exercícios surgem alguns exemplos desse estilo; nesses casos é necessário calcular separadamente os limites quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$ sempre que as expressões que definem a função em cada um desses casos não coincidirem.

Exercício 51. Determine se as seguintes funções têm assímptotas oblíquas e, no caso afirmativo, indique as suas expressões.

(a) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$ (b) $g(x)=\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$ (c) $k(x)=\frac{x^2-4}{(x-2)(x+5)}$ (d) $n(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$

2.7 Exercícios

52. Verifique cada uma das seguintes relações, indicando os valores de x para que faz sentido.

(a) $\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

(b) $\sin(2x)=\frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

(c) $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

(d) $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$

(e) $\frac{\sin(4x)+2\sin(2x)}{\sin(2x)}=4\cos^2(x)$

(f) $\sin(3x)=3\sin(x)\cos^2(x)-\sin^3(x)$

(g) $\cos(3x)=\cos^3(x)-3\sin^2(x)\cos(x)$

(h) $\tan(x)+\cot(x)=\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$

53. Para cada um dos seguintes conjuntos, indique o seu interior, exterior, fronteira e derivado. Quais deles são abertos e quais são fechados?

(a) $\{0\}$

(b) $[0,1]$

(c) $]0,1]$

(d) $]a,a+1[,\ a\in\mathbb{R}$

(e) $]-\infty,2]$

(f) $]-\infty,2[$

(g) $\left]-\frac{1}{2},3\right]\cup]5,+\infty[$

(h) $\{2\}\cup[3,4]$

54. Para cada par de funções abaixo, indique $g\circ f$ e $f\circ g$ e calcule os respectivos domínios.

(a) $f(x)=x^2+1$
$g(x)=2x+3$

(b) $f(x)=x^2+2x$
$g(x)=3x+2$

(c) $f(x)=\frac{1}{x}$
$g(x)=2x$

(d) $f(x)=\frac{1}{x}$
$g(x)=x^2+x$

(e) $f(x)=\log x$
$g(x)=2x$

(f) $f(x)=\log x$
$g(x)=x^2+x$

(g) $f(x)=\sin(x)$
$g(x)=x^2+x$

(h) $f(x)=e^x$
$g(x)=2x$

(i) $f(x)=\sqrt{x}$
$g(x)=x^2+x$

(j) $f(x)=\cos(x)$
$g(x)=e^x$

(k) $f(x)=(x+1)^3$
$g(x)=\log x\sin(x)$

(l) $f(x)=2xe^x$
$g(x)=x^2+1$

(m) $f(x)=\frac{2x}{\tan(x)}$
$g(x)=e^x$

(n) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$
$g(x)=\sin(x)$

(o) $f(x)=\sqrt{x}$
$g(x)=2x$

55. Indique o domínio das seguintes funções.

(a) $f(x) = \frac{\log(3-x)}{\sqrt{x^3+4x}} + \frac{\sqrt{x-1}}{e^x+2} + \sin\left(e^x\right)$ (b) $h(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(c) $g(x) = \sqrt[3]{3-x} + \frac{1}{\log(1-x^2)} + \sqrt{x^2-2x+3}$

56. Para cada uma das seguintes funções, indique o seu domínio e contradomínio e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & x > 3 \end{cases}$

(b) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(c) $f(x) = x + |x|$

(d) $j(x) = \begin{cases} x-2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 4 \\ x-4 & x > 4 \end{cases}$

(e) $k(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases}$

(f) $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 1 \\ -2x+4 & 1 < x < 3 \\ 5 & x \geq 3 \end{cases}$

(g) $m(x) = \sqrt{x^2} - 1$

(h) $h(x) = \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right|$

57. Indique, justificando, os pontos em que as seguintes funções são contínuas.

(a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$

(b) $g(y) = \begin{cases} \frac{3y-2}{1-y} & y \leq 0 \\ \frac{y-2}{y+1} & y > 0 \end{cases}$

(c) $m(y) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+3}{x-1} & x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ \frac{-2}{x^2+1} & x > 1 \end{cases}$

(d) $j(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \leq 0 \\ x\log(2-x) - x & 0 < x < 1 \\ k & x = 1 \\ \frac{x^2-3x+3}{x-1} & x > 1 \end{cases}$

(e) $h(z) = \begin{cases} z^3 \log z & z > 0 \\ \arctan\left(z^2\right) & z \leq 0 \end{cases}$

(f) $p(z) = \log|z|$

(g) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x > 0 \\ \log\left(\arctan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) & x \leq 0 \end{cases}$

(h) $h(x) = \begin{cases} ke^{x+2} & x \leq -2 \\ \frac{x^3-4x}{x+2} & -2 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x\cos(x) + \sin(x) & x > 0 \end{cases}$

58. Para cada uma das seguintes funções, indique, se possível, um valor de k que as torna contínuas em todo o seu domínio.

(a) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x < -1 \\ k & x = 1 \\ 2x + \sin(x-1) & x > 1 \end{cases}$

(c) $g(x) = \begin{cases} \sin(x) & x < 0 \\ x^2+k & 0 \leq x < -1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ -x+3 & x \geq 2 \end{cases}$

(d) $h(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3} & x < -2 \\ x^2+1 & -2 < x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x > 0 \end{cases}$

59. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$

(b) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x^2-6x+14}$

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)+x^2-1\right)$

(d) $\lim\limits_{t\to +\infty} t^2\left(1-\cos\dfrac{1}{t}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^3-4}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x+\pi)$

(g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^{x^2-2x+1}$

(i) $\lim\limits_{x\to 2} e^{2x+1}$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^2+10}{5x^3-2x+4}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(4x)}{\sin(2x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\tan(x)}{\sin(x)}$

(m) $\lim\limits_{t\to 0} \left(e^{\frac{1}{t^2}}-\log(t+1)\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$

(o) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{1+\sqrt{x}}$

(p) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x}{2x^2-1}$

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x^2+5x}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

(s) $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{6t-12}{\sin(5t-10)}$

(t) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

(u) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2)}{h}$

(v) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3x}{4}-x^3\right)$

(w) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)-\log x}{h}$

(x) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}}$

(y) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

60. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin(x)}{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to e} \log\left(3x^2-2\right)$

(c) $\lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{e^t+5}{t+2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(3x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{3x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{1+x}$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{3x^2+2x}{4x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-2x+4}{-2x^2+10}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x^2\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{25x^3+2}{75x^7-2}+\sqrt{x^2+4}\right)$

(p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3\tan^2(x)+5\tan(x)+1}{2-2\tan^2(x)}$

61. Determine (se existirem) as assímptotas das seguintes funções.

(a) $h(x)=\frac{4x-x^2}{9-x^2}$ (b) $j(x)=\frac{10}{x-2}$ (c) $m(z)=\frac{x^2-x-2}{2x^2+x-3}$ (d) $q(t)=\frac{\cos(x)}{x}$

Capítulo 3

Cálculo Diferencial

O Cálculo Diferencial é uma das áreas mais importantes da Análise Matemática, com aplicações em diversas disciplinas: Estatística, Física, Engenharia, Economia, Logística, Investigação Operacional e Biologia, para dar apenas alguns exemplos. Este capítulo pretende ser uma introdução aos conceitos e técnicas fundamentais deste tópico.

O conceito central a todo este estudo é o conceito de derivada, pelo que dispenderemos algum tempo a apresentar várias noções intuitivas do seu significado. Veremos que, embora a sua definição requeira alguma capacidade de abstracção, existem muitas situações do dia-a-dia onde estamos a trabalhar com derivadas — nalguns casos até de forma bem explícita.

Por outro lado, o nosso objectivo fundamental vai continuar a ser o estudo de funções; assim, centrar-nos-emos na aplicação do Cálculo Diferencial à representação gráfica e determinação de propriedades de funções, sem contudo descurar outros exemplos que serão relevantes noutros contextos.

3.1 Noção de derivada

A noção de derivada está ligada ao conceito de variação duma função. Comecemos por ver alguns exemplos de situações comuns em que usamos a variação duma função para resolver problemas concretos.

Problema. Um comboio Intercidades faz a viagem de Lisboa ao Porto (cerca de 300 km) em 3 horas. Quanto tempo demorará a viagem de Lisboa a Coimbra (cerca de 200 km)?

Resolução. À falta de mais informações, é natural assumir que a viagem decorre a uma velocidade aproximadamente constante. Uma vez que o percurso completo de 300 km é realizado em 3 horas, a velocidade média é de $\frac{300}{3} = 100$ km/h, ou seja, o comboio percorre 100 quilómetros em cada hora. Para percorrer 200 km necessitará portanto de duas horas.

Problema. Num determinado dia e numa determinada praia, a maré baixa teve lugar às 7h25 e a maré alta às 19h05. Sabendo que nesse intervalo de tempo a extensão de praia se reduziu de 24 m para 10 m, a que horas é que a praia tinha 20 m de extensão?

Resolução. Tal como atrás, na ausência de outra informação vamos assumir que a maré avançou a um ritmo constante. Uma vez que entre a maré baixa e a maré alta decorreram 11h40m (ou seja, 700 minutos) e que durante esse tempo a água avançou 14 m, a velocidade média é de 1 metro a cada 50 minutos. Se inicialmente a praia tinha 24 m de extensão, esse valor estava reduzido a 20 m depois de a maré avançar 4 m, ou seja, ao fim de $4 \times 50 = 200$ minutos. Portanto, a extensão de praia era de 20 m às 10h45.

Nos exemplos acima, o nosso raciocínio foi semelhante: conhecendo dois valores da função, aproximámos o seu comportamento no intervalo entre eles por uma função linear (ou seja, assumindo que a sua variação é constante). Graficamente, isto corresponde a traçar uma recta entre os dois pontos em que os valores da função são conhecidos; analiticamente, podemos escrever uma expressão explícita para a função (ver Figura 3.1).

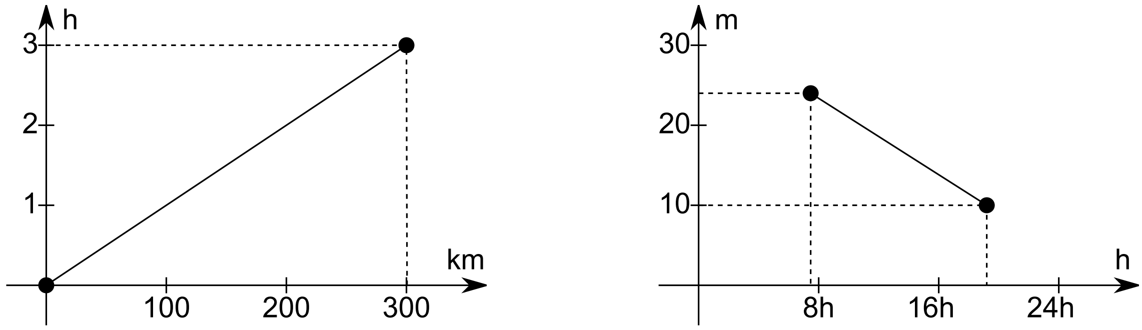


Figura 3.1: Aproximação linear dos gráficos das funções envolvidas nos problemas: distância percorrida pelo comboio em função do tempo (à esquerda) e comprimento da orla de praia ao longo do dia (à direita).

Note-se que nada garante que esta aproximação seja uma boa aproximação. Há infinitos comportamentos distintos que uma função pode ter conhecidos apenas os seus valores em dois pontos, conforme exemplificado na Figura 3.2. Mais, no segundo exemplo a função em causa *não* é de facto linear. Porém, a recta apresentada corresponde à melhor aproximação possível *com os dados conhecidos*. Mais adiante (Secção 3.3) daremos um significado preciso a esta afirmação.

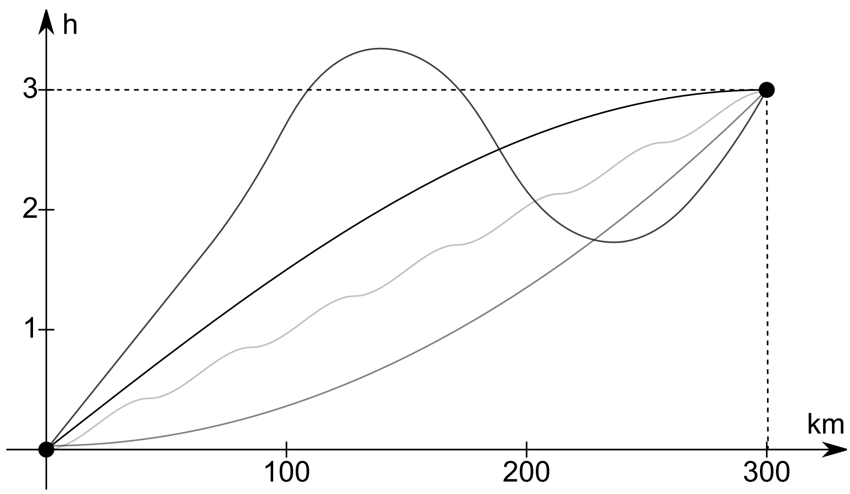


Figura 3.2: Vários comportamentos possíveis duma função passando por dois pontos dados.

A recta que liga os dois pontos conhecidos tem um declive correspondento à variação média da função entre os dois pontos. O seu valor é designado por *taxa de variação média* da função naquele intervalo.

Definição. A *taxa de variação média* duma função f num intervalo $[a, b]$ contido no seu domínio é o valor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Este valor corresponde à variação média num intervalo unitário. Nos problemas acima, temos que:

- a taxa de variação média da posição do comboio é 100 (quilómetros por hora, uma vez que a função indica uma distância em relação a um intervalo de tempo);

- a linha de costa regride 1 metro a cada 50 minutos; tendo em conta que a unidade de tempo é o minuto, a taxa de variação da posição da linha de costa é $-\frac{1}{50}$ (metros por minuto).

Note-se que em ambos os exemplos o cálculo da taxa de variação média foi feito de forma intuitiva, mas o resultado obtido corresponde precisamente ao que seria obtido recorrendo à definição.

Exercício 1.

(a) Um empreiteiro precisa de fazer um orçamento para a colocação dum soalho numa casa de 150 m^2. Sabendo que a mesma equipa demorou 6 dias a colocar um soalho semelhante numa casa de 100 m^2 e 10 dias para uma casa de 200 m^2, quanto tempo é que o empreiteiro pode esperar demorar com este trabalho?

(b) Uma pessoa está a ler um livro a um ritmo aproximadamente constante, tendo já lido duzentas páginas ao longo dum período de seis dias. Qual é a melhor estimativa do tempo que a pessoa demorará a terminar o livro, sabendo que este tem 350 páginas no total?

(c) Como medida de prevenção de incêndios, recorreu-se a rebanhos de cabras para desbastar a vegetação rasteira. Em experiências anteriores, verificou-se que um rebanho com 20 cabras conseguiu limpar numa semana uma área de 2 ha, enquanto que outro maior, com 50 cabras, conseguiu cobrir um terreno de 6 ha no mesmo período de tempo. Qual a dimensão adequada dum rebanho para limpar uma área de 10 ha numa semana?

Exercício 2. Quais as funções envolvidas no exercício anterior? Qual a taxa de variação média de cada uma delas no intervalo considerado? Represente graficamente as aproximações envolvidas.

Exercício 3. Apresentam-se de seguida algumas funções das quais só conhecemos alguns valores. Calcule a taxa de variação média de cada uma delas nos intervalos indicados.

(a) $f(0) = 0$, $f(1) = 35$, intervalo: $[0, 1]$

(b) $g(-1) = 5$, $g(2) = 17$, intervalo: $[-1, 2]$

(c) $h(0) = 2$, $h(5) = 18$, $h(20) = 32$, intervalos $[0, 5]$, $[5, 20]$ e $[0, 20]$

Exercício 4. Represente graficamente cada uma das aproximações do exercício anterior.

Consideremos agora a situação em que conhecemos os valores da função f em todo um intervalo contendo o ponto a. Pode não ser intuitivo, mas em muitas situações práticas continua a ser útil aproximar os valores da função por uma função mais simples (tipicamente uma recta). A razão para este facto prende-se com a existência de erros de cálculo que, em muitas situações, são maiores que o erro da aproximação.

Para recorrer à mesma técnica que usámos atrás, precisamos de considerar a taxa de variação de f num intervalo tendo a como um dos extremos. Contudo, podemos escolher o outro extremo arbitrariamente, uma vez que conhecemos todos os valores de f em pontos próximos de a. Intuitivamente, quanto mais próximo de a for o ponto escolhido, melhor será a aproximação para pontos próximos de a. Graficamente, estamos a aproximar a função por rectas que estão cada vez mais próximas do gráfico da função (ver Figura 3.3).

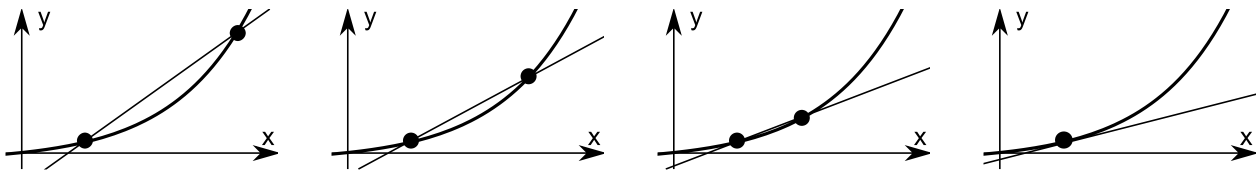


Figura 3.3: Aproximações sucessivas duma função por rectas cada vez mais próximas do seu gráfico na vizinhança dum ponto. As figuras correspondem a aproximações progressivamente melhores.

O que é que acontece se o segunto ponto se aproximar de a? Em termos gráficos, os dois pontos de intersecção da recta de aproximação com o gráfico da função aproximam-se cada vez mais, até obtermos uma recta que é *tangente* ao gráfico de f em a — toca-o exactamente num ponto (o ponto $(a, f(a))$ sem o atravessar. O declive desta recta é o limite da taxa de variação média num intervalo $[a, b]$ quando $b \to a$, a que se chama *taxa de variação instantânea* de f em a ou *derivada* de f em a.

Definição. Seja f uma função definida num intervalo contendo o ponto a. Se existir e for finito o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

então a função diz-se *diferenciável* no ponto a e ao valor $f'(a)$ daquele limite chama-se *derivada* de f em a.

Também se utiliza muitas vezes a formulação (equivalente) que se obtém tomando $h = x - a$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A definição apresentada acima requer que o ponto a seja interior ao domínio de f. Por vezes é interessante calcular a derivada em pontos fronteiros a esse domínio, considerando apenas o comportamento da função de um dos lados do ponto em questão.

Definição. Seja f uma função definida num intervalo $[a, a + \varepsilon[$. A *derivada à direita* de f no ponto a, representada por $f'_d(a)$ ou $f'_+(a)$, é o valor do limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se este limite existir.

Seja f uma função definida num intervalo $]a-\varepsilon, a]$. A *derivada à esquerda* de f no ponto a, representada por $f'_e(a)$ ou $f'_-(a)$, é o valor do limite

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

se este limite existir.

Observe-se que esta definição é aplicável no caso em que a é interior ao domínio de f, e em que portanto faz sentido falar de $f'(a)$. O resultado seguinte é consequência imediata das propriedades dos limites.

Proposição. Seja a um ponto interior ao domínio duma função f. Então $f'(a)$ está definida se e só se se ambas as derivadas laterais de f em a estiverem definidas e se tiver $f'_+(a) = f'_-(a)$.

O conceito de derivada é o conceito fundamental do Cálculo Diferencial. Da definição (analítica) obtemos a sua interpretação física: corresponde à variação instantânea da função f naquele ponto. Da representação gráfica obtemos a sua interpretação geométrica: é o declive da recta tangente ao gráfico de f no mesmo ponto. Estas duas interpretações são fundamentais e tornam muitos dos resultados mais relevantes do Cálculo Diferencial bastante intuitivos.

Contrariamente ao que à primeira vista possa parecer, o conceito de derivada faz parte do nosso quotidiano — e mais uma vez compreender estes exemplos é uma boa forma de ganhar intuição para o conceito geral. Vejamos algumas situações em que diariamente contactamos com derivadas.

Exemplo. Vimos num dos exemplos anteriores que a distância percorrida por unidade de tempo (velocidade média) correspondia à taxa de variação média da função distância percorrida. Considerando intervalos de tempo cada vez menores, obtemos um limite — a velocidade instantânea — que corresponde dalguma forma à variação instantânea da distância percorrida.

A velocidade instantânea é talvez o paradigma da derivada, por ser historicamente uma das primeiras situações em que foi identificado como tal. Tem ainda a vantagem de ser extremamente intuitivo mas representativo do tipo de resultados que encontraremos no Cálculo Diferencial: se dois carros andarem com velocidades instantâneas diferentes, aquele que tiver velocidade maior percorre maior distância; e se a velocidade dum carro for 0 então o carro está parado (a distância percorrida não varia).

É ainda de salientar que a velocidade instantânea não é uma grandeza abstracta — todos os automóveis vêm equipados com um velocímetro, que, de certa forma, não é mais que um medidor de derivadas.

Na Física é comum chamar velocidade a grandezas que são derivadas de outras, mesmo que não correspondam propriamente a movimentos: velocidade de propagação duma onda, velocidade de sedimentação duma solução, velocidade de desintegração de elementos radioactivos... No entanto, não é só na Física que as derivadas ocorrem.

Exemplo. Nos automóveis mais recentes, é comum encontrar um medidor de consumo. Este indica o consumo actual de combustível do veículo, medido no número de litros que gastaria em cem quilómetros percorridos em iguais circunstâncias.

Mais uma vez, o valor apresentado corresponde a uma taxa de variação instantânea, sendo o limite da variação do consumo em intervalos de tempo cada vez mais pequenos.

Exemplo. Os resumos das bolsas financeiras indicam sempre as variações dos títulos e dos índices relativamente ao dia anterior. Porém, com a informatização destas instituições, é possível determinar essas variações à mesma escala de tempo das transacções (tipicamente, a cada 5 segundos). Determinando a taxa de variação nesses intervalos, obtém-se uma aproximação da derivada do valor do título ou do índice, que é usada para fazer análise e previsão dos movimentos bolsistas.

Antes de começarmos a calcular derivadas, importa fazer duas observações. A primeira é muito simples: se f for diferenciável num ponto a, então o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe e é finito; uma vez que o denominador daquela fracção é um infinitésimo, a única forma de o limite convergir é o numerador também ser um infinitésimo, ou seja, de se ter $\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0$, donde $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ e portanto f é contínua em a. Obtém-se então o resultado seguinte, de grande importância prática.

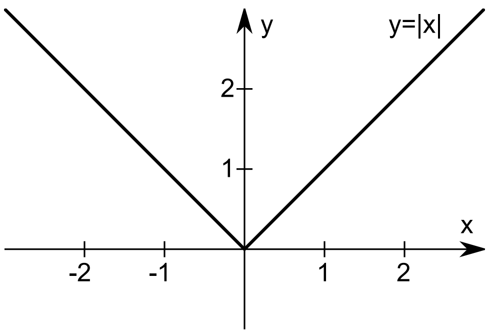
Proposição. Seja f uma função definida numa vizinhança dum ponto a.

- Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

- Se f não é contínua em a, então f não é diferenciável em a.

Contudo, sabendo que f é contínua em a, nada podemos concluir sobre a sua diferenciabilidade nesse ponto, conforme o seguinte exemplo mostra.

Exemplo. Considere-se a função módulo, cujo gráfico é o seguinte.



Esta função é contínua em 0, mas não é diferenciável naquele ponto: da análise da figura é imediato concluir que não há uma única recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0)$. Analiticamente, poderíamos considerar as duas sucessões

$$u_n=\frac{1}{n} \text{ e } v_n=-\frac{1}{n}\,,$$

que são infinitésimos, e observar que

$$\frac{|u_n|-|0|}{u_n-0}=1 \text{ e } \frac{|v_n|-|0|}{v_n-0}=-1$$

para qualquer valor de n para concluir que

$$\lim\frac{|u_n|-|0|}{u_n-0}=1 \text{ e } \lim\frac{|v_n|-|0|}{v_n-0}=-1$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$$

não existe.

A outra observação é consequência desta. Para $f'(a)$ estar definido, a função f tem de ser contínua em a, donde o limite $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Por outro lado, $\lim_{x\to a} x = a$. Então o limite na definição de derivada produz sempre uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ — pelo que é importante ter presentes as técnicas de levantamento deste tipo de indeterminação.

Vejamos alguns exemplos concretos.

Exemplo.

1. Um veículo move-se ao longo duma estrada, sendo a sua posição (em quilómetros) dada em função do tempo (em horas) por $f(t) = 60t + 15t^2$, para $t \in [0, 2]$.

   Para calcular a velocidade do veículo no instante $t = 1$, vamos recorrer à definição de derivada.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} &= \lim_{t\to 1} \frac{60t + 15t^2 - 75}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{15t(t+4) - 75}{t-1} \\ &= \lim_{t\to 1} \frac{15t(t-1) + 75(t-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} 15t + 75 = 90\end{aligned}$$

   No segundo passo, recorremos à divisão de ambos os polinómios ocorrentes na fracção por $t - 1$. Concluímos assim que, ao fim de uma hora, o veículo se move a 90 km/h.

2. Ao longo de dois dias, uma barragem enche-se de água e depois descarrega, sendo a quantidade de água (em metros cúbicos) no reservatório dada por

$$f(t) = \begin{cases} 200 + 100t & 0 \le t \le 24 \\ 2600 - 50t & 24 \le t \le 48 \end{cases}$$

   em função do tempo (em horas).

   Em qualquer instante t_0 do primeiro dia, a barragem está a receber um caudal dado por

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t\to t_0} \frac{(200 + 100t) - (200 + 100t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{100\,(t - t_0)}{t - t_0} \\ &= 100\end{aligned}$$

   metros cúbicos por hora. Ao longo do segundo dia, o caudal a cada instante é

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t\to t_0} \frac{(2600 - 50t) - (2600 - 50t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{-50\,(t - t_0)}{t - t_0} \\ &= -50\end{aligned}$$

   correspondendo a um débito de 50 metros cúbicos por hora.

3. Considere-se agora a função definida por $f(x) = \sin(x)$. A derivada de f no ponto 0 é 1, pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

   recorrendo aos resultados vistos na Secção 2.6.3.

4. A temperatura em graus Celsius duma dada placa deixada ao ar para arrefecer é dada pela expressão $T(t) = 20 + 100e^{-t}$, onde t é o tempo em minutos decorrido desde o instante em que se iniciou o arrefecimento.

   Em $t = 1$, a temperatura da placa é $T(1) \approx 56.8$ ºC. A variação da temperatura nesse instante é dada pela derivada $T'(1)$.

$$\begin{aligned}
T'(1) &= \lim_{t\to 1} \frac{T(t) - T(1)}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{(20 + 100e^{-t}) - (20 + 100e^{-1})}{t-1} \\
&= \lim_{t\to 1} 100\frac{e^{-t} - e^{-1}}{t-1} = \lim_{t\to 1}\left(-\frac{100}{e}\frac{e^{-(t-1)} - 1}{-(t-1)}\right) \\
&= -\frac{100}{e}
\end{aligned}$$

   Conclui-se que a variação da temperatura no instante $t = 1$ é dada por $-\frac{100}{e} \approx 36.8$ graus por minuto.

   Num ponto genérico t_0 (positivo), a variação da temperatura pode ser calculada (em função de t_0) de forma semelhante.

$$\begin{aligned}
T'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{T(t) - T(t_0)}{t-t_0} \\
&= \lim_{t\to t_0} \frac{(20 + 100e^{-t}) - (20 + 100e^{-t_0})}{t-t_0} \\
&= \lim_{t\to t_0}\left(-100e^{-t_0}\frac{e^{-(t-t_0)} - 1}{-(t-t_0)}\right) \\
&= -100e^{-t_0}
\end{aligned}$$

   Substituindo t_0 por t na última expressão, obtemos a expressão função que representa a taxa instantânea da variação da temperatura:

$$T'(t) = -100e^{-t}\,.$$

5. Considere-se a curva definida pela expressão $y = x^2$. Para determinar a equação da recta tangente a esta curva num ponto arbitrário (x_0, y_0), onde $y_0 = x_0^2$, começamos por calcular a derivada da expressão $y = x^2$ num ponto genérico x_0.

$$\begin{aligned}
y'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} (x+x_0) \\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

   Assim, a recta tangente ao gráfico num ponto arbitrário (x_0, y_0) tem declive $2x_0$. Então, a sua equação é $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$. Por exemplo, a tangente na origem tem equação $y = 0$; a tangente em $(1, 1)$ tem equação $y - 1 = 2(x - 1)$, ou $y = 2x - 1$; e a tangente em $(-2, 4)$ é a recta de equação $y - 4 = -4(x + 2)$, ou $y = -4x - 4$ (ver Figura 3.4).

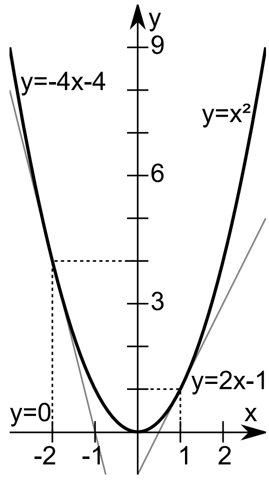


Figura 3.4: Rectas tangentes à curva $y = x^2$.

Exercício 5. Calcule as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados.

(a) $f(x) = 2x + 3$ no ponto $x = 1$.

(b) $g(t) = t^2 - 2t$ nos pontos $t = 0$ e $t = -2$.

(c) $u(y) = 1 - e^y$ nos pontos $y = 1$ e $y = -1$.

(d) $u(y) = 1 - e^y$ num ponto genérico y.

Os últimos exemplos apresentados ilustram um fenómeno importante. Dada uma função f, podemos definir uma nova função nos pontos em que f é diferenciável.

Definição. Seja f uma função real. À função f' definida nos pontos em que f é diferenciável cujo valor $f'(x)$ é precisamente a derivada de f no ponto x chama-se *função derivada* de f.

Também é frequente usar a notação $\frac{df}{dx}$ para a função derivada de f, por questões históricas relacionadas com algumas aplicações que serão discutidas mais adiante. Em particular, em situações em que definimos uma função como $y = f(x)$ sem explicitar o nome da função f (por exemplo, ao escrever $y = x^2$ ou $y = \sin(3x)$), é útil poder escrever $\frac{dy}{dx}$ para designar a derivada desta função.

Assim, no exemplo anterior da placa cuja temperatura era dada por $T(t) = 20 + 100e^{-t}$, podemos dizer que a *derivada* da função temperatura é a função $T'(t) = -100e^{-t}$ — que não é senão outra forma de afirmar que a variação instantânea da temperatura num instante t positivo é dada por aquela expressão. No exemplo de determinação das tangentes ao gráfico de $y = x^2$, podemos escrever $\frac{dy}{dx} = 2x$ para indicar que o declive daquela tangente num ponto genérico de abcissa x é $2x$.

Exercício 6. Qual é a derivada da função $u(y) = 1 - e^y$?

Uma vez que a função f' é novamente uma função, podemos calcular a sua derivada. Esta função chama-se a *segunda derivada* de f e designa-se habitualmente por f'' ou $f^{(2)}$. Repetindo este raciocínio, obtemos o conceito de terceira derivada, quarta derivada, ou derivada de ordem n, denotadas por f''' ou $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ e $f^{(n)}$. As derivadas de ordem superior de f serão importantes nalgumas aplicações que veremos adiante.

Definição. Uma função diz-se n *vezes diferenciável* num intervalo $]a,b[$ se a sua derivada de ordem n existir e for uma função contínua. Uma função diz-se *infinitamente diferenciável* num intervalo $]a,b[$ se tiver derivadas contínuas de todas as ordens.

3.2 Cálculo de derivadas de funções elementares

A definição de derivada é útil em termos conceptuais, uma vez que nos dá uma interpretação para o seu significado. Porém, em termos práticos, não é uma definição algorítmica, no sentido em que não é simples calcular derivadas a partir da definição. Nesta secção vamos ver como, a partir dum conjunto relativamente reduzido de resultados fundamentais, podemos determinar regras de cálculo que nos permitirão calcular sem esforço derivadas de funções com expressoes extremamente complexas.

Conforme já foi referido, em todos os exemplos desta secção vamos encontrar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$; assim, aplicaremos sem o referir explicitamente as técnicas usuais de levantamento deste tipo de indeterminação.

3.2.1 Funções polinomiais

Comecemos por considerar o caso muito simples duma função f constante. Observe-se que o gráfico de f é uma recta horizontal, pelo que a tangente a este gráfico em qualquer ponto é novamente uma recta horizontal, portanto com declive 0. Em termos de variação, a variação de f em qualquer intervalo é 0, pelo que se espera que a sua taxa de variação instantânea seja 0 em qualquer ponto. De facto, designando por k o valor da função em qualquer ponto, tem-se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{k-k}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0$$

Igualmente, se o gráfico de f for uma recta (não necessariamente horizontal), a tangente em qualquer ponto é a própria recta. Tal como atrás, podemos verificar este facto analiticamente. Seja $f(x)=mx+b$; tem-se então

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(mx+b)-(mx_0+b)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{m(x-x_0)}{x-x_0}=m\,.$$

Exercício 7. Calcule a derivada de $f(x)=x^2+2$ através da definição.

Para os exemplos seguintes, vamos recorrer à observação feita a seguir à definição deste conceito e calcular $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Comecemos por calcular a derivada de x^3. Para tal, começamos por observar que

$$(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\,,$$

relação que pode ser obtida por cálculo directo ou por aplicação do binómio de Newton.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

Então $(x^3)'=3x^2$.

Consideremos agora uma função da forma x^n, com n inteiro positivo. Para calcular a sua derivada podemos, tal como atrás, recorrer à fórmula do binómio de Newton para desenvolver o polinómio $(x+h)^n$. Em alternativa, podemos examinar directamente a expansão deste polinómio:

- escolhendo o termo x em todas as parcelas, obtém-se x^n;
- escolhendo o termo h numa parcela e x em todas as restantes, obtém-se $x^{n-1}h$; há n formas de fazer esta escolha, pelo que no resultado final aparece um termo $nx^{n-1}h$;
- todos os termos restantes são obtidos escolhendo pelo menos duas vezes um termo em h, pelo que podemos escrever a sua soma como $h^2P(x,h)$, em que $P(x,h)$ é um polinómio em x e h.

Temos então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+h^2P(x,h)-\cancel{x^n}}{h}=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+hP(x,h)=nx^{n-1}$$

donde $(x^n)'=nx^{n-1}$. Observe-se que o exemplo anterior é um caso particular deste.

Exercício 8. Indique a derivada das funções $y=x^4$ e $y=x^7$.

Exercício 9. Recorra à definição de derivada para calcular a derivada de $f(x)=x^2+2x$.

Apresentam-se de seguida mais alguns exemplos.

Exemplo.

1. Considere-se $y=\frac{1}{x}$. O cálculo de $\frac{dy}{dx}$ é simples:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{x(x+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}}=-\frac{1}{x^2}$$

   Observe-se que, escrevendo $\frac{1}{x}=x^{-1}$, esta derivada continua a ser calculada pela regra anteriormente deduzida para polinómios: $(x^{-1})'=-1x^{-2}$. Contudo, esta relação só é válida nos pontos em que a função é contínua — em particular, $\frac{1}{x}$ não é diferenciável em $x=0$.

2. A partir do desenvolvimento de $(x+h)^n$ atrás considerado, é fácil calcular também a derivada de $\frac{1}{x^n}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^n}\right)'&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^n}-\frac{1}{x^n}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x^n+nx^{n-1}h+h^2P(x,h)}-\frac{1}{x^n}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{x^n}-\left(\cancel{x^n}+nx^{n-1}\cancel{h}+h^{\cancel{2}}P(x,h)\right)}{x^n(x^n+nx^{n-1}h+h^2P(x,h))}}{\cancel{h}}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-\left(nx^{n-1}+hP(x,h)\right)}{x^n\left(x^n+nx^{n-1}h+h^2P(x,h)\right)}\\&=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{n}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

   Mais uma vez, podemos escrever esta regra como $x^{-n}=-nx^{-n-1}$.

3. Vamos agora calcular a derivada de $\sqrt{x}$. Para levantar esta indeterminação, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fracção pelo conjugado do numerador, $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Ainda aqui, temos $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ e aplica-se a regra da potência: $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Note-se que, tal como nos exemplos anteriores, esta regra só é válida no interior do domínio da função — ou seja, para $x>0$.

Pode de facto mostrar-se (mas não o faremos neste ponto) que a regra de derivação da potência se aplica para uma potência de *qualquer* expoente diferente de 0: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ para qualquer número real α. Assim, é de todo o interesse representar funções algébricas de x sempre sob a forma de potência.

Vejamos alguns exemplos.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
\left(\sqrt{x^7}\right)' &= \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2\sqrt{x^5}} \\
\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' &= \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}
\end{aligned}$$

O resultado também se aplica a números irracionais.

$$\begin{aligned}
(x^\pi)' &= \pi x^{\pi-1} \\
\left(x^{\sqrt{2}}\right)' &= \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

Exercício 10. Calcule $\frac{dy}{dx}$ nas seguintes situações.

(a) $y=\frac{1}{x^3}$ (b) $y=\sqrt[4]{x}$ (c) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (d) $y=\sqrt{x^{-3}}$ (e) $y=x^{2\sqrt{2}+1}$

Antes de prosseguirmos com a derivação de outro tipo de funções, vamos estudar duas propriedades muito simples e intuitivas da operação de derivação que nos permitirão calcular derivadas de qualquer polinómio.

Um polinómio arbitrário é construído a partir de potências de x por somas e multiplicações por constantes. Por exemplo, $3x^2 + 2x$ é a soma de $3x^2$ com $2x$; o primeiro destes é o produto de x^2 pela constante 3, o segundo é o produto do polinómio x pela constante 2.

Quando somamos duas funções, a derivada do resultado é a soma das derivadas de cada uma delas: em termos de taxa de variação, estamos a dizer que a variação da soma é a soma das variações de cada uma delas, o que intuitivamente faz sentido. De facto, se f e g forem duas funções reais diferenciáveis num ponto a, tem-se

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)+g'(a)
\end{aligned}$$

confirmando o que foi dito.

Da mesma forma, se multiplicarmos uma função por uma constante, a derivada do resultado é o produto dessa constante pela derivada da função original. Mais uma vez, em termos de taxa de variação, se multiplicarmos uma função por uma constante, a derivada do resultado é o produto dessa constante pela derivada da função original. Seja c um número real qualquer. Então

$$\begin{aligned}
(cf)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} \\
&= c \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= cf'(a)
\end{aligned}$$

confirmando o resultado esperado.

Observe-se que este resultado também é válido se considerarmos apenas derivadas laterais, uma vez que apenas depende de propriedades dos limites.

Proposição.

- A soma $f+g$ de duas funções reais f e g é uma função que é diferenciável onde f e g o forem, satisfazendo a relação $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$ para esses números reais x.

- A função cf, produto de uma função real f por um número real c, é uma função que é diferenciável onde f o for, satisfazendo a relação $(cf)'(x) = cf'(x)$ para esses números reais x.

Recorrendo à terminologia da Álgebra Linear, estes resultados expressam que a operação de derivação é um operador linear no espaço de todas as funções.

Aproveitando o exemplo anterior, a derivada de $3x^2 + 2x$ é $6x + 2$, obtida como o produto de 3 pela derivada de x^2 (ou seja, $3 \times 2x$) somado com a derivada de $2x$ (que vimos atrás ser 2). Simbolicamente,

$$\left(3x^2 + 2x\right)' = \left(3x^2\right)' + (2x)' = 3\left(x^2\right)' + (2x)' = 3 \times 2x + 2 = 6x + 2\,.$$

Com um pouco de prática, os passos intermédios fazem-se mentalmente.

Exemplo. O mesmo raciocínio permite calcular as seguintes derivadas.

$$\begin{aligned}\left(2x^3 - 2x^2\right)' &= \left(2x^3\right)' + \left(-2x^2\right)' = 2\left(x^3\right)' - 2\left(x^2\right)' \\ &= 2 \times 3x^2 - 2 \times 2x = 6x^2 - 4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^4 + 3x^3 - 2x^2\right)' &= \left(x^4\right)' + 3\left(x^3\right)' - 2\left(x^2\right)' \\ &= 4x^3 + 9x^2 - 4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(3\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{5}x^2\right)' &= 3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - 2\left(x^{-3}\right)' - \frac{1}{5}\left(x^2\right)' \\ &= 3 \times \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2 \times -3x^{-4} - \frac{1}{5} \times 2x \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{x^4} - \frac{2x}{5}\end{aligned}$$

Exercício 11. Calcule a derivada das seguintes funções de x.

(a) $x^3 + 2x^2 - x + 2$

(b) $3x^4 - 2x^2 + 9$

(c) $3\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2}$

(d) $\frac{x^3+2x^2-3x+1}{x}$

(e) $\frac{3+2x}{x^2}$

(f) $\frac{\sqrt{x}}{5} - \frac{5}{\sqrt{x}}$

É importante salientar que as regras até aqui deduzidas (bem como as que veremos mais adiante) também são aplicáveis para o cálculo de derivadas laterais desde que a expressão corresponda à definição da função do lado do ponto em que se quer calcular a derivada (à direita ou à esquerda). A título ilustrativo, vamos mostrar analiticamente que a função módulo não tem derivada no ponto 0 (exemplo da página 128).

A função módulo pode ser definida analiticamente como

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases},$$

onde a ambiguidade no ponto 0 não é problema: a função é contínua nesse ponto, pelo que ambas as expressões conduzem ao mesmo valor (nomeadamente, 0).

Então temos que $\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}x = 1$ para $x > 0$; uma vez que a relação $|x| = x$ é válida para o ponto 0 e à sua direita, podemos ainda afirmar que a derivada de $|x|$ à direita na origem também é 1.

Por outro lado, para $x < 0$ tem-se $\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}(-x) = -1$, e analogamente ao que argumentámos no parágrafo anterior concluímos que também a derivada desta função à esquerda da origem é -1.

Tem-se então que no ponto 0 a função módulo tem derivada 1 à direita e -1 à esquerda; uma vez que estes valores são distintos, a função não é diferenciável na origem.

Exemplo.

1. Considere-se a função f definida por ramos da seguinte forma.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - 3t & t \geq 2 \\ 3t - 8 & t < 2 \end{cases}$$

Esta função é contínua no ponto $t = 2$, pois $\lim_{t\to 2^+} f(t) = -2 = \lim_{t\to 2^-}$. À esquerda de 2, a sua derivada é dada por $\frac{d}{dt}(3t-8) = 3$, sendo este valor ainda válido para $f'_-(2)$, enquanto que à direita de 2 a derivada de f é dada pela expressão

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 - 3t\right) = 2t - 3\,,$$

sendo esta expressão também válida para $f'_+(2)$. Então

$$f'_-(2) = 3 \neq 1 = f'_+(2)\,,$$

pelo que a função não é diferenciável no ponto 2.

2. Considere-se agora a função g definida como se segue.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} + 2 & x \geq 1 \\ -2x^2 + 6 & -1 < x < 1 \\ x^3 + x & x \leq -1 \end{cases}$$

A função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Para $x \neq \pm 1$ isto decorre da definição; para $x = 1$ os limites laterais de $g(x)$ são ambos iguais a 4, enquanto que para $x = -1$ os limites laterais de $g(x)$ são diferentes: o limite à esquerda vale -2, enquanto que o limite à direita vale 4.

Relativamente à derivada de g, ela é dada pela expressão $-\frac{4}{x^3}$ no intervalo $]1, +\infty[$, pela expressão $-4x$ em $]-1, 1[$ e pela expressão $3x^2 + 1$ em $]-\infty, -1[$. No ponto -1 a função não é contínua, pelo que não é diferenciável; a derivada à esquerda pode ainda ser calculada pela última expressão, obtendo-se $f'_-(-1) = 4$; já a derivada à direita teria de ser calculada directamente pela definição, obtendo-se $f'_+(-1) = +\infty$.

Quanto ao ponto 1, podemos usar as expressões acima deduzidas para g' nos intervalos a que este ponto é fronteiro para obter $g'_-(1) = -4 = g'_+(1)$. Conclui-se portanto que a expressão geral de $g'(x)$ é

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^3} & x \geq 1 \\ -4x & -1 < x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & x < -1 \end{cases}$$

não estando definida para $x = -1$.

É importante salientar que $g'_+(-1)$ *não* pode ser obtido pela fórmula $-4x$ da derivada em $]-1, 1[$. Essa fórmula só é válida em pontos em que a função é contínua, o que não é o caso à direita de -1.

Exercício 12. Estude as seguintes funções definidas por ramos quando à diferenciabilidade.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+1 & x \leq 0 \\ 1-\sqrt{x^3} & x > 0 \end{cases}$

(b) $g(t) = \begin{cases} 3t-2 & t < -1 \\ t^2+\sqrt[3]{t} & -1 \leq t \leq 2 \\ 4+\sqrt[3]{2} & t > 2 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^3+2x+1 & x < -1 \\ -2x^2+x+1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^4}{4}-\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+\frac{29}{12} & x \geq 1 \end{cases}$

(d) $u(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}+\frac{2}{y} & y \leq 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{y} & y > 1 \end{cases}$

3.2.2 Funções trigonométricas

Passemos agora às funções trigonométricas. Aqui, a técnica usada para levantar a indeterminação é aplicar identidades trigonométricas para expandir expressões como $\sin(x+h)$ e reduzir o problema ao cálculo de limites conhecidos.

Por exemplo, para calcular a derivada de $\sin(x)$ temos

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \sin(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0}+\cos(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{1} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

donde $\sin(x)' = \cos(x)$.

Exercício 13. Calcule a derivada de $\cos(x)$.

Embora possamos utilizar a mesma técnica para calcular a derivada das restantes funções trigonométricas, os resultados mais gerais que vamos deduzir mais adiante tornarão esta tarefa muito mais simples.

Relacionando com os resultados anteriores sobre somas e produtos por constantes, podemos calcular derivadas de funções mais complexas, como por exemplo $2\sin(x)+3\cos(x)-x^2$.

Exercício 14. Calcule a derivada das seguintes funções de x.

(a) $2\sin(x)+3\cos(x)-x^2$ (b) $3\sqrt{x}-\sin(2)\cos(x)$ (c) $\sin(x+2)$

Sugestão: na última alínea, use a fórmula para expandir $\sin(x+2)$ em termos de funções trigonométricas de x e de 2.

3.2.3 Regra da cadeia

As regras de que dispomos até agora não nos permitem calcular a derivada de $\sin(2x)$, por exemplo. De facto, esta função é um exemplo de uma função composta, pelo que a sua derivada se obtém por um processo distinto.

Recordemos a noção de composição. Para calcular valores de $\sin(2x)$ temos de proceder em dois passos: primeiro, dado x, calcular $y = 2x$ (aplicando a função $x \mapsto 2x$); segundo, a partir de $y = 2x$ calcular $\sin(y)$ (aplicando a função $y \mapsto \sin(y)$).

Para compreender o que se passa em termos de derivada, comparemos os gráficos das duas funções $f(x) = \sin(x)$ e $h(x) = \sin(2x)$ (ver Figura 3.5).

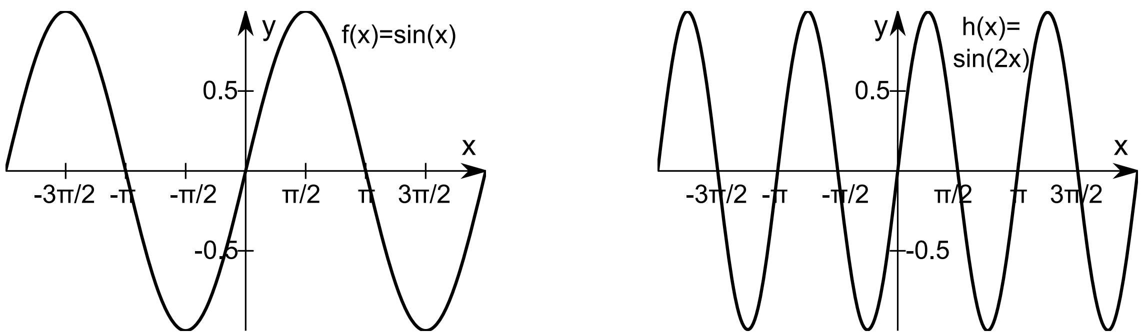


Figura 3.5: Regra da cadeia: comparação dos gráficos de $f(x) = \sin(x)$ e $h(x) = \sin(2x)$.

O gráfico de h pode ser obtido do gráfico de f "espalmando-o" na direcção do eixo dos xx. Como resultado, a função h varia duas vezes mais depressa do que a função f no ponto correspondente: para calcular a taxa de variação de h num ponto x, vamos olhar para o ponto correspondente do gráfico de f (o ponto de abcissa $2x$), calcular a derivada correspondente ($f'(2x) = \cos(2x)$) e multiplicar pelo factor de "espalmamento" (2). Ou seja, a derivada de h num ponto genérico x deverá ser $h'(x) = 2\cos(2x)$.

Vendo h como a composição das duas funções $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = 2x$, observe-se que este resultado pode ser lido como o produto da derivada de f no ponto $y = 2x$ pela derivada de g no ponto x. Esta expressão é generalizável; num caso geral de composição $h(x) = f(g(x))$, o gráfico de h pode-se obter do gráfico de f "espalmando-o" ou "dilatando-o" por um factor que é dado em cada ponto x pela derivada de $g(x)$. Esse factor vai ser o factor de correcção da derivada de f para a derivada de h.

Analiticamente, podemos confirmar este resultado recorrendo ao cálculo directo da derivada de $f(g(x))$ num ponto arbitrário x_0. Para levantar a indeterminação, vamos multiplicar e dividir a fracção pelo incremento $g(x) - g(x_0)$ e assumir que ambas as funções são diferenciáveis nos pontos convenientes (g em x_0 e f em $g(x_0)$).

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{g(x) \to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{f'(g(x_0))} \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{g'(x_0)}
\end{aligned}$$

A mudança de variável no primeiro limite é lícita devido à continuidade de g em x_0. Observe-se que, fazendo $y = g(x)$ e $z = f(y)$, esta regra pode ser escrita de forma sugestiva como

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Proposição. Sejam f e g duas funções reais. A função $f \circ g$ é diferenciável nos pontos x tais que:

- g é diferenciável em x;
- f é diferenciável em $g(x)$.

Nesses pontos, a derivada de $f \circ g$ é dada pela *regra da cadeia*: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

O nome desta regra (regra da cadeia) vem da sua generalização a composições de mais do que duas funções. Por exemplo: suponhamos que tínhamos uma função definida por uma sequência de operações

$$w(x) : x \mapsto y(x) \mapsto z(y) \mapsto t(z) \mapsto u(t)\,.$$

A derivada de w é calculada como uma cadeia de derivadas de cada uma das funções envolvidas:

$$w'(x) = u'(t) \times t'(z) \times z'(y) \times y'(x)$$

obtida avaliando cada uma das derivadas no ponto correspondente. Expandindo a notação, obter-se-ia a relação (bastante menos legível)

$$w'(x) = u'(t(z(y(x)))) \times t'(z(y(x))) \times z'(y(x)) \times y'(x)$$

ou, alternativamente,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dz}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Exemplo.

1. Comecemos por calcular a derivada de $f(x) = \sin(2x)$ pela regra da cadeia. Fazendo $z = f(x)$, temos que $z = \sin(y)$ com $y = 2x$, donde

   $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\sin(y)\,\frac{d}{dx}(2x) = \cos(y) \times 2 = 2\cos(2x)$$

   como atrás tínhamos referido.

2. A mesma regra permite-nos calcular directamente a derivada de $\sin(x+2)$. Fazendo $z = \sin(x+2)$, temos agora $z = \sin(y)$ com $y = x+2$, pelo que

   $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\sin(y)\,\frac{d}{dx}(x+2) = \cos(y) \times 1 = \cos(x+2)\,.$$

3. Também a derivada de $\cos(x)$ pode ser obtida pela regra da cadeia, atendendo à relação $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Temos agora $z = \sin(y)$ e $y = \frac{\pi}{2} - x$, donde

   $$\begin{aligned}(\cos(x))' &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\sin(y)\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos(y) \times -1 = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)\end{aligned}$$

   atendendo à igualdade $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

4. Para calcular a derivada de $\cos(3x^2+2)$, vamos fazer $z = \cos(y)$ com $y = 3x^2+2$. Da regra da cadeia obtemos agora

$$\begin{aligned}\left(\cos\left(3x^2+2\right)\right)' &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\cos(y)\,\frac{d}{dx}\left(3x^2+2\right)\\ &= -\sin(y)\times 6x = -6x\sin\left(3x^2+2\right)\,.\end{aligned}$$

5. Podemos também calcular derivadas de potências (ou polinómios) de senos e cosenos exactamente da mesma forma. Por exemplo: para calcular a derivada de $3\cos^3(x)$, vemos esta função como a composição de $z = 3y^3$ com $y = \cos(x)$ e obtemos

$$\begin{aligned}\left(3\cos^3(x)\right)' &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}3y^3\,\frac{d}{dx}\cos(x)\\ &= 9y^2\times(-\sin(x)) = -9x\sin(x)\cos^2(x)\,.\end{aligned}$$

6. Finalmente, usemos este mesmo processo para calcular a derivada de $\sec(x)$. Atendendo à relação $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, podemos escrever $z = \frac{1}{y}$ e $y = \cos(x)$, obtendo

$$\begin{aligned}(\sec(x))' &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\frac{1}{y}\,\frac{d}{dx}\cos(x)\\ &= -\frac{1}{y^2}\times(-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \tan(x)\sec(x)\,.\end{aligned}$$

Exercício 15. Use a regra da cadeia para calcular a derivada das seguintes funções de x.

(a) $\cos\left(\sqrt{x}+3x^2\right)$ (c) $3\sin^2(x)$ (e) $\frac{2}{\sin^2(x)}$ (g) $\frac{1}{x^2+3x+2}$

(b) $2\sin(3x+4)$ (d) $\frac{2}{3\sin^2(x)}$ (f) $\sin\left(\frac{x^2-3x}{x^4}\right)$ (h) $\frac{1}{\cos^2(x)+3\cos(x)+2}$

Exercício 16. Calcule a derivada das seguintes funções de y.

(a) $3\sin^2(2y+1)-2y$ (b) $\frac{2}{\sin(3y)}-\sqrt{2y}$ (c) $\sqrt{\sin(y)+\cos(y)+5}$

3.2.4 Função exponencial

Outra função elementar cuja derivada é simples de calcular pela definição é a função exponencial.

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h} = e^x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{1} = e^x$$

Conclui-se portanto que a exponencial é a sua própria derivada. Dito de outra forma, é uma função que:

- é a sua própria derivada;

- é igual à sua própria taxa de variação instantânea;

- tem como gráfico uma curva cuja ordenada em cada ponto é o valor do declive da tangente nesse ponto.

Estas propriedades tornam a função exponencial, bem como a sua inversa, numa das funções mais importantes do Cálculo Diferencial.

Como consequência da regra da cadeia, podemos calcular a derivada duma exponencial com outra base qualquer a positiva. Da igualdade $a^x = e^{x\log(a)}$, podemos tomar $z = e^y$ com $y = x\log(a)$ e obter

$$(a^x)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}e^y\frac{d}{dx}x\log(a) = e^y \times \log(a) = e^{x\log(a)}\log(a) = a^x\log(a)\,.$$

A partir da regra da cadeia e das outras propriedades já discutidas podemos calcular derivadas de funções bastante mais complexas envolvendo exponenciais.

Exemplo.

1. Comecemos por calcular a derivada de e^{2x}. Fazendo $z = e^y$ e $y = 2x$, temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}e^y\frac{d}{dx}(2x) = 2e^{2x}\,.$$

2. Para calcular a derivada de 2^{3x^2+2}, vamos fazer $z = 2^y$ e $y = 3x^2+2$. Da regra da cadeia obtemos agora

$$\left(2^{3x^2+2}\right)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}2^y\frac{d}{dx}\left(3x^2+2\right) = 6x\log 2\; 2^{3x^2+2}\,.$$

3. Tal como no caso dos polinómios, muitas expressões envolvendo exponenciais podem ser simplificadas por reescrita usando igualdades conhecidas.

   Por exemplo, para calcular a derivada de $\frac{e^{2x}+e^{3x}}{e^{\sin(x)}}$ nos pontos interiores ao domínio desta função convém começar por separar a fracção e juntar potências com o mesmo expoente para depois poder aplicar a regra da cadeia a cada uma das parcelas.

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{2x}+e^{3x}}{e^{\sin(x)}}\right)' &= \left(\frac{e^{2x}}{e^{\sin(x)}}\right)' + \left(\frac{e^{3x}}{e^{\sin(x)}}\right)' = \left(e^{2x-\sin(x)} + e^{3x-\sin(x)}\right)' \\ &= (2-\cos(x))e^{2x-\sin(x)} + (3-\cos(x))e^{3x-\sin(x)}\end{aligned}$$

Exercício 17. Calcule a derivada das seguintes funções de x.

(a) $3\sin(e^x)$ (b) $\sqrt{e^x}$ (c) $e^{\sqrt{x}}$ (d) $e^{\sin(x)+\cos(x)}$

3.2.5 Operações com funções

Até agora, não falámos ainda de produtos de funções. A complexidade do Cálculo Diferencial e dos tópicos que dele derivam (nomeadamente a primitivação, que será estudada no Capítulo 4) deriva precisamente da regra de derivação do produto, que não é muito intuitiva.

A melhor forma de a introduzir é directamente a partir da definição. Consideremos duas funções f e g, ambas diferenciáveis num ponto a, e vamos calcular a derivada de $f \times g$ nesse ponto. Para levantar a indeterminação inicial, vamos somar e subtrair ao numerador a quantidade $f(a)g(x)$.

$$
\begin{aligned}
(f \times g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))}{x-a} g(x) + \lim_{x\to a} f(a) \frac{(g(x)-g(a))}{x-a} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))}{x-a}}_{f'(a)} \underbrace{g(x)}_{g(a)} + f(a) \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{(g(x)-g(a))}{x-a}}_{g'(a)} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)
\end{aligned}
$$

onde no penúltimo passo se usou a continuidade de g no ponto a.

Como consequência, temos o resultado seguinte.

Proposição. O produto $f \times g$ de duas funções reais f e g é uma função que é diferenciável onde f e g o forem, satisfazendo a relação $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ para esses números reais x.

Em termos de variação instantânea, podemos ver esta regra como uma generalização da regra do produto por uma constante: para calcular a variação de $f \times g$, calculamos a derivada de f supondo g constante, calculamos a derivada de g supondo f constante, e somamos ambos os valores.

Conforme dissemos, a regra do produto não é muito intuitiva; porém, com um pouco de prática é bastante simples de aplicar.

Exemplo.

1. Para calcular a derivada de $x^2 \sin(x)$, tomamos $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin(x)$ e obtemos
$$(x \sin(x))' = \underbrace{2x}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} .$$

2. Para calcular a derivada de $(-3t^3 + 2t)\, e^t$, tomamos $f(t) = -3t^3 + 2t$ e $g(t) = e^t$ e obtemos
$$\left((-3t^3 + 2t)\, e^t\right)' = \underbrace{\left(-9t^2 + 2\right)}_{f'(t)} \underbrace{e^t}_{g(t)} + \underbrace{\left(-3t^3 + 2t\right)}_{f(t)} \underbrace{e^t}_{g'(t)} = \left(-3t^3 - 9t^2 + 2t + 2\right) e^t .$$

Exercício 18. Recorra à regra de derivação do produto para calcular a derivada das seguintes funções.

(a) $f(x) = \sin(2x)e^x$ (b) $g(t) = \sqrt[3]{t}\,(1+t^2)$ (c) $A(w) = e^w \sec(w)$

(d) $h(z) = (3x^2+9x+1)(4x^3+2x^2-3x)$ (e) $f(y) = \sin(2y)\left(y^2+3e^y+\frac{1}{y}\right)$

O exercício anterior apresenta alguns casos típicos de funções polinomiais que são mais simples de derivar se se aplicar a regra do produto. Nem sempre é uma boa ideia expandir polinómios para calcular a sua derivada.

Aplicando a regra da cadeia em conjunto com a regra do produto, podemos calcular derivadas de funções substancialmente mais complexas.

Exemplo.

1. Para calcular a derivada de $e^{2x^2-3}\sin(3x)$, aplicamos a regra de derivação do produto e depois recorremos à regra da cadeia para derivar cada uma das parcelas.

$$\begin{aligned}
(e^{2x^2-3}\sin(3x))' &= \left(e^{2x^2-3}\right)'\sin(3x) + e^{2x^2-3}(\sin(3x))' \\
&= 4xe^{2x^2-3}\sin(3x) + 3e^{2x^2-3}\cos(3x) \\
&= (4x\sin(3x) + 3\cos(3x))e^{2x^2-3}
\end{aligned}$$

2. Em contrapartida, para calcular a derivada de $e^{2x\cos(x)}$ recorremos primeiro à regra da cadeia e depois à regra do produto para calcular a derivada de $2x\cos(x)$.

$$\left(e^{2x\cos(x)}\right)' = (2x\cos(x))'\,e^{2x\cos(x)} = (2\cos(x) - 2x\sin(x))e^{2x\cos(x)}$$

Tal como na regra da cadeia, a regra do produto é generalizável a produtos de mais do que duas funções. Para um produto de n funções, obtêm-se n parcelas em que cada função é derivada numa delas. Por exemplo, para três e quatro funções obtêm-se as fórmulas

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
(f(x)g(x)h(x)j(x))' &= f'(x)g(x)h(x)j(x) + f(x)g'(x)h(x)j(x) \\
&\quad + f(x)g(x)h'(x)j(x) + f(x)g(x)h(x)j'(x)
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Assim, a derivada de $x\sin(x)e^x$ é $\sin(x)e^x + x\cos(x)e^x + x\sin(x)e^x$.

Exercício 19. Calcule as derivadas das seguintes funções de t.

(a) $(t^2+3t)\cos(2t)$ (c) $e^{t^2\sin(t)-1}$ (e) $(t^2+2t)\cos\left(te^t\right)$

(b) $(\sin(t)+\cos(t))\,e^{3t^2}$ (d) $2t\sin\left(t^2+1\right)$ (f) $3t^2\cos(3t+1)e^{3t+1}$

A partir da regra da cadeia e da regra de derivação do produto podemos deduzir as fórmulas para derivar qualquer função construída a partir de polinómios, exponenciais, funções trigonométricas e suas inversas por operações algébricas e composição. Há contudo duas regras extremamente úteis que, embora sejam deduzidas a partir destas, simplificam muito a tarefa de cálculo de derivadas.

A primeira regra é a regra de derivação do quociente. Para derivar $\frac{f(x)}{g(x)}$, basta reescrever o quociente como um produto e aplicar as regras do produto e da cadeia (vendo $\frac{1}{g(x)}$ como a composição de $z = \frac{1}{y}$ com $y = g(x)$).

Comecemos por calcular esta última derivada. Temos

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\frac{1}{y}\frac{d}{dx}(g(x)) = -\frac{1}{y^2}g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)},$$

donde decorre que

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Proposição. O quociente $\frac{f}{g}$ de duas funções reais f e g é uma função que é diferenciável em pontos interiores ao seu domínio onde f e g forem ambas diferenciáveis, satisfazendo a relação

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

para esses números reais x.

Note-se a semelhança desta regra com a do produto: o numerador da derivada do quociente tem as mesmas parcelas que a derivada do produto, mas subtraídas em vez de adicionadas.

Exemplo.

1. Usando a regra do quociente, podemos calcular a derivada das funções trigonométricas tangente e cotangente. Atendendo às relações $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ e $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, tem-se

$$\begin{aligned}(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ (\cot(x))' &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)}\end{aligned}$$

relações que costumam ser apresentadas sob duas formas (obtidas respectivamente efectuando a divisão ou recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria):

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) \qquad (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\cot(x))' = -1 - \cot^2(x) \qquad (\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

2. Esta regra possibilita também o cálculo de derivadas de funções racionais (definidas como quocientes de polinómios). Por exemplo,

$$\left(\frac{2x}{3x+2}\right)' = \frac{2\times(3x+2)-(2x)\times 3}{(3x+2)^2} = \frac{4}{(3x+2)^2}$$
$$\left(\frac{x^2+3x}{2x-1}\right)' = \frac{(2x+3)(2x-1)-2\left(x^2+3x\right)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-3}{(2x-1)^2}$$

3. Há outras funções mais complexas que podem ser derivadas recorrendo a esta regra. Tome-se por exemplo $f(x) = \frac{x^2+\sin(x)}{2e^x-3x}$.

$$f'(x) = \frac{(2x+\cos(x))\,(2e^x-3x)-\left(x^2+\sin(x)\right)(2e^x-3)}{(2e^x-3x)^2}$$

É importante salientar que as regras de derivação do produto e do quociente não devem ser usadas como fórmula universal para o cálculo de derivadas. Há alguns aspectos a ter em conta.

1. O produto (ou quociente) duma função por uma constante deriva-se recorrendo à regra de derivação do produto por uma constante. Por exemplo, $(2\sin(x))' = 2(\sin(x))'$ e $\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)' = \frac{(\sin(x))'}{2}$; aplicar a regra geral do produto ou do quociente a estas expressões, embora conduza eventualmente ao resultado certo, torna o cálculo da derivada excessivamente complexo e facilmente sujeito a erros.

2. A regra do quociente pode ser evitada em muitos casos simples que já discutimos anteriormente. Em particular, se o denominador for um monómio (uma função da forma x^n) ou uma exponencial, é quase sempre mais simples começar por reescrever a função como um produto. Por exemplo, para derivar $\frac{\sin(x)}{e^x}$ pode-se escrever

$$\left(\frac{\sin(x)}{e^x}\right)' = \left(\sin(x)e^{-x}\right)' = \cos(x)e^{-x} - \sin(x)e^{-x} = \frac{\cos(x)-\sin(x)}{e^x}$$

obtendo-se até uma expressão mais simples do que a obtida por cálculo directo:

$$\left(\frac{\sin(x)}{e^x}\right)' = \frac{\cos(x)e^x - \sin(x)e^x}{(e^x)^2}\,.$$

Exercício 20. Calcule as derivadas das seguintes funções de y.

(a) $\frac{4y}{2y+2}$ (c) $\frac{\tan(y)+1}{y}$ (e) $\frac{\sin(y)}{y}$ (g) $\frac{y^2+3y+1}{e^y}$ (i) $\frac{e^y+1}{e^y-1}$

(b) $\frac{\sqrt{y}+3y^2}{2y+1}$ (d) $\frac{y^3+2y}{y-1}$ (f) $\frac{2\sin(y)}{3+2\cos(y)}$ (h) $\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$ (j) $\sin\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

A outra consequência da regra de derivação do produto é uma regra para a derivação de funções inversas, que nos permitirá deduzir expressões para as derivadas do logaritmo, do arco de seno e do arco de tangente — funções que serão especialmente importantes mais adiante.

A regra de derivação da função inversa deduz-se por um processo um pouco diferente do que temos usado até aqui, e que é um caso particular duma técnica que será importante mais adiante.

Vamos começar por ilustrar a técnica com um exemplo concreto — o cálculo da derivada do logaritmo. Consideremos a função $y = \log(x)$, a que corresponde a relação $x = e^y$. Podemos então aplicar a regra da cadeia ao cálculo de $\frac{dx}{dx}$ (ou, em alternativa, tomar $z = x$), obtendo

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(e^y\right)\;\frac{d}{dx}\log(x) = e^y\,\frac{d}{dx}\log(x)\,.$$

Uma vez que o nosso objectivo é calcular $\frac{d}{dx}\log(x)$, vamos escrever esta última expressão toda em termos de x usando a relação $x = e^y$. Obtemos então

$$\frac{dx}{dx} = x\left(\frac{d}{dx}\log(x)\right)\;;$$

porém, já sabemos que $\frac{dx}{dx} = 1$, pelo que, resolvendo a equação obtida em ordem a $\frac{d}{dx}\log(x)$, obtemos

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}\,.$$

No caso geral, o método a usar é o mesmo: das relações $x = f(y)$ e $y = f^{-1}(x)$ podemos aplicar a regra da cadeia ao cálculo de $1 = \frac{dx}{dx}$ para encontrar uma equação envolvendo x e $\frac{d}{dx}f^{-1}(x)$:

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}f(y)\;\frac{d}{dx}f^{-1}(x)$$

e resolvendo esta equação em ordem a $\frac{d}{dx}f^{-1}(x)$ encontramos a fórmula

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}f(y)}$$

ou, de forma sugestiva,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\,.$$

É importante observar que, nesta regra, é sempre necessário reescrever a expressão obtida em função da variável x — uma tarefa que só pode ser executada conhecendo a função f.

Por exemplo, a aplicação da regra de derivação da função inversa permite-nos concluir que, para $y = \arctan(x)$ (e portanto $x = \tan(y)$), se tem

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Exercício 21. Qual é a derivada de $\arcsin(x)$? Tenha em conta que, se $x = \sin(y)$, então $\cos(y) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercício 22. Use a regra de derivação da função inversa para confirmar as expressões (já conhecidas) das derivadas de $\sqrt{x}$ (inversa de $x = y^2$) e $\sqrt[3]{x}$ (inversa de $x = y^3$).

Exercício 23. Calcule a derivada de $y = \log_a(x)$ (função inversa de $x = a^y$).

As Tabelas 3.1 a 3.4 contêm o resumo das regras de derivação que aqui deduzimos. Estas tabelas podem ser consultadas numa primeira fase de estudo, mas é de todo o interesse para os capítulos subsequentes que o cálculo de derivadas seja automatizado rapidamente.

Função (de x)	Derivada (em função de x)
k, com k constante	0
x	1
x^α, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Tabela 3.1: Derivadas das funções polinomiais.

Função (de x)	Derivada (em função de x)
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$ ou $\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x)$ ou $-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\sec(x)$	$\tan(x)\sec(x)$
$\csc(x)$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Tabela 3.2: Derivadas das funções trigonométricas e inversas.

Função (de x)	Derivada (em função de x)
e^x	e^x
a^x, com $a > 0$	$a^x \log(a)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\log(a)}$

Tabela 3.3: Derivadas das funções exponenciais e logarítmicas.

3.2.6 Derivadas de ordem superior

Conforme dissemos atrás, dada uma função f podemos calcular não apenas a sua primeira derivada, mas derivadas de ordem superior (segunda, terceira, e assim por diante), caso as funções que vamos gerando sejam elas próprias diferenciáveis.

Função	Derivada
$f+g$	$f'+g'$
$c \times f$, com c constante	$c \times f'$
$f \circ g$	$(f' \circ g)\, g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
f^{-1}	$\frac{1}{f}$ no ponto correspondente

Tabela 3.4: Regras de derivação.

Em geral, este cálculo é trabalhoso; porém, para algumas classes de funções é possível (e até relativamente simples) encontrar uma expressão geral da sua derivada de qualquer ordem.

O caso mais simples é o da função exponencial. Uma vez que esta função é a sua própria derivada, também vai ser a sua segunda derivada, a sua terceira derivada, e a sua derivada de qualquer ordem. Podemos escrever sinteticamente esta informação na forma

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

ou, sendo $f(x) = e^x$,

$$f^{(n)}(x) = e^x\,.$$

Claro está que se tivermos um múltiplo da função exponencial esta relação continua a verificar-se; assim as funções f, g e h seguintes são todas as suas próprias derivadas de qualquer ordem:

$$f(x) = 3e^x \qquad g(x) = -5e^x \qquad h(x) = 2e^x\,.$$

Exercício 24. Qual será a expressão geral das derivadas de $f(x) = e^{3x+1} + 2e^{x-1}$?

Para exponenciais com expoentes mais complexos, ainda é por vezes possível encontrar estas fórmulas. Por exemplo, se $f(x) = e^{2x}$, então temos

$$f'(x) = 2e^{2x} \qquad f''(x) = 4e^{2x} \qquad f'''(x) = 8e^{2x}$$

e é fácil perceber que cada nova derivação vai multiplicar a função por 2 (a derivada do expoente). Então a expressão geral das derivadas de f é

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}\,.$$

Algumas funções trigonométricas também exibem este tipo de regularidade. Uma vez que senos e cosenos são as derivadas uma da outra (a menos de sinal), encontramos uma periodicidade na sua derivação:

$$(sin(x))' = \cos(x) \qquad (\sin(x))'' = -\sin(x) \qquad (\sin(x))''' = -\cos(x) \qquad (\sin(x))^{(4)} = \sin(x)$$

e a partir daqui esta sequência repete-se. As derivadas do coseno seguem um padrão semelhante.

Exercício 25. Qual será a expressão geral das derivadas de $g(x) = \sin(2x)$?

As outras funções simples são os polinómios. Se derivarmos x^n, obtemos nx^{n-1}; continuando a derivar esta expressão, vamos obtendo potências de grau cada vez mais baixo e com um coeficiente que é o produto de todos os expoentes por onde passámos; ou seja,

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{k!}x^{n-k}$$

para $k \leq n$; a derivada de ordem $(n+1)$ (e seguintes) é a função nula.

Exercício 26. Calcule a derivada de ordem n da função $h(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x$.

Se a função f for uma potência de expoente negativo, o raciocínio é semelhante; mas agora a função tem derivadas não nulas de todas as ordens e o seu sinal vai alternando. Por exemplo, para $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, temos

$$f'(x) = -2x^{-3} \qquad f''(x) = 6x^{-4} \qquad f'''(x) = -24x^{-5} \ldots .$$

Exercício 27. Calcule as primeiras cinco derivadas de $g(x) = 3x^{-4} + 2x^{-2}$. Consegue determinar uma expressão geral para a derivada de ordem n desta função?

3.3 Fórmula de Taylor

Vimos que o valor da derivada duma função f num ponto a corresponde ao declive da única recta tangente ao gráfico de f nesse ponto. Nesta secção vamos estudar uma generalização desta construção que permite obter aproximações mais precisas do valor da função f numa vizinhança de a.

3.3.1 Definição e primeiros exemplos

Seja f uma função diferenciável num ponto a e defina-se $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ como sendo a função cujo gráfico é precisamente a recta tangente ao gráfico de f em a. Tendo em conta a definição analítica de derivada como o limite da taxa de variação da função num intervalo contendo o ponto a, é fácil perceber que P_1 é a função polinomial de grau 1, coincidente com f no ponto a, que melhor a aproxima numa vizinhança desse ponto. De facto, ambas coincidem não apenas no valor que tomam no ponto a, mas também na taxa de variação instantânea nesse ponto.

Uma vez que as derivadas de ordem superior à primeira dão informação mais precisa sobre a variação da função (a segunda derivada de f é a taxa de variação da taxa de variação de f, e assim sucessivamente), é razoável pensar em aproximar f por um polinómio de ordem superior à primeira com o objectivo de melhorar o erro da aproximação. Seja então $P_2(x)$ um polinómio de grau 2 tal que

$$P_2(a) = f(a) \qquad P_2'(a) = f'(a) \qquad P_2''(a) = f''(a) .$$

Uma vez que P_2 é um polinómio de grau 2, uma forma de o construir é partir de $P_1(x)$ (que satisfaz as primeiras duas condições) e acrescentar-lhe um termo de segunda ordem. Tendo em conta que $(x-a)^2$ é uma função que vale 0 em a e cuja derivada também vale 0 em a, podemos tentar escrever

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2$$

onde c é um parâmetro que é necessário determinar. Observe-se que $P_2''(x) = 2c_2$; para termos, como desejamos, $P_2''(a) = f''(a)$, somos conduzidos à relação $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

Prosseguindo nesta linha de raciocínio, o polinómio de grau 3 que melhor aproxima f será $P_3(x)$ tal que

$$P_3(a) = f(a) \qquad P_3'(a) = f'(a) \qquad P_3''(a) = f''(a) \qquad P_3'''(a) = f'''(a)$$

e, analogamente ao que atrás fizemos, podemos tentar escrever $P_3(x) = P_2(x) + c_3(x-a)^3$. Ora obtém-se $P_3'''(x) = 6c_3$, donde forçosamente se deverá ter $c_3 = \frac{f'''(a)}{6}$.

Generalizando este raciocínio, concluímos que o único polinómio de grau n que satisfaz simultaneamente as condições

$$P_n(a) = f(a) \qquad P_n'(a) = f'(a) \qquad \cdots \qquad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

é o polinómio

$$P_n(x) = f(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n\,.$$

É fácil verificar que cada uma das parcelas se anula em a, bem como todas as suas derivadas excepto uma (correspondente ao expoente de $(x-a)$ nessa parcela). Tem-se então

$$P_n'(a) = c_1 \qquad P_n''(a) = 2c_2 \qquad P_n'''(a) = 3 \times 2c_3$$

e, de uma forma geral,

$$P_n^{(n)}(a) = n \times (n-1) \times \cdots \times 2f^{(n)}(a) = n! \times f^{(n)}(a)\,,$$

donde se conclui que necessariamente

$$c_1 = f'(a) \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \qquad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

e, em geral,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

pelo que $P_n(x)$ tem a expressão

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.$$

À função P_n chama-se *polinómio de Taylor* de grau n para f em torno do ponto a. No caso particular $a = 0$, a expressão de $P_n(x)$ simplifica-se para

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e P_n diz-se o *polinómio de Mac-Laurin* de grau n para f.

Para este raciocínio ser válido, é necessário que a função f seja pelo menos n vezes diferenciável. No caso de f ser mesmo infinitamente diferenciável, existem as suas derivadas de todas as ordens e é possível definir a *série de Taylor* de f em torno de a como

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \,.$$

No caso de se ter $a = 0$, esta série também é conhecida como *série de Mac-Laurin* de f. Note-se que esta série tem um domínio (dado pelo seu raio de convergência) que pode ser diferente do da função f. No caso particular em que f e T_f coincidem numa vizinhança de a, a função f diz-se *analítica* no ponto a.

Observe-se ainda que, substituindo f por f' no lado direito da fórmula para o polinómio de Taylor de grau n, obtemos a expressão

$$f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

que é exactamente a mesma expressão que se obteria derivando o polinómio $P_n(x)$ para f. Isto significa que o polinómio de Taylor de grau n associado a f' em torno do ponto a é a derivada do polinómio de Taylor de grau n associado a f no mesmo ponto. Tal relação permite-nos calcular muito facilmente polinómios e séries de Taylor de derivadas de funções cujo desenvolvimento já é conhecido.

Exemplo.

1. Comecemos por considerar a função exponencial, $f(x) = e^x$. Vimos já anteriormente que $f^{(n)}(x) = e^x$ para qualquer n. Então, fixado um ponto a, os polinómios de Taylor em torno de a para a função exponencial de graus 1, 3 e 5 são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= e^a + e^a(x-a) \\
P_3(x) &= e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 \\
P_5(x) &= e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \frac{e^a}{4!}(x-a)^4 + \frac{e^a}{5!}(x-a)^5
\end{aligned}$$

e a série de Taylor nesse ponto tem o valor

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n \,.$$

Tendo em conta que $e^0 = 1$, os polinómios de Taylor no ponto 0 (ou polinómios de Mac-Laurin) dos mesmos graus têm as expressões seguintes.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 1 + x \\
P_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\
P_5(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}
\end{aligned}$$

e a série de Mac-Laurin correspondente é

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Uma vez que sabemos que esta série converge precisamente para e^x para qualquer valor x, concluímos que a função f é analítica na origem. É fácil mostrar que, na realidade, ela é analítica em qualquer ponto do seu domínio.

Observe-se também que derivando termo a termo a série de Mac-Laurin de f se obtém exactamente a mesma série, comprovando o facto já conhecido de que $f'(x) = f(x)$ para todo o x.

2. Se tomarmos agora $g(x) = e^{2x}$, temos então

$$g'(x) = 2e^{2x} \qquad g''(x) = 4e^{2x} \qquad g'''(x) = 8e^{2x}$$

e é fácil de ver que, em geral, $g^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$. Então, os polinómios de Taylor de f num ponto a genérico de graus 2 e 4 são, respectivamente,

$$P_2(x) = e^{2a} + 2e^{2a}(x-a) + \frac{4e^{2a}}{2!}(x-a)^2$$
$$P_4(x) = e^{2a} + 2e^{2a}(x-a) + \frac{4e^{2a}}{2!}(x-a)^2 + \frac{8e^{2a}}{3!}(x-a)^3 + \frac{16e^{2a}}{4!}(x-a)^4$$

e a série de Taylor desta função é

$$T_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^{2a}}{n!}(x-a)^n\,.$$

Esta função ainda é analítica em qualquer ponto.

Tomando por exemplo $a = 1$, tem-se $e^{2\times 1} = e^2$, pelo que os polinómios de Taylor dos mesmos graus em torno do ponto 1 têm as expressões seguintes.

$$P_2(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2$$
$$P_4(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4e^2}{3}(x-1)^3 + \frac{2e^2}{3}(x-1)^4$$

e a série de Taylor correspondente é

$$T_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!}(x-1)^n\,.$$

Exercício 28. Usando a definição, calcule os polinómios de Taylor das seguintes funções de x, com o grau e n relativamente ao ponto a indicados em cada alínea.

(a) e^{-x}, $n = 3$, $a = 1$ (b) $e^x + 3x^2$, $n = 4$, $a = -2$ (c) $e^x + e^{-x}$, $n = 3$, $a = 2$

Exercício 29. Calcule as séries de Taylor das seguintes funções de x nos pontos indicados.

(a) $e^x + e^{-x}$, $a = -1$ (b) 2^x, $a = 1$ (c) $\frac{e^x}{2}$, $a = 1$

Exercício 30. Usando a definição, calcule os polinómios de Mac-Laurin das seguintes funções de y, com o grau n indicado em cada alínea.

(a) $2e^{3y}$, $n = 5$ (b) e^{3y^2}, $n = 4$ (c) 3^{x+1}, $n = 3$

Muitos exemplos de funções trigonométricas também são relativamente simples de tratar no caso geral.

Exemplo.

1. Pensemos agora numa função trigonométrica, por exemplo $f(x) = \sin(x)$. Vimos anteriormente que as primeiras quatro derivadas de f são

$$f'(x) = \cos(x) \qquad f''(x) = -\sin(x) \qquad f'''(x) = -\cos(x) \qquad f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

e que esta sequência se repete a cada quatro passos. Então, o polinómio de Taylor de $\sin(x)$ em torno dum ponto arbitrário a tem a seguinte expressão, tomando por exemplo os graus 1, 3 e 6.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \sin(a) + \cos(a)(x-a) \\
P_3(x) &= \sin(a) + \cos(a)(x-a) - \frac{\sin(a)}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos(a)}{3!}(x-a)^3 \\
P_6(x) &= \sin(a) + \cos(a)(x-a) - \frac{\sin(a)}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{\sin(a)}{4!}(x-a)^4 + \\
&\qquad + \frac{\cos(a)}{5!}(x-a)^5 - \frac{\sin(a)}{6!}(x-a)^6
\end{aligned}$$

Tendo em conta as relações $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ obtemos formas particularmente simples para os correspondentes polinómios de Mac-Laurin desta função.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x \\
P_3(x) &= x - \frac{x^3}{3!} \\
P_6(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, a série de Mac-Laurin para f tem a forma

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Esta função é analítica na origem (e na realidade em todo o seu domínio).

Por outro lado, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; então, os polinómios de Taylor dos mesmos graus em torno de $\frac{\pi}{4}$ são os seguintes.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\\
P_3(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\times 2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\times 3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\\
P_6(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\times 2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\times 3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2\times 4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 +\\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2\times 5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{\sqrt{2}}{2\times 6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6
\end{aligned}$$

Outra possibilidade é tomar $a = \frac{\pi}{3}$; tem-se $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; então, os polinómios de Taylor dos mesmos graus em torno de $\frac{\pi}{3}$ são os seguintes.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\\
P_3(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\times 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\\
P_6(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\times 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{2\times 4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 +\\
&\quad + \frac{1}{2\times 5!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 - \frac{\sqrt{3}}{2\times 6!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6
\end{aligned}$$

2. Procedendo analogamente para a função $g(x) = \cos(3x)$, obtemos para as primeiras quatro derivadas de g as expressões

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -3\sin(3x)\\
g''(x) &= -3^2\cos(3x)\\
g'''(x) &= 3^3\sin(3x)\\
g^{(4)}(x) &= 3^4\cos(3x)
\end{aligned}$$

que nos permitem obter a expressão geral da derivada tendo em conta que o coeficiente é multiplicado por 3 a cada passo e o resto da expressão se repete com período 4.

Então o polinómio de Taylor para $\cos(3x)$ em torno dum ponto a de grau 3 é

$$P_3(x) = \cos(3a) - 3\sin(3a)(x-a) - \frac{9\cos(3a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{27\sin(3a)}{3!}(x-a)^3$$

e tomando por exemplo $a = \frac{\pi}{2}$ obtém-se para o polinómio de Taylor nesse ponto a expressão

$$P_3(x) = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{27}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 .$$

Observe-se que o desenvolvimento de $\cos(x)$ pode ser obtido directamente por derivação a partir dos desenvolvimentos acima deduzidos para $\sin(x)$.

Exercício 31. Usando a definição, calcule os polinómios de Taylor de grau 3 das seguintes funções de x, relativamente ao ponto a indicado em cada alínea.

(a) $\tan(x)$, $a = 0$ (b) $\arcsin(x)$, $a = 1$ (c) $\sin(x)\tan(x)$, $a = \pi$

Exercício 32. Calcule as séries de Taylor das seguintes funções de y nos pontos indicados.

(a) $\cos(y)$, $a = -1$ (b) $\sin(3y + \pi)$, $a = \pi$ (c) $2\sin(y) + \cos(-y)$, $a = \frac{\pi}{2}$

Exercício 33. Usando a definição, calcule os polinómios de Mac-Laurin das seguintes funções de x, com o grau n indicado em cada alínea.

(a) $\sin(2x^2 + 1)$, $n = 3$ (b) $2\cos(x)e^x$, $n = 3$ (c) $\frac{\tan(x)}{4x}$, $n = 2$

Exercício 34. Calcule as séries de Mac-Laurin das seguintes funções de z.

(a) $\cos(z)$ (b) $\sin(3z)$ (c) $\cos(-3z + \pi)$

O caso dos logaritmos é um pouco mais complexo, mas de grande utilidade prática. Assim, e para terminar esta secção, calculemos o desenvolvimento de $f(x) = \log(x)$. Calculando as primeiras derivadas desta função, obtemos sucessivamente:

$$f'(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$f^{(4)}(x) = -3!x^{-4} = -\frac{3!}{x^4} \qquad f^{(5)}(x) = 4!x^{-5} = \frac{4!}{x^5}$$

pelo que a expressão geral da derivada de ordem n de f é

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!x^{-n} = \frac{(n-1)!}{x^n}\,.$$

Então os polinómios de Taylor de graus 2, 5 e 8 para f em torno dum ponto a genérico têm as expressões seguintes.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \log(a) + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{\frac{1}{a^2}}{2!}(x-a)^2 \\ &= \log(a) + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5(x) &= \log(a) + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{\frac{1}{a^2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{\frac{2}{a^3}}{3!}(x-a)^3 - \frac{\frac{3!}{a^4}}{4!}(x-a)^4 + \frac{\frac{4!}{a^5}}{5!}(x-a)^5 \\
&= \log(a) + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \frac{(x-a)^4}{4a^4} + \frac{(x-a)^5}{5a^5} \\
P_8(x) &= \log(a) + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \frac{(x-a)^4}{4a^4} + \frac{(x-a)^5}{5a^5} - \frac{(x-a)^6}{6a^6} + \\
&\quad + \frac{(x-a)^7}{7a^7} - \frac{(x-a)^8}{8a^8}
\end{aligned}$$

Tomando $a = 1$, temos $\log(1) = 0$ e $1^n = 1$ para qualquer n, donde os polinómios acima tomam as expressões seguintes, nesse caso particular.

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \\
P_5(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} \\
P_8(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \\
&\quad + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8}
\end{aligned}$$

A série de Taylor neste ponto é

$$T_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n},$$

que converge (muito lentamente) para $x \in]0, 2]$. A função logaritmo é analítica no ponto 1, embora a sua série de Taylor em torno desse ponto não coincida com $\log(x)$ em todo o domínio desta função.

Estes exemplos ilustram a forma de proceder no caso geral.

Exemplo. Consideremos a função $h(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. As primeiras derivadas desta função são

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -(-1)(1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} \\
h''(x) &= -(-2)(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3} \\
h'''(x) &= -(-3!)(1-x)^{-4} = \frac{3!}{(1-x)^4} \\
h^{(4)}(x) &= -(-4!)(1-x)^{-5} = \frac{4!}{(1-x)^5}
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Conclui-se facilmente que a derivada de ordem n desta função é

$$h^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

donde os seus polinómios de Taylor de ordem, por exemplo, 3 e 5 num ponto a arbitrário terão a forma

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{1}{1-a} + \frac{1}{(1-a)^2}(x-a) + \frac{2}{2(1-a)^3}(x-a)^2 + \frac{3!}{3!(1-a)^4}(x-a)^3 \\
&= \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \frac{(x-a)^3}{(1-a)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_5(x) &= \frac{1}{1-a} + \frac{1}{(1-a)^2}(x-a) + \frac{2}{2(1-a)^3}(x-a)^2 + \frac{3!}{3!(1-a)^4}(x-a)^3 + \\ &\quad + \frac{4!}{4!(1-a)^5}(x-a)^4 + \frac{5!}{5!(1-a)^6}(x-a)^5 \\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \frac{(x-a)^3}{(1-a)^4} + \frac{(x-a)^4}{(1-a)^5} + \frac{(x-a)^5}{(1-a)^6}\end{aligned}$$

Os polinómios de Mac-Laurin desta função, obtidos tomando $a = 0$, têm uma forma especialmente simples:

$$P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \qquad P_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

e a série de Mac-Laurin desta função é

$$T_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,.$$

Substituindo nestas últimas fórmulas x por $-x$, obtêm-se polinómios $Q_3(x)$ e $Q_5(x)$ que se pode mostrar serem os polinómios de Mac-Laurin das mesmas ordens para $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

$$Q_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \qquad Q_5(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$$

Analogamente, substituindo nas mesmas expressões x por $-x^2$, obtêm-se dois polinómios, de graus 6 e 10, que se verifica serem os polinómios de Mac-Laurin para $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned}R_6(x) &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 \\ R_{10}(x) &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}\end{aligned}$$

Tendo em conta que esta última função é a derivada de $\arctan(x)$, consideremos os polinómios seguintes.

$$\begin{aligned}P_7(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \\ P_{11}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}\end{aligned}$$

Por derivação, estes polinómios geram precisamente os polinómios R_6 e R_{10} anteriores; decorre deste facto que são os polinómios de Mac-Laurin para $\arctan(x)$ de graus 7 e 11, respectivamente, uma vez que o desenvolvimento em polinómio de Taylor é único. Um raciocínio semelhante permitiria concluir que a série de Mac-Laurin da função $\arctan(x)$ é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \,.$$

3.3.2 Fórmula de erro

Ao aproximar valores de $f(x)$ por valores do seu polinómio de Taylor de ordem n, $P_n(x)$, estamos a cometer um erro, chamado *erro de aproximação*. Designando o valor deste erro por $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, o *resto de ordem n de f*, fixando o ponto a, é importante conseguir estimá-lo ou pelo menos majorá-lo por forma a poder aplicar as aproximações obtidas. Observe-se que este resto não é mais do que o resto da série de Taylor de f nesse mesmo ponto.

A demonstração rigorosa das várias fórmulas de erro existentes para a aproximação por polinómio de Taylor poderá ser encontrada em qualquer livro de referência. Uma das fórmulas mais úteis é a chamada *fórmula do resto de Lagrange*:

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)$$

para algum ponto z entre x e a.

(Observe-se que esta fórmula de erro difere do termo seguinte do polinómio de Taylor de f apenas no ponto em que a derivada de ordem $n+1$ é avaliada.)

Esta fórmula é de grande interesse prático. Na generalidade dos casos, a derivada $f^{(n+1)}$ é uma função contínua, pelo que o seu módulo terá máximo M no intervalo entre x e a. Então, ter-se-á

$$|r_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Assim, por exemplo, no caso das funções trigonométricas $\sin(x)$ e $\cos(x)$, cujas derivadas tomam sempre valores entre -1 e 1, ter-se-á sempre

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

que tende para 0 à medida que $n \to +\infty$ para qualquer valor de x; assim, os polinómios de Taylor permitem obter aproximações tão precisas quanto o desejado de $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Exercício 35. Para cada um dos polinómios de Taylor e Mac-Laurin obtidos nos exercícios desta secção, indique uma estimativa do erro da aproximação cometido ao substituí-los aos valores da função que aproximam.

Uma das aplicações principais do desenvolvimento de funções em série de Taylor é precisamente a obtenção de aproximações de valores de funções que não são facilmente calculáveis, como funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Nos exemplos anteriores, calculámos polinómios de Taylor para e^x, $\sin(x)$ e $\log(x)$, entre outros; escolhendo adequadamente o ponto a, podemos obter expressões que só envolvem números inteiros e operações aritméticas elementares – somas, produtos e divisões.

Avaliação de potências de e. Comecemos pela função exponencial $f(x) = e^x$. Conforme visto atrás, o seu polinómio de Mac-Laurin de grau n é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

e a diferença $e^x - P_n(x)$ tem o valor

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^z$$

para algum z entre 0 e x. Uma vez que a função exponencial é estritamente crescente, se x for positivo o seu máximo naquele intervalo é e^x, enquanto que se x for negativo o seu máximo é $e^0 = 1$.

Observando que $e = e^1 = f(1)$ e substituindo este valor em $P_n(x)$, conclui-se que

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

uma vez que $1^k = 1$ para qualquer k. Tendo em conta que $e < 3$, o módulo do erro desta aproximação é majorado por

$$\frac{3}{(n+1)!}.$$

Esta observação permite-nos calcular o valor de e com a precisão desejada duma forma muito simples. Suponhamos que queremos calcular e com cinco casas decimais; por outras palavras, queremos ter $|r_n| \leq 10^{-5}$. Pela majoração anterior, tem-se

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \equiv (n+1)! \geq 3 \times 10^5,$$

para o que basta tomar $n = 8$ (uma vez que $9! = 362880$).

Então tem-se

$$\begin{aligned}
e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} \\
&= 1 + 1 + 0.5 + 0.166666\ldots + 0.0416666\ldots + 0.0083333\ldots + 0.001388888\ldots + \\
&\qquad + 0.0001984126\ldots + 0.0000248015\ldots \\
&= 2.718278\ldots
\end{aligned}$$

que arredondado a cinco casas decimais dá 2.71828. É de salientar que as operações envolvidas podem ser realizadas numa máquina de calcular de quatro operações.

Para calcular $\frac{1}{e} = e^{-1}$ podemos recorrer ao mesmo polinómio, observando agora que o erro é majorado por $\frac{1}{(n+1)!}$ por se ter um valor negativo no argumento da exponencial. Para obter novamente cinco casas decimais de precisão é suficiente de tomar n satisfazendo

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \equiv (n+1)! \geq 1 \times 10^5,$$

donde se obtém novamente $n \geq 8$.

Obtemos agora:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e} &\approx 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} \\
&= 1 - 1 + 0.5 - 0.166666\ldots + 0.0416666\ldots - 0.0083333\ldots + 0.001388888\ldots - \\
&\qquad - 0.0001984126\ldots + 0.0000248015\ldots \\
&= 0.36788\ldots
\end{aligned}$$

que corresponde de facto a uma aproximação de $\frac{1}{e}$ com cinco casas decimais de precisão.

Uma vez que na fórmula do erro intervém um termo em x^{n+1}, é claro que o erro será tanto menor quando mais próximo x estiver de 0 (embora o erro tenda para 0 à medida que n aumenta, para qualquer valor de x). Por exemplo, se quisermos calcular $e^{0.1} = e^{\frac{1}{10}}$, teremos

$$r_n \leq \frac{2 \times 0.1^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{10^{n+1}(n+1)!},$$

usando a relação $e^{0.1} < 2$. Assim, com o mesmo polinómio de grau 8 o erro será inferior a $\frac{2}{10^9 9!}$, donde terá pelo menos 14 casas decimais correctas.

$$\begin{aligned} e^{0.1} &\approx 1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2!} + \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^4}{4!} + \frac{0.1^5}{5!} + \frac{0.1^6}{6!} + \frac{0.1^7}{7!} + \frac{0.1^8}{8!} \\ &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{240000} - \frac{1}{120 \times 10^5} + \frac{1}{720 \times 10^6} - \frac{1}{5040 \times 10^7} + \frac{1}{40320 \times 10^8} \\ &= 1.10517091807564\ldots \end{aligned}$$

Em contrapartida, os mesmos oito termos usados para calcular e^2 darão uma aproximação com apenas duas casas decimais de precisão, já que neste caso o erro é majorado por

$$r_n \leq \frac{9 \times 2^{n+1}}{(n+1)!}$$

tendo em conta que $e^2 < 10$.

Exercício 36. Obtenha uma aproximação das seguintes constantes com um erro inferior ao indicado. Para cada alínea, comece por escolher a função a desenvolver em polinómio de Taylor e o ponto em torno do qual efectuar o desenvolvimento; use a estimativa do erro para determinar o grau do polinómio.

(a) $e^{0.2}$ com erro inferior a 10^{-5}

(b) $\sqrt{e}$ com erro inferior a 10^{-4}

Valores de funções trigonométricas. O caso das funções trigonométricas é ainda mais interessante. Comecemos por recordar a expressão dos polinómios de Mac-Laurin de $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos(x) &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

O erro associado ao polinómio de grau n, como já foi observado, é inferior a $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, uma vez que a derivada de qualquer ordem de qualquer destas funções tem sempre um valor em módulo menor que 1. Em particular, para $|x| < 1$, o erro é inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$, pelo que para aqueles valores de x os polinómios de Mac-Laurin se aproximam rapidamente do valor das funções correspondentes.

Usando relações trigonométricas elementares, estas observações permitem-nos calcular o valor do seno e do coseno de qualquer ângulo. A técnica é sempre a mesma.

1. Transformar o argumento num valor positivo usando a paridade destas duas funções: $\sin(-x) = -\sin(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)$.

2. Reduzir o argumento a um valor entre 0 e 2π, usando a periodicidade das funções seno e coseno ($\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$).

3. Reduzir o argumento a um valor entre 0 e π usando as relações $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ e $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

4. Reduzir o argumento ao primeiro quadrante, ou seja, a um valor entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, usando as relações $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ e $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$.

5. Reduzir o argumento a um valor entre 0 e $\frac{\pi}{4}$, usando as relações $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

6. Calcular o valor obtido recorrendo ao polinómio de Mac-Laurin correspondente.

Observe-se que $\frac{\pi}{4} < 1$, pelo que no último passo podemos usar a majoração simplificada do erro obtida acima; contudo, se x estiver muito próximo de 0, a fórmula geral permite-nos usar polinómios de grau muito menor.

É também de salientar que em geral nem todos os passos acima indicados são necessários. Vejamos alguns exemplos.

Para calcular $\sin(2\pi + 0.1)$, começamos por reduzir o argumento a um valor entre 0 e 2π, recorrendo à igualdade $\sin(2\pi + 0.1) = \sin(0.1)$. O novo argumento é já um valor entre 0 e $\frac{\pi}{4}$, pelo que podemos usar directamente o polinómio de Mac-Laurin para $\sin(x)$ para aproximar este valor.

Tendo em conta que neste caso o erro é majorado por $\frac{0.1^{n+1}}{(n+1)!}$, podemos obter sete casas decimais de precisão usando um polinómio de grau 5. Então:

$$\begin{aligned}\sin(0.1) &\approx 0.1 - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^5}{5!} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12000000} \\ &= 0.099833416\ldots\end{aligned}$$

e na realidade a aproximação obtida tem nove casas correctas (recorde-se que a fórmula do erro dá um limite *superior* para este).

Suponhamos agora que queríamos calcular $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - 0.03\right)$, começaríamos por reduzir o argumento a um valor entre 0 e 2π, o que pode ser conseguido subtraindo 2π ao argumento, resultando $\frac{3\pi}{2} - 0.03$. Este valor é maior que π, pelo que aplicamos o segundo passo e concluímos que $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 0.03\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 0.03\right)$. Finalmente, para obter um argumento no intervalo desejado, usamos a última relação para transformar a expressão obtida em $\cos(0.03)$.

Neste caso, observando que $0.03 < 0.1$, o erro é majorado mais uma vez por $\frac{0.1^{n+1}}{(n+1)!}$, pelo que o polinómio de Mac-Laurin de grau 5 dar-nos-á novamente pelo menos sete casas de precisão. Obtém-se então

$$\begin{aligned}\cos(0.03) &\approx 1 - \frac{0.03^2}{2!} + \frac{0.03^4}{4!} = 1 - \frac{9}{20000} + \frac{81}{2400000000} \\ &= 0.9995500375\end{aligned}$$

que apenas difere do valor exacto de $\cos(0.03)$ a partir da 9ª casa decimal.

Exercício 37. Obtenha uma aproximação das seguintes constantes com um erro inferior ao indicado. Para cada alínea, comece por escolher a função a desenvolver em polinómio de Taylor e o ponto em torno do qual efectuar o desenvolvimento; use a estimativa do erro para determinar o grau do polinómio.

(a) $\sin(0.2)$ com erro inferior a 10^{-5}

(b) $\cos(\pi - 0.3)$ com erro inferior a 10^{-6}

Aproximações de π. O último exemplo desta secção mostra como o polinómio de Taylor para $\arctan(x)$ pode ser utilizado para obter uma aproximação de $\frac{\pi}{4}$ e, portanto, de π. Vimos anteriormente que o polinómio de Mac-Laurin desta função, para um grau n arbitrário, tem a expressão

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n}\,.$$

No caso particular $x = 1$, observando que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, temos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n}\,.$$

Uma vez que não obtivemos este desenvolvimento directamente a partir do cálculo das derivadas de $\arctan(x)$, é mais difícil estimar o erro associado a esta aproximação no caso geral. Porém, neste caso particular podemos observar que a soma dos primeiros n termos vai convergindo alternadamente para o valor de $\frac{\pi}{4}$, pelo que o valor absoluto do erro é majorado pelo termo seguinte a somar:

$$|r_n(x)| \le \frac{1}{n+2}$$

para n ímpar.

Este desenvolvimento não é especialmente interessante como fórmula de cálculo de π, uma vez que o erro só muito lentamente converge para 0; porém, apresenta-se a título de exemplo de como se podem calcular estas constantes usando o polinómio de Taylor e a função adequada.

Claramente, a mesma técnica pode ser aplicada para quaisquer outras funções.

Exercício 38. Obtenha uma aproximação das seguintes constantes com um erro inferior ao indicado. Para cada alínea, comece por escolher a função a desenvolver em polinómio de Taylor e o ponto em torno do qual efectuar o desenvolvimento; use a estimativa do erro para determinar o grau do polinómio.

(a) 1.1^{20} com erro inferior a 10^{-4}

(b) $\log(0.9)$ com erro inferior a 10^{-5}

3.3.3 Determinação de coeficientes de polinómios

Um outro caso particular com interesse é aquele em que a função a aproximar é ela própria um polinómio. Vejamos um exemplo antes de estudar o caso geral.

Considere-se $p(x) = (x-1)^4$. Calculando as derivadas de p obtém-se

$$p'(x) = 4(x-1)^3 \qquad p''(x) = 12(x-1)^2 \qquad p'''(x) = 24(x-1)$$
$$p^{(4)}(x) = 24 \qquad p^{(5)}(x) = 0$$

e todas as derivadas de ordem superior à 5ª são igualmente nulas.

Tomando por exemplo $a = 0$, tem-se

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = 1 - 4x \qquad P_2(x) = 1 - 4x + 6x^2$$
$$P_3(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 \quad P_4(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 \quad P_n(x) = P_4(x) \text{ para } n \ge 4.$$

Este resultado é precisamente o que se obteria expandindo a expressão de p (fazendo as contas ou aplicando por exemplo a fórmula do binómio de Newton). Tal facto pode parecer inesperado; porém, basta observar que, de acordo com a secção anterior, o erro $r_n(x)$, para $n \geq 4$, é necessariamente 0, pois a derivada de ordem $n+1$ de p é 0.

Por outro lado, se fizermos $a = 1$, todas as derivadas de p se anulam excepto $p^{(4)}$, obtendo-se

$$P_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq 3 \\ (x-1)^4 & \text{para } n \geq 4 \end{cases}$$

o que de novo não deve ser surpreendente, tendo em conta as observações atrás.

O exemplo anterior pode-nos levar a pensar que não há qualquer interesse em aplicar a fórmula de Taylor a polinómios. Há, porém, várias vantagens em fazê-lo, como a seguir se discute.

Pensemos no caso geral, em que $p(x)$ é um polinómio de grau n. Tendo em conta que a derivada dum polinómio é um polinómio de grau uma unidade inferior, concluímos que $p^{(k)}(x) = 0$ para qualquer $k > n$, pelo que, de acordo com a fórmula do erro, $P_n(x) = p(x)$ (tal como $P_k(x) = p(x)$ para qualquer $k > n$).

Isto significa então que se tem

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

para qualquer ponto a. Em particular, o polinómio de Mac-Laurin de ordem n associado a p é

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Uma vez que os coeficientes das potências de x são únicos para cada polinómio, isto permite-nos concluir que, para cada k entre 0 e n, o coeficiente de x^k é

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} .$$

Para ver o interesse desta fórmula, considere-se o polinómio

$$q(x) = (x-1)^6 + 3(x^2+3x+2)^2 - 7x .$$

Se quisermos calcular o coeficiente de x^3 deste polinómio, começamos por calcular a sua derivada de ordem 3.

$$\begin{aligned} q'(x) &= 6(x-1)^5 + 6(2x+3)(x^2+3x+2) - 7 \\ q''(x) &= 30(x-1)^4 + 12(x^2+3x+2) + 6(2x+3)^2 \\ q'''(x) &= 120(x-1)^3 + 12(2x+3) + 24(2x+3) \end{aligned}$$

Fazendo $x = 0$ na última expressão, obtemos $q'''(0) = -120 + 36 + 72 = -12$, donde o coeficiente de x^3 em $q(x)$ é $\frac{-12}{3!} = -2$.

Se quiséssemos expandir q, bastaria calcular as restantes derivadas:

$$\begin{aligned} q^{(4)}(x) &= 360(x-1)^2 + 24 + 48 \\ q^{(5)}(x) &= 720(x-1) \\ q^{(6)}(x) &= 720 \end{aligned}$$

e, sabendo que $q(x)$ coincide com o seu polinómio de Mac-Laurin, obter-se-ia

$$q(x) = (1+12-0) + (-6+36-7)x + \frac{30+24+54}{2}x^2 + \frac{-120+36+72}{6}x^3 + \\ + \frac{360+24+48}{24}x^4 + \frac{-720}{120}x^5 + \frac{720}{720}x^6\,,$$

que, simplificando, se reduz a

$$q(x) = 13 + 23x + 54x^2 - 2x^3 + 18x^4 - 6x^5 + x^6\,.$$

Este resultado poderia ter sido obtido directamente por expansão da expressão anterior para $q(x)$, exigindo porém cálculos muito mais trabalhosos. Se não estivermos interessados na expansão completa, mas apenas nalguns coeficientes particulares, as vantagens deste método são ainda mais óbvias.

Exercício 39. Para cada uma das alíneas seguintes, calcule o coeficiente de x^n no polinómio indicado.

(a) $p(x) = 3(x-2)^7$, $n = 2$

(b) $q(x) = (x+1)^4$, $n = 3$

(c) $r(x) = (3x-2)^5$, $n = 3$

(d) $p(x) = (x-1)^6 + (2x-3)^2$, $n = 1$

3.4 Estudo de funções

Vamos agora ver como o estudo das derivadas duma função nos permite obter informação extremamente útil não apenas para resolver problemas de determinação de máximos e mínimos — conhecidos como *problemas de optimização*, extremamente importantes nas aplicações da Análise Matemática — mas também para construir gráficos de funções muito mais complexas do que aquelas que temos vindo a considerar.

3.4.1 Extremos e monotonia

Da definição de derivada duma função num ponto como limite da taxa de variação, podemos tirar conclusões sobre o comportamento da função nesse ponto a partir do seu valor.

Suponhamos que $f'(a) = b > 0$. Expandindo a definição de derivada, isto significa que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

donde, numa vizinhança do ponto a, o sinal da diferença $(f(x) - f(a))$ é igual ao sinal de $(x - a)$. Isto significa que o valor da função à direita de a é superior ao valor de $f(a)$ e que o seu valor à esquerda de a é inferior ao valor de $f(a)$: a função é crescente no ponto a. Em termos gráficos, a definição de derivada como declive da recta tangente ao gráfico confirma esta conclusão: se a função é localmente aproximada por uma recta de declive positivo, então é natural que ela seja crescente.

Um raciocínio análogo permite estabelecer que, se o valor de $f'(a)$ for negativo, então a função é decrescente no ponto a. A análise do sinal de f' é então uma ferramenta extremamente útil no estudo do comportamento da função f.

Em particular, num ponto em que f atinja um extremo relativo (máximo ou mínimo local) a sua derivada f', se estiver definida, tem de se anular: não pode ser negativa porque a função não é decrescente, nem positiva porque a função não é crescente.

Definição. O ponto a diz-se um *ponto crítico* duma função f se $f'(a) = 0$.

Proposição. Se a função f é diferenciável em a e $f(a)$ é um extremo local (máximo ou mínimo) de f, então a é um ponto crítico de f.

Este resultado tem profundas implicações práticas, já que permite determinar com muito mais facilidade máximos e mínimos de funções diferenciáveis: em vez de termos de analisar todo o seu domínio, podemos concentrar-nos nos pontos em que a sua derivada se anula. Em muitos casos, é simples determinar se estes são máximos ou mínimos — ou se são pontos em que a função é crescente ou decrescente mas a sua derivada anula-se. Note-se, contudo, que é preciso ter atenção aos pontos em que a função não é diferenciável: a função módulo tem um mínimo absoluto para $x = 0$, mas a sua derivada nunca se anula.

Problema. Um agricultor pretende cercar uma parcela rectangular de 50 m^2 dum terreno que faz fronteira com um ribeiro. Quais as dimensões que o terreno deve ter por forma a minimizar a quantidade de material necessária para a cerca?

Resolução. Um terreno rectangular de lados x e y tem uma área de xy m^2. Uma vez que a área total a cercar deve ser de 50 m^2, queremos ter $xy = 50$, ou $y = \frac{50}{x}$.

Já a quantidade de cerca a utilizar depende da soma dos três lados do terreno que não confinam com o rio. Supondo que y é o comprimento do lado paralelo ao rio, temos que a quantidade de cerca é de $2x + y$, conforme se vê na Figura 3.6.

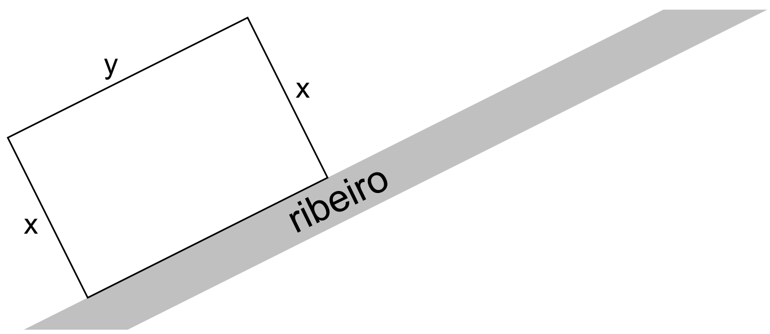


Figura 3.6: O terreno a cercar.

Então a expressão que nos dá a quantidade de material a usar a partir do lado x do terreno é $Q(x) = 2x + y = 2x + \frac{50}{x}$ e queremos determinar o valor de x para o qual esta quantidade é mínima. Vamos resolver isto derivando esta expressão e procurando os pontos em que essa derivada se anula.

$$\begin{aligned} Q'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \left(2x + \frac{50}{x}\right)' = 0 \Longleftrightarrow 2 - \frac{50}{x^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2 = \frac{50}{x^2} \Longleftrightarrow 2x^2 = 50 \Longleftrightarrow x^2 = 25 \Longleftrightarrow x = \pm 5 \end{aligned}$$

Uma vez que estamos a tratar de terrenos, o valor de x tem de ser positivo, pelo que a solução $x = -5$ não faz sentido. Para $x = 5$, obtemos uma quantidade $Q(5) = 20$ m de cerca. Uma vez que este é o único extremo relativo da função Q, podemos comprovar que se trata dum mínimo (e não dum máximo) calculando outro valor qualquer de Q e verificando que é superior a 20.

Problema. Um navio deve efectuar uma viagem de 1300 milhas. As despesas de viagem são calculadas da seguinte forma:

- a despesa com a tripulação é de €125 por hora;

- a despesa com o combustível é função da velocidade v no navio (em nós) e dada por $d = \frac{v^3}{1000}$ euros por hora.

Qual a velocidade a que o navio deve seguir por forma a que a despesa seja mínima?

Resolução. Para poder resolver este problema, temos de exprimir a despesa total D da viagem (em euros) em função da sua velocidade v (em horas).

Sendo a velocidade expressa em nós, que equivalem a milhas por hora, a duração total da viagem será de $\frac{1300}{v}$ horas. Assim, a parte correspondente às despesas com a tripulação será de $125 \times \frac{1300}{v}$ euros. Somando a despesa com o combustível, obtemos

$$D(v) = \frac{162.500}{v} + \frac{v^3}{1000}\,.$$

Uma vez que esta função só faz sentido para $v > 0$ e é diferenciável em $]0, +\infty[$, os seus extremos ou são pontos críticos de D ou são o ponto 0. Derivando D, obtemos

$$D'(v) = -\frac{162.500}{v^2} + \frac{3v^2}{1000}$$

e os pontos críticos de D ocorrem quando

$$\begin{aligned} D'(v) = 0 &\iff -\frac{162.500}{v^2} + \frac{3v^2}{1000} = 0 \\ &\iff -162.500 + \frac{3v^4}{1000} = 0 \\ &\iff 3v^4 = \frac{162.500.000}{3} \\ &\iff v = \sqrt[4]{\frac{162.500.000}{3}} \approx 15.26\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $D(v) \to +\infty$ quando $v \to 0$ e quando $v \to +\infty$, este ponto crítico corresponde a um mínimo de D. Logo a velocidade óptima do navio é de cerca de 15 nós.

Exercício 40. Pretende-se delimitar uma parcela rectangular de terreno que deve ter área igual a 600 m^2 colocando uma rede a toda a volta e ainda paralelamente ao lado menor, por forma a dividir o terreno ao meio.

Determine as medidas dos lados do rectângulo por forma a que a quantidade de rede a utilizar seja mínima.

Exercício 41. Pretende-se construir um recipiente prismático de secção quadrada, com tampa, cuja capacidade seja de 2.5 m^3. Sabendo que o material para fazer o fundo custa €2, o da tampa €3 e o da parte lateral €1, determine as dimensões que o recipiente deve ter para que a despesa seja mínima.

Exercício 42. Determine os pontos críticos das seguintes funções. Quais deles são extremos relativos?

(a) $f(x) = x^5 - x$ (b) $f(x) = e^{-x^2}$ (c) $g(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ (d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Do ponto de vista da Análise Matemática, o nosso interesse é estudar funções independentemente do problema que lhes deu origem. Assim, vamos concentrar-nos na determinação de máximos e mínimos de funções, abstraindo do contexto em que elas surgem.

Exemplo. No estudo que fizemos das parábolas, vimos que tinham um extremo absoluto sobre o seu eixo de simetria. Sendo f um polinómio de segundo grau, $f(x) = Ax^2+Bx+C$, podemos agora verificar esta afirmação formalmente: a derivada de f tem a expressão

$$f'(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B\,,$$

que se anula precisamente quando $x = -\frac{B}{2A}$.

Um caso mais interessante, que podemos agora estudar completamente, diz respeito aos polinómios de terceiro grau. Vimos que a função $f(x) = x^3$ era estritamente crescente em todo o seu domínio; porém, a forma geral do gráfico de polinómios de terceiro grau (também chamadas funções cúbicas) é a de um "S" deitado, com um máximo relativo e um mínimo relativo.

Consideremos por exemplo a função g definida por $g(x) = x^3 - 3x + 4$. Se calcularmos a sua derivada, obtemos

$$g'(x) = 3x^2 - 3\,.$$

Os zeros desta função ocorrem quando

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1\,,$$

donde os pontos críticos de g são $x = \pm 1$.

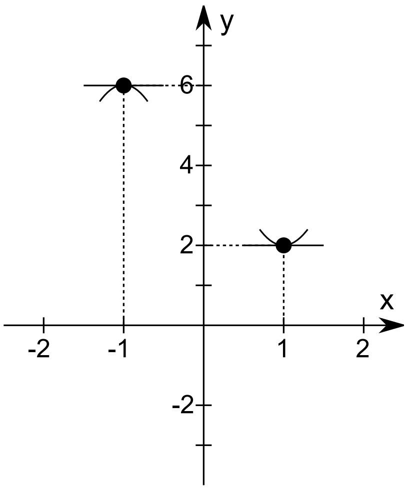
Uma vez que g' é uma função de segundo grau, sabemos já que o seu gráfico é uma parábola com a concavidade virada para cima. Então g' é positiva (e g é crescente) nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$; e g' é negativa (e g é decrescente) no intervalo $]-1, 1[$. Uma vez que g é crescente à esquerda de -1 e decrescente à direita, este ponto é um máximo relativo; já à esquerda de 1 a função g é decrescente, crescendo à direita deste ponto, que é portanto um mínimo relativo.

É habitual sintetizar esta informação numa tabela como a seguinte.

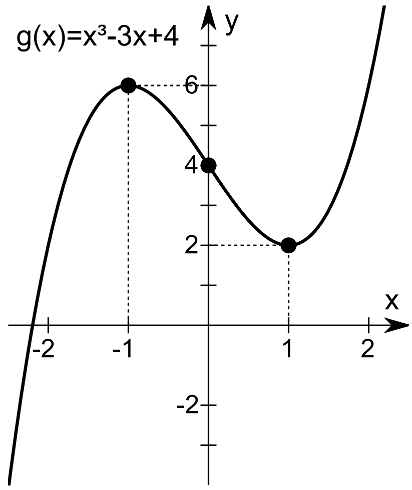
	$-\infty$				$+\infty$
		-1		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Podemos inserir de imediato esta informação no gráfico que estamos a construir, tendo apenas de calcular $g(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 4 = 6$ e $g(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 4 = 2$. Obtemos o resultado ilustrado na Figura 3.7 (a).

Juntando a esta informação os limites de g quando $x \to \pm\infty$ e o valor $g(0) = 4$, podemos construir facilmente o seu gráfico, que se apresenta na Figura 3.7 (b).



(a)



(b)

Figura 3.7: Gráfico de $g(x) = x^3 - 3x + 4$.

Exercício 43. Usando a técnica descrita acima, construa os gráficos das seguintes funções cúbicas.

(a) $h(x) = -x^3 + 12x - 6$ (b) $g(x) = -2x^3 + 3x^2$ (c) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 1$

Qual é o problema que se coloca ao recorrer a este método para construir o gráfico de $g(x) = x^3 + 3x + 2$?

3.4.2 Pontos de inflexão e concavidade

A análise que fizemos do significado gráfico da primeira derivada pode ser estendida à segunda derivada. Se pensarmos numa função f que seja duas vezes diferenciável, sabemos que f'' é a derivada de f'. Então, se f'' for positiva, f' é crescente; se f'' for negativa, f' é decrescente; e se f' tiver um extremo relativo, então f'' anula-se.

O que é que significa dizer que *a derivada* de f é crescente num ponto a? Uma vez que $f'(a)$ é a taxa de crescimento instantâneo de f no ponto a, se $f''(a) > 0$ estamos a dizer que esta taxa está a aumentar no ponto a; ou seja, a função f está a crescer mais rapidamente à direita de a do que à esquerda. Comparando com a tangente ao gráfico no ponto a, que é uma recta de declive $f'(a)$, um pouco de reflexão mostra que o gráfico de f está acima dessa recta numa vizinhança de a. Da mesma forma, se $f''(a) < 0$, então o gráfico de f está abaixo da recta que lhe é tangente nesse ponto.

Definição. Diz-se que uma curva tem a *concavidade virada para cima* num ponto P quando essa curva está acima da recta que lhe é tangente em P numa vizinhança desse ponto.

Diz-se que uma curva tem a *concavidade virada para baixo* num ponto P quando essa curva está abaixo da recta que lhe é tangente em P numa vizinhança desse ponto.

Um ponto P diz-se um *ponto de inflexão* duma curva se a concavidade da curva nos pontos à direita de P tem um sentido diferente da concavidade dessa curva nos pontos à esquerda de P.

Num ponto de inflexão, a recta tangente à curva intersecta a curva — o que é um pouco contraditório com o conceito intuitivo de tangente, mas é de facto o significado geométrico correcto. Pode-se demonstrar formalmente que os pontos críticos duma função que não são extremos relativos são precisamente os ponto de inflexão do gráfico dessa função: é o que se passa, por exemplo, com $f(x) = x^3$ no ponto 0.

A análise da segunda derivada pode facilitar muito a classificação dos pontos críticos. Num ponto crítico, a recta tangente ao gráfico da função é horizontal; se a segunda derivada da função for positiva, o gráfico da função está acima desta recta, logo o ponto crítico é um mínimo (Figura 3.8 (a)); se a segunda derivada da função for negativa, então o gráfico da função está abaixo desta recta e o ponto crítico é um máximo (Figura 3.8 (b)).

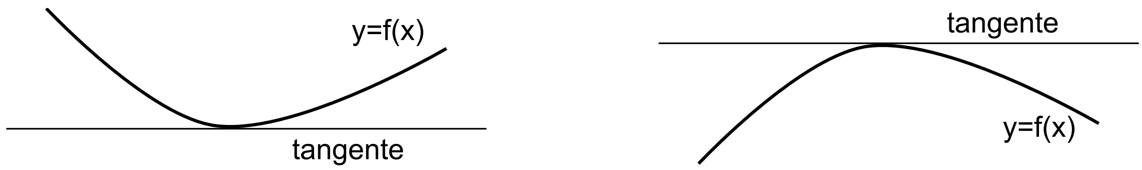


Figura 3.8: Pontos críticos duma função, sendo a segunda derivada positiva (a) ou negativa (b).

Para além disso, a análise da segunda derivada tem interesse próprio para a construção do gráfico duma função. Vamos tomar para exemplo a função g definida por $g(x) = x^3 + 3x + 2$, cujo gráfico vimos no exercício acima não ser fácil de construir só por análise da primeira derivada.

Os pontos críticos de g são dados por

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 + 3 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -1\,,$$

condição que é impossível. Esta função não tem portanto extremos relativos — a sua derivada é sempre positiva, logo trata-se duma função crescente em $\mathbb{R}$.

Em contrapartida, a segunda derivada de g é

$$g''(x) = 6x\,,$$

que se anula para $x = 0$. Para valores negativos de x, $g''(x)$ é negativa, enquanto que para valores positivos de x, $g''(x)$ é positiva. Então o gráfico de g tem a concavidade virada para baixo à esquerda da origem e virada para cima à direita da origem, sendo o ponto de abcissa 0 um ponto de inflexão.

Tal como atrás, é habitual representar esta informação numa tabela — neste caso, uma tabela muito simples. A sigla "p.i." designa um ponto de inflexão.

	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow\cap$	p.i.	$\nearrow\cup$

Tendo em conta que $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, que $g(0) = 2$ e que $g'(2) = 15$, podemos esboçar (ainda que de forma pouco precisa) o gráfico de g, conforme ilustrado na Figura 3.9.

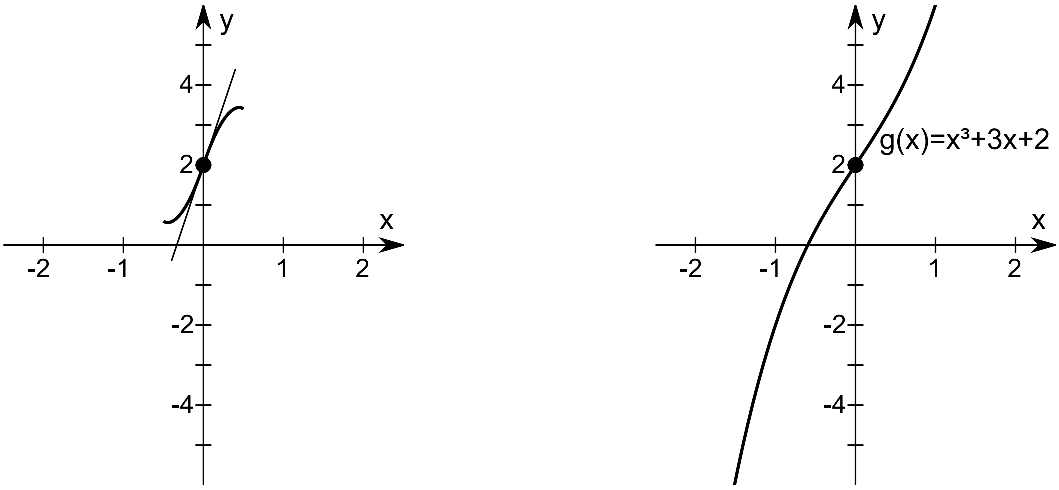


Figura 3.9: Gráfico de $g(x) = x^3 + 3x + 2$.

Exercício 44. Calcule a segunda derivada das seguintes funções e indique quais os seus pontos de inflexão e o sentido da sua concavidade.

(a) $f(x) = x^5 - x$ (b) $f(x) = e^{-x^2}$ (c) $g(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ (d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

3.4.3 Construção do gráfico de funções

Neste momento dispomos de todas as técnicas necessárias para fazer o estudo completo de funções transcendentes elementares. Nesta secção, vamos ilustrar detalhadamente o procedimento a seguir, utilizando toda a informação que podemos obter recorrendo ao cálculo de limites e derivadas.

Por norma, o estudo duma função inclui os seguintes passos.

1. Determinação do domínio.
2. Estudo da continuidade.
3. Determinação das assímptotas.
4. Cálculo da primeira derivada e análise de extremos e intervalos de monotonia.
5. Cálculo da segunda derivada e análise do sentido da concavidade e pontos de inflexão.
6. Determinação do contra-domínio.
7. Esboço do gráfico.

Para o esboço do gráfico, é normalmente útil determinar os pontos de intersecção com os eixos coordenados, ou seja, calcular o valor da função no ponto 0 e determinar as suas raízes. Consoante o tipo de função, alguns destes pontos podem não ser necessários se a informação que fornecem for redundante.

Estudo de $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

Domínio e continuidade. Trata-se duma função polinomial, pelo que sabemos imediatamente que o seu domínio é $\mathbb{R}$ e que f é contínua em todos os pontos da recta real.

Assímptotas. Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não pode ter assímptotas verticais. Pode, contudo ter assímptotas oblíquas, pelo que vamos calcular os limites de $\frac{f(x)}{x}$ quando $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 6x^2 + 4}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 - 6x + \frac{4}{x} = \pm\infty$$

Assim, o gráfico de f não tem assímptotas oblíquas.

Monotonia e extremos. A primeira derivada de f é $f'(x) = 4x^3 - 12x$.

Para determinar os zeros desta expressão, vamos factorizá-la.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 4x^3 - 12x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4x^2 - 12 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Então f tem três pontos críticos. Para estudar o sinal de f', recordemos que, sendo um polinómio de grau 3 com três raízes, vai trocar de sinal a cada raiz. Como $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$, podemos construir a seguinte tabela.

	$-\infty$							$+\infty$
		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Os extremos relativos de f são então

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = -5 \qquad f(0) = 4 \qquad \left(\sqrt{3}\right) = -5\,.$$

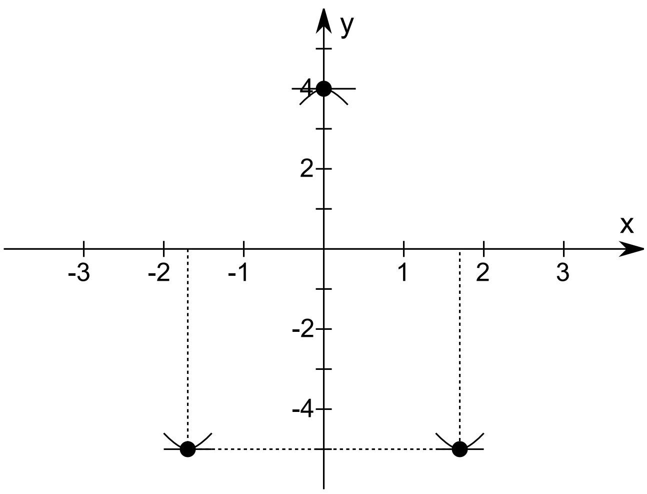


Figura 3.10: Marcação dos extremos de f.

Concavidades e inflexões. A segunda derivada de f é

$$f''(x) = 12x^2 - 12\,.$$

Para determinar os zeros desta expressão, novamente factorizar esta expressão.

$$f''(x) = 0 \iff 12x^2 - 12 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Uma vez que f'' é um polinómio de segundo grau com coeficiente positivo no termo em x^2, sabemos que é uma função negativa entre as suas raizes e positiva fora do intervalo entre elas. Para juntar estes resultados com os anteriores, convém observar que $1 < \sqrt{3}$, pelo que cada um destes valores está entre dois zeros de f'.

$-\infty$ $+\infty$

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow\cup$	min	$\nearrow\cup$	p.i.	$\nearrow\cap$	max	$\searrow\cap$	p.i.	$\searrow\cup$	min	$\nearrow\cup$

Nos pontos de inflexão, a função f toma o valor $f(-1) = f(1) = -1$.

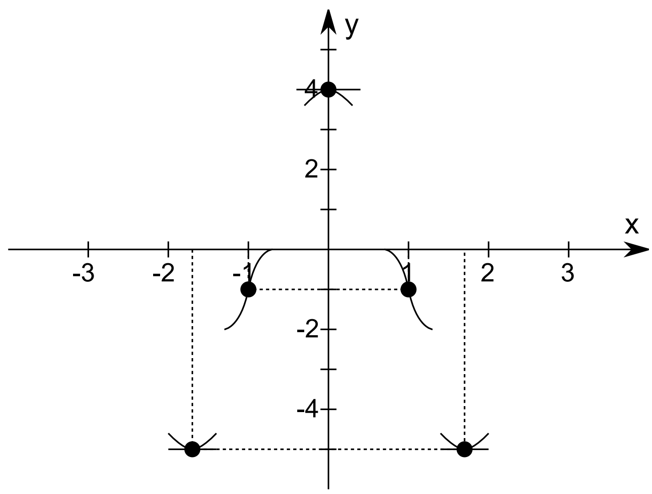


Figura 3.11: Marcação dos pontos de inflexão de f.

Contradomínio. Uma vez que f tende para $+\infty$ quando $x \to \pm\infty$, conforme vimos já atrás, e que tem dois mínimos relativos em que toma o valor -5, podemos concluir que o contradomínio desta função é o intervalo $[-5, +\infty[$.

Esboço do gráfico. Já vimos acima que $f(0) = 4$; podemos ainda determinar as soluções de $f(x) = 0$ aplicando a fórmula resolvente para a equação de segundo grau em ordem a x^2:

$$x^4 - 6x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = 3 \pm \sqrt{9-4} \iff x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}\,.$$

Para ter uma ideia da ordem de grandeza destes valores, basta ver que $\sqrt{5} \approx 2.2$, e portanto

$$\pm\sqrt{3+\sqrt{5}} \approx \pm\sqrt{3+2.2} \approx \pm\sqrt{5.2} \approx \pm 2.3$$

$$\pm\sqrt{3-\sqrt{5}} \approx \pm\sqrt{3-2.2} \approx \pm\sqrt{0.8} \approx \pm 0.9\,;$$

com esta informação é possível esboçar o gráfico de f com um grau razoável de precisão.

É de todo o interesse a verificação de que este gráfico está de acordo com toda a informação determinada analiticamente nos pontos anteriores.

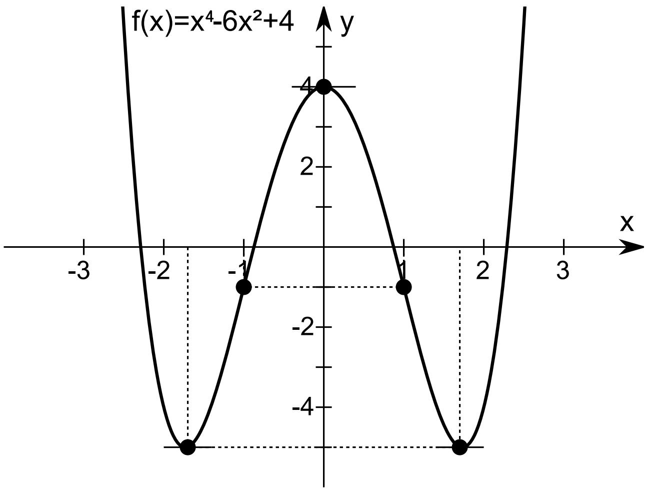


Figura 3.12: Esboço do gráfico de f.

Estudo de $g(x) = \frac{x+2}{2x-3}$

Domínio e continuidade. A função g é um quociente de polinómios, pelo que está definida e é contínua em todos os pontos em que o seu denominador não se anula. Uma vez que $2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$, concluímos que $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Assímptotas. A função g pode ter uma assímptota vertical no ponto que não pertence ao seu domínio. Calculando limites laterais, obtemos

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \frac{x+2}{2x-3} = \frac{7/2}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}^-} \frac{x+2}{2x-3} = \frac{7/2}{0^-} = -\infty$$

donde $x = \frac{3}{2}$ é uma assímptota vertical do gráfico de g. A aproximação do gráfico à assímptota pela esquerda é na parte inferior desta; à direita é na metade superior.

Da expressão de g sabemos que esta função tem limites finitos quando o seu argumento tende para $\pm\infty$, pelo que o gráfico terá uma assímptota horizontal. Para comprovar este facto, vamos calcular esse limite.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{2x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}} = \frac{1}{2}$$

Então $y = \frac{1}{2}$ é uma assímptota horizontal do gráfico de g. A aproximação do gráfico à assímptota é por cima quando $x \to +\infty$, já que deste lado o numerador é sempre maior que 1 e o denominador menor que 2; e por baixo quando $x \to -\infty$, já que deste lado o numerador é sempre menor do que 1 e o denominador maior do que 2.

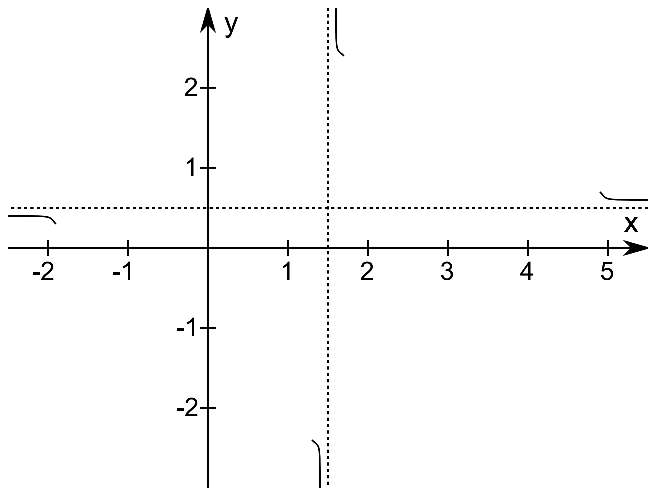


Figura 3.13: Assímptotas da função g.

Monotonia e extremos. A primeira derivada de g é

$$g'(x) = \frac{1 \times (2x-3) - 2 \times (x+2)}{(2x-3)^2} = -\frac{7}{(2x-3)^2}\,,$$

que é uma expressão sempre negativa (o denominador é um quadrado, logo é sempre positivo). Concluímos assim que g é decrescente em cada um dos intervalos que constituem o seu domínio. A tabela seguinte sintetiza esta informação, sendo a sigla n.d. usada para indicar que a função (ou a sua derivada) não está definida naquele ponto.

	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	n.d.	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	n.d.	$\searrow$	

A função g não tem portanto extremos relativos.

Concavidades e inflexões. A segunda derivada de g é

$$g''(x) = \left(-7(2x-3)^{-2}\right)' = 28(2x-3)^{-3} = \frac{28}{(2x-3)^3}\,,$$

que tem o sinal do seu denominador: negativo para $x < \frac{3}{2}$ e positivo para $x > \frac{3}{2}$. Podemos então completar a tabela anterior com esta informação.

	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	n.d.	$-$	
$g''(x)$		$-$	n.d.	$+$	
$g(x)$		$\searrow \cap$	n.d.	$\searrow \cup$	

Contradomínio. No intervalo $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$, a função g decresce continuamente desde $\frac{1}{2}$ (valor que nunca é atingido) até $-\infty$; no intervalo $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$, decresce continuamente desde $+\infty$ até $\frac{1}{2}$ (sem atingir este valor). Então o contradomínio de g inclui todos os reais excepto $\frac{1}{2}$: $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Esboço do gráfico. Para podermos esboçar o gráfico de g com mais precisão, podemos calcular o valor de $g(0) = -\frac{2}{3}$ e o ponto em que $g(x) = 0$, obtido resolvendo a equação

$$g(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x+2}{2x-3} = 0 \Longleftrightarrow x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2\,.$$

O gráfico está desenhado na figura seguinte.

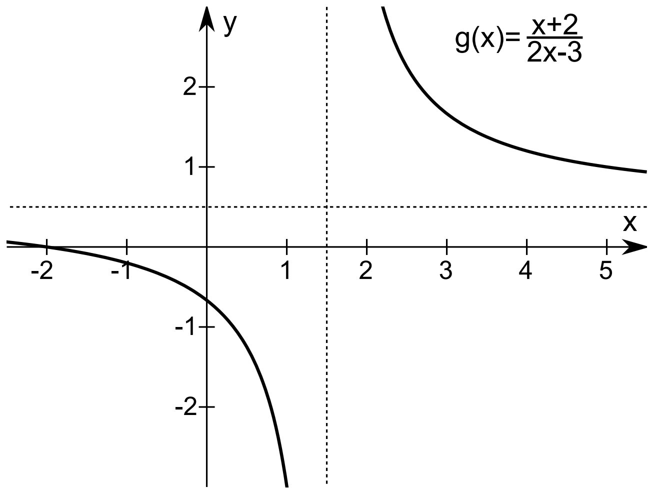


Figura 3.14: Esboço do gráfico de g.

Estudo de $h(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$

Domínio e continuidade. Novamente, trata-se duma função racional, pelo que está definida e é contínua em todos os pontos em que o seu denominador não se anula. Então

$$D_h = \{x \mid x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

Assímptotas. Tal como sucedia com a função anterior, a função h pode ter uma assímptota vertical no ponto que não pertence ao seu domínio. Calculando limites laterais, obtemos

$$\lim_{x\to -1^+} h(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

donde $x = -1$ é uma assímptota vertical do gráfico de h. A aproximação do gráfico à assímptota pela esquerda é na parte inferior desta; à direita é na metade superior.

A expressão de h indica que esta função tem limites infinitos quando o seu argumento tende para $\pm\infty$, pelo que o gráfico não deverá ter uma assímptota horizontal. Assim, vamos procurar directamente assímptotas oblíquas.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Se existir uma assímptota oblíqua, ela terá declive 1. Para calcular a sua ordenada na origem, vamos calcular

$$\lim_{x\to\pm\infty}(h(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x+1}-\frac{x^2+x}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2$$

Então $y=x-2$ é uma assímptota oblíqua do gráfico de h. Para determinar a aproximação à assímptota, observe-se que

$$\frac{-2x-1}{x+1} = \frac{-2(x+1)+1}{x+1} = -2+\frac{1}{x+1}$$

que é maior que -2 quando $x\to+\infty$ e menor que -2 quando $x\to-\infty$. Então a aproximação do gráfico à assímptota é por cima quando $x\to+\infty$ e por baixo quando $x\to-\infty$.

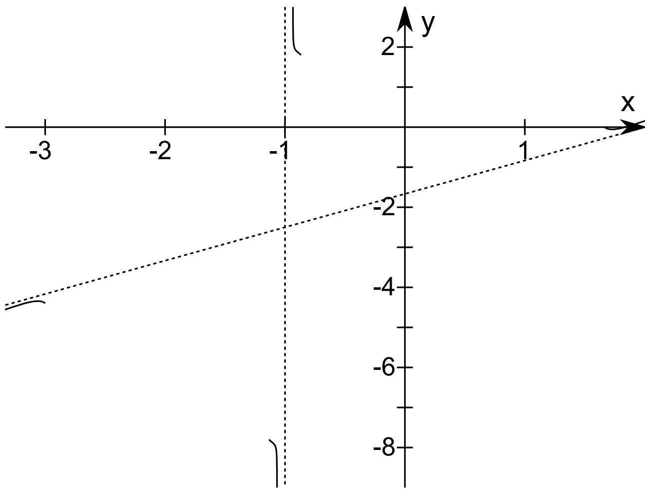


Figura 3.15: Assímptotas do gráfico de h.

Monotonia e extremos. A primeira derivada de h é

$$h'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-1\,(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,.$$

Uma vez que o denominador desta fracção é sempre positivo, para estudar os zeros e o sinal de h' basta analisar o seu numerador. Temos novamente um polinómio de segundo grau com coeficiente positivo de x^2; factorizando-o obtemos

$$x^2+2x=0 \iff x(x+2)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=-2$$

e h' é positiva entre estes dois valores e negativa fora desse intervalo.

	$-\infty$						$+\infty$
		-2		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Os extremos relativos de h são então

$$h(-2)=-5 \qquad h(0)=-1\,.$$

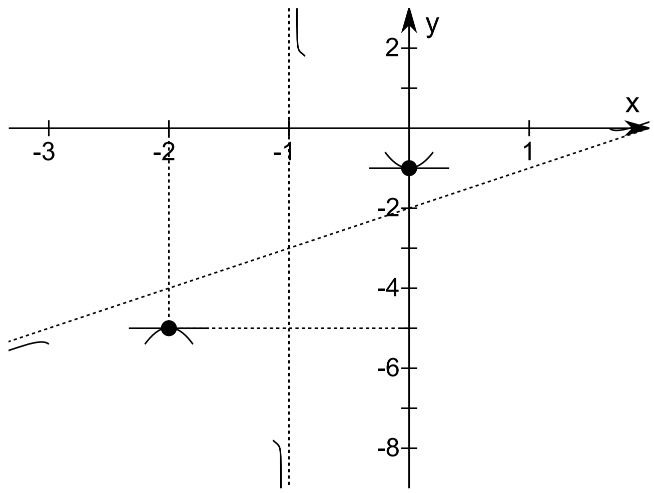


Figura 3.16: Extremos da função h.

Concavidades e inflexões. A segunda derivada de h é

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\left(x^2+2x\right)(x+1)^{-2}\right)' = (2x+2)(x+1)^{-2} - 2\left(x^2+2x\right)(x+1)^{-3} \\ &= 2(x+1)^2(x+1)^{-3} - 2\left(x^2+2x\right)(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}\,, \end{aligned}$$

que nunca se anula e tem o sinal de $(x+1)^3$: positiva quando $x > -1$ e negativa quando $x < -1$.

$-\infty$							$+\infty$
		-2		-1		0	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
$h''(x)$	$-$	$-$	$-$	n.d.	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$\nearrow\cap$	max	$\searrow\cap$	n.d.	$\searrow\cup$	min	$\nearrow\cup$

Contradomínio. No troço até -1, os valores da função crescem até -5 e voltam a diminuir até $-\infty$, pelo que abrangem o intervalo $]-\infty,-5]$. No troço a partir de -1, os valores da função decrescem até -1 e depois aumentam sem limite, pelo que abrangem o intervalo $[-1,+\infty[$. Assim, $h(\mathbb{R}) =]-\infty,-5] \cup [-1,+\infty[$.

Esboço do gráfico. Com toda a informação adquirida, já podemos ter uma ideia do aspecto do gráfico de h, que se apresenta na Figura 3.17.

Estudo duma função definida por ramos

Seja f a função definida da seguinte forma.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \frac{x^2+1}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

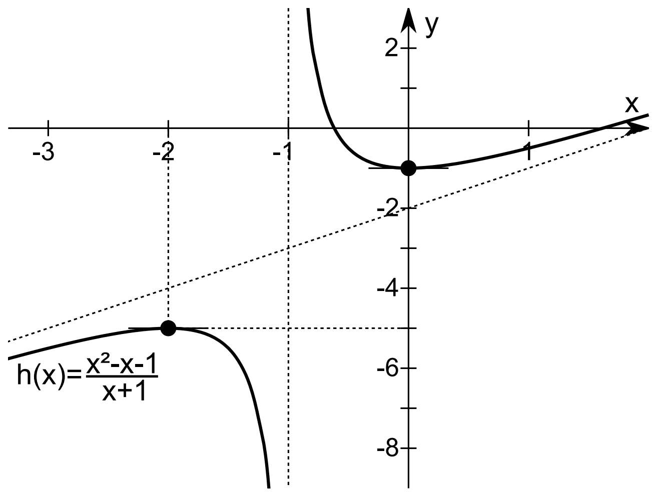


Figura 3.17: Gráfico da função h.

Domínio e continuidade. Uma vez que os ramos que definem f cobrem toda a recta real, temos $D_f = \mathbb{R}$. Também sabemos que f é contínua nos intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ e $]2, +\infty[$, já que é definida pela expressão duma função transcendente elementar no interior de cada um daqueles intervalos.

A forma mais simples de determinar a continuidade de f nos pontos 0 e 2 é calculando limites laterais.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \arctan(x) = \arctan(0) = 0 \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0 \\
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4 \\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{2^2+1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Então f é contínua em 0 (os limites laterais coincidem neste ponto) mas não em 2 (os limites laterais não coincidem neste ponto).

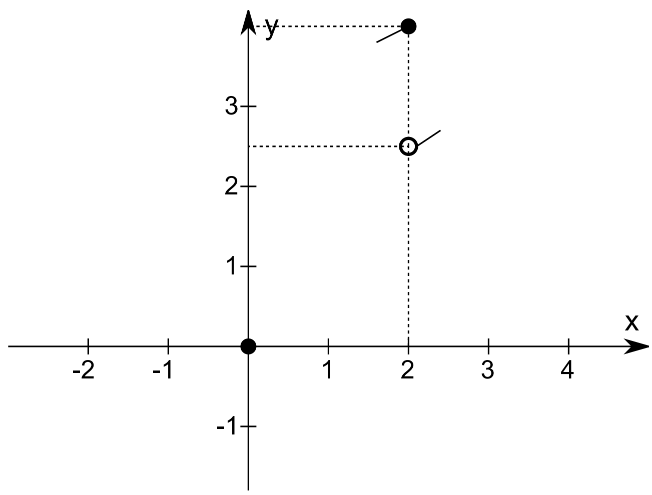


Figura 3.18: Pontos de mudança de ramo da função f.

Assímptotas. À partida, a função f poderia ter assímptotas verticais nos pontos 0 e 2; porém, já verificámos que os seus limites laterais são finitos à direita e à esquerda de cada um daqueles pontos, pelo que isto não sucede.

Para determinarmos se o gráfico de f tem assímptotas horizontais ou oblíquas, vamos recorrer ao cálculo de limites. Intuitivamente, este gráfico deve ter uma assímptota horizontal à esquerda (já que $\arctan(x)$ tem uma assímptota horizontal) e uma assímptota oblíqua à direita (já que o valor de $f(x)$ se aproxima de x quando $x \to +\infty$). Verifiquemos estes factos.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Assim, a recta $y = -\frac{\pi}{2}$ é assímptota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$, com aproximação por cima (já que $\arctan(x) > -\frac{\pi}{2}$ para qualquer valor de x), enquanto a recta $y = x$ é assímptota oblíqua à direita, com aproximação também por cima (já que $\frac{1}{x}$ é positivo quando $x \to +\infty$).

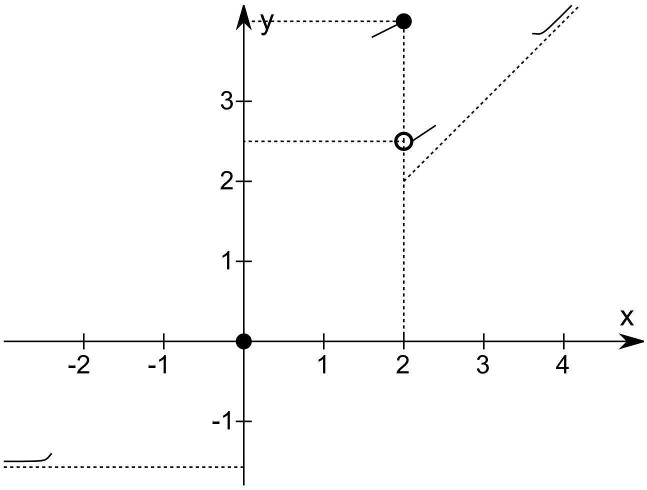


Figura 3.19: Assímptotas da função f.

Monotonia e extremos. A primeira derivada de f é a seguinte função.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ \frac{x^2-1}{x^2} & x > 2 \end{cases}$$

No ponto 2, a função não é contínua, logo não é diferenciável. Já no ponto 0, temos que

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{1+x^2} = 1$$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^-} 2x = 0$$

donde a função também não é diferenciável neste ponto. Esta função não tem pontos críticos, já que as expressões da sua derivada são sempre positivas dentro dos intervalos em que estão definidas; no ponto 0 ela é contínua, logo também não tem extremos. Já no ponto 2 o valor da função passa de valores que tendem para 4 (à esquerda) para $\frac{5}{2}$ (no ponto 2), continuando depois a crescer (à direita); então o ponto 2 é um máximo relativo de f.

	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	n.d.	$+$	n.d.	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\nearrow$	

Concavidades e inflexões. A segunda derivada de f é

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1+x^2)^2} & x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ \frac{2}{x^3} & x > 2 \end{cases}$$

não estando definida nos pontos 0 e 2, onde f' já não estava definida. Esta função é agora negativa para $x < 0$ (a sua expressão é uma fracção com numerador negativo e denominador positivo) e positiva para $x > 0$. Assim, f tem concavidade virada para baixo quando $x < 0$ e para cima quando $x > 0$, donde o ponto 0 é um ponto de inflexão.

	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	n.d.	$+$	n.d.	$+$	
$f''(x)$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$+$	
$f(x)$	$\nearrow \cap$	p.i.	$\nearrow \cup$	max	$\nearrow \cup$	

Contradomínio. No intervalo $]-\infty, 2[$, a função cresce continuamente de $-\frac{\pi}{2}$ até 4, sem atingir nenhum destes valores. Entre 2 e $+\infty$, cresce de $\frac{5}{2}$ até $+\infty$. Então $f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

Esboço do gráfico. Vamos juntar toda esta informação esboçando o gráfico de f.

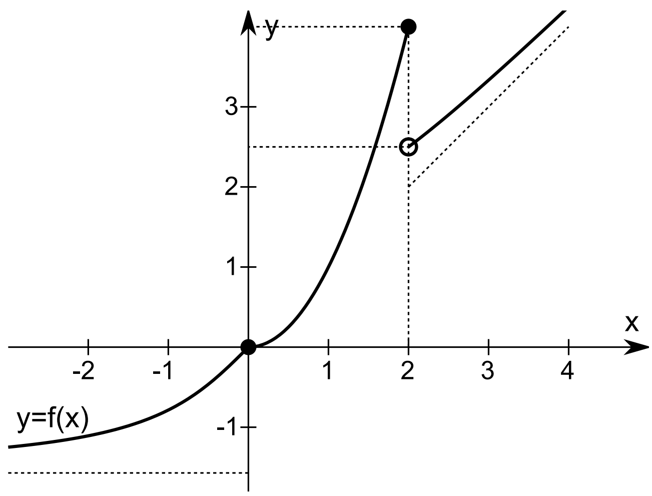


Figura 3.20: Gráfico da função f.

Estudo de $g(x) = \frac{e^{x-1}}{x+1}$

Domínio e continuidade. Esta função é um quociente duma exponencial por um polinómio, logo está definida e é contínua em todos os pontos em que o polinómio não se anule. Temos portanto que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Assímptotas. No ponto -1, o gráfico de g pode ter assímptotas verticais. Calculando limites laterais, obtemos

$$\lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{e^{x-1}}{x+1} = \frac{e^{-2}}{0^\pm} = \pm\infty$$

donde a recta $x = -1$ é assímptota vertical do gráfico de g O gráfico aproxima-se da metade superior desta recta à direita de -1 e da metade inferior à esquerda daquele ponto.

Quando $x \to -\infty$, o numerador desta função aproxima-se de 0, pelo que faz sentido procurar uma assímptota horizontal.

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x-1}}{x+1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = 0$$

Então a recta $y = 0$ é uma assímptota horizontal à esquerda do gráfico de g.

Quando $x \to +\infty$, o valor da função cresce ilimitadamente, pelo que faz mais sentido procurar directamente uma assímptota oblíqua. Porém,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x-1}}{x^2+x} = +\infty$$

uma vez que a exponencial cresce mais rapidamente do que qualquer polinómio. Logo o gráfico de g também não tem assímptota oblíqua quando $x \to +\infty$.

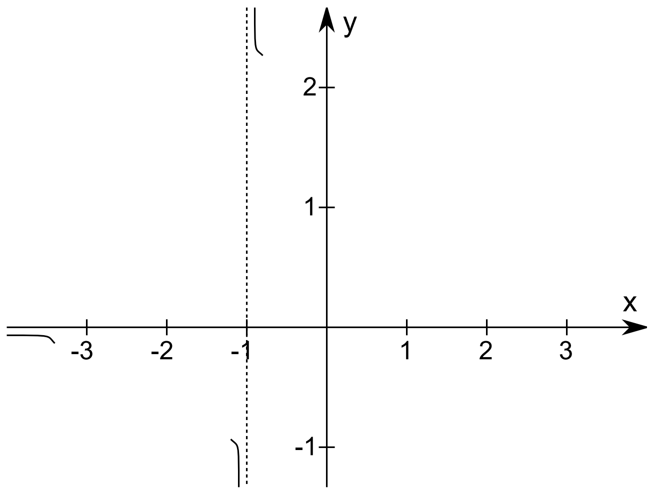


Figura 3.21: Assímptotas da função g.

Monotonia e extremos. A derivada de g é

$$g'(x) = \frac{e^{x-1}(x+1) - 1 \times e^{x-1}}{(x+1)^2} = \frac{xe^{x-1}}{(x+1)^2}\,.$$

Ora e^{x-1} nunca se anula, pelo que $g'(x) = 0$ apenas quando $x = 0$. Uma vez que e^{x-1} e $(x+1)^2$ são sempre positivos, o sinal de $g'(x)$ é o sinal de x — negativo quando $x < 0$, positivo quando $x > 0$. O ponto 0 é portanto um mínimo relativo, onde a função toma o valor $g(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

	$-\infty$					$+\infty$
		-1		0		
$g'(x)$	$-$	n.d.	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	

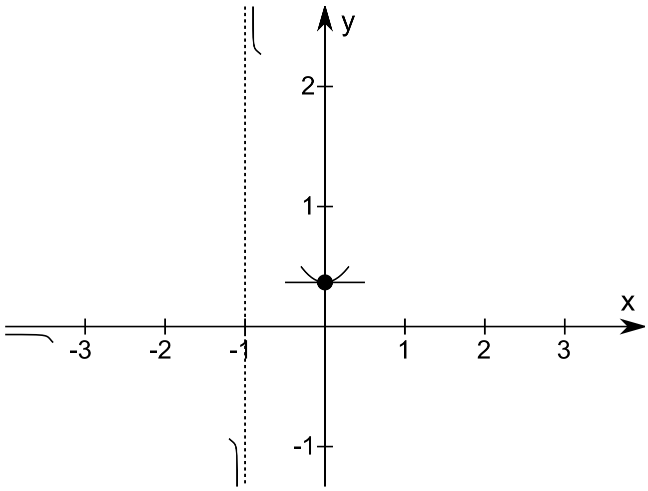


Figura 3.22: Mínimo da função g.

Concavidades e inflexões. A segunda derivada de g é

$$g''(x) = \frac{\left(e^{x-1} + xe^{x-1}\right)(x+1)^2 - xe^{x-1} \times 2(x+1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{\left(e^{x-1} + xe^{x-1}\right)(x+1) - 2xe^{x-1}}{(x-1)^3} = \frac{\left(x^2+1\right)e^{x-1}}{(x-1)^3}$$

Ora o numerador de $g''(x)$ é sempre positivo, logo esta função nunca se anula e tem o sinal de $(x+1)$. Em particular, o gráfico de g não tem pontos de inflexão.

	$-\infty$					$+\infty$
		-1		0		
$g'(x)$	$-$	n.d.	$-$	0	$+$	
$g''(x)$	$-$	n.d.	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$\searrow\cap$	n.d.	$\searrow\cup$	min	$\nearrow\cup$	

Contradomínio. Entre $-\infty$ e -1, o valor de g decresce continuamente de 0 a $-\infty$; entre -1 e $+\infty$, o valor de g decresce continuamente de $-\infty$ até $\frac{1}{e}$, crescendo depois continuamente até $+\infty$. Assim, o contradomínio de g é

$$g(\mathbb{R}) = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[.$$

Esboço do gráfico. A informação de que dispomos já nos permite esboçar o gráfico de g.

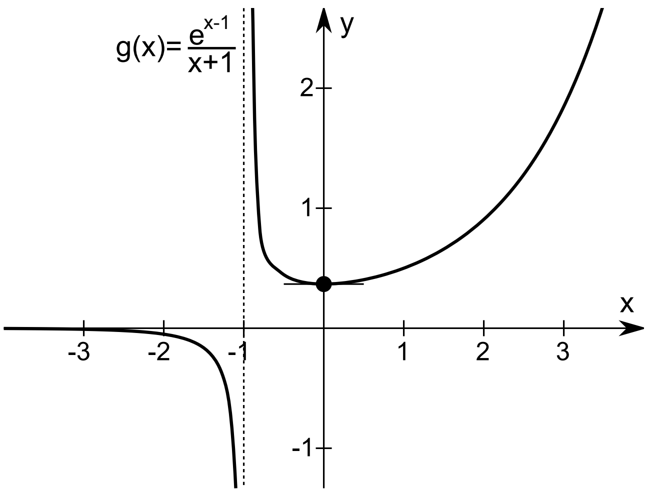


Figura 3.23: Gráfico da função g.

Exercício 45. Estude as seguintes funções segundo a metodologia acima seguida.

(a) $f(x) = xe^{1-\frac{1}{x}}$ (b) $g(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{x}\right)$ (c) $h(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 - 2$

3.5 Propriedades das funções diferenciáveis

Vamos agora ver um conjunto de propriedades de que as funções diferenciáveis gozam. Estes resultados teóricos são, na sua maioria, bastante intuitivos se raciocinarmos em termos gráficos; alguns têm aplicações práticas que discutiremos, enquanto outros serão importantes nos capítulos seguintes.

O primeiro resultado é o Teorema de Rolle. Este teorema afirma que se uma função diferenciável toma o mesmo valor nos extremos dum intervalo, então a sua derivada anula-se nalgum ponto desse intervalo. Graficamente, estamos a dizer que nalgum ponto o gráfico de f tem uma tangente horizontal (Figura 3.24).

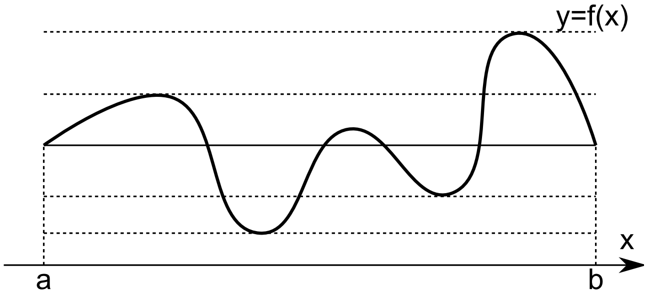


Figura 3.24: Teorema de Rolle: se f é diferenciável em $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$, então nalgum ponto desse intervalo o gráfico de f tem tangente horizontal.

Teorema (Teorema de Rolle)**.** Seja f uma função contínua num intervalo em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ tal que $f(a) = f(b)$. Então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Há dois casos possíveis. Se f é uma função constante em $[a,b]$, então $f' = 0$ para todo $x \in]a,b[$ e o resultado é trivial. No caso em que f não é constante em $[a,b]$, o Teorema de Weierstrass garante que f tem um máximo e um mínimo em $[a,b]$; como $f(a) = f(b)$, então um destes terá de ocorrer num ponto c diferente de a e de b, e nesse ponto $f'(c) = 0$. □

Uma consequência imediata deste teorema, que é por vezes útil na prática, é a seguinte.

Corolário. Entre dois zeros consecutivos de uma função diferenciável num intervalo, existe pelo menos um zero da sua derivada.

Claro está que não precisávamos do Teorema de Rolle para verificar este resultado: se uma função contínua f se anula em a e em b e é diferente de 0 no intervalo $]a,b[$, então necessariamente ela tem um máximo ou mínimo relativo nesse intervalo, que sabemos já ser um ponto crítico de f.

Mais interessante na prática é o resultado seguinte.

Corolário. Seja f uma função diferenciável num intervalo. Se a e b são dois zeros consecutivos de f', então f não poderá ter mais de um zero entre a e b.

Este corolário é importante para a procura de soluções de equações. Vimos atrás que o método da bissecção nos permite encontrar uma solução duma equação num intervalo; mas se estivermos interessados em encontrar *todas* as soluções duma equação, então este resultado permite-nos dividir a recta real em intervalos que só contêm uma solução.

Uma das consequências deste resultado é uma versão fraca do Teorema Fundamental da Álgebra: todo o polinómio de grau n tem no máximo n raizes reais.

Sabemos já que este resultado é verdadeiro para polinómios de grau 2. Para polinómios de grau 3, a sua derivada tem grau 2, portanto tem no máximo 2 zeros; então a recta real fica dividida em três intervalos onde o polinómio de grau 3 tem no máximo uma raiz, donde o número total de raizes é no máximo 3. Repetindo este raciocínio, concluímos que um polinómio de grau 4 tem no máximo 4 raizes, um polinómio de grau 5 tem no máximo 5 raizes, e assim sucessivamente.

Exemplo.

1. A derivada do polinómio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ é $p'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, que tem raizes
$$\frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \frac{-1 \pm 3}{2}\,.$$
Então o polinómio p pode ter uma raiz no intervalo $]-\infty,-2[$, outra no intervalo $]-2,1[$ e uma terceira no intervalo $]1,+\infty[$.

   Uma vez que
$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$
e
$$p(-2) = -16 + 12 + 24 + 5 > 0\,,$$
há uma raiz de p no intervalo $]-\infty,-2[$. Tem-se também $p(1) = 2 + 3 - 12 + 5 < 0$, donde há outra em $]-2,1[$; e como $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ há ainda uma terceira no intervalo $]1,+\infty[$.

2. Já o polinómio $q(x) = 3x^3 + x - 9$ tem como derivada $q'(x) = 9x^2 + 1$, que é sempre positivo. Assim, a equação $q(x) = 0$ tem no máximo uma solução (e é fácil verificar que tem exactamente uma).

Exercício 46. Para cada uma das funções abaixo, indique o seu número máximo de raízes e os intervalos onde estas se encontram.

(a) $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ (b) $g(x) = x^3 - 2x + 3$ (c) $h(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$

Outro resultado com consequências importantes é o Teorema de Lagrange. Este resultado é uma generalização do Teorema de Rolle: diz-nos que em qualquer intervalo em que uma função f é diferenciável, existe um ponto onde o valor da derivada é precisamente igual à taxa de variação média de f nesse intervalo. Novamente, este resultado é muito intuitivo se raciocinarmos em termos gráficos: se unirmos dois pontos do gráfico duma função diferenciável f por uma linha recta, essa linha é paralela à tangente ao gráfico num ponto desse intervalo (ver Figura 3.25).

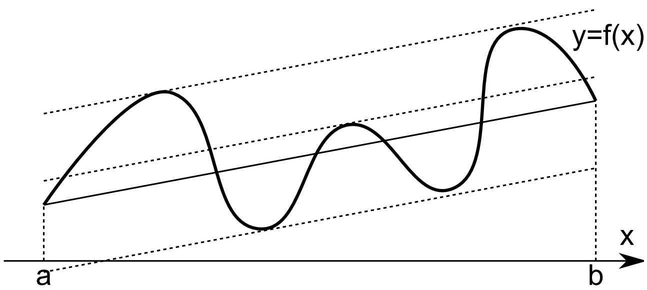


Figura 3.25: Teorema de Lagrange: se f é diferenciável em $]a, b[$, então a taxa de variação média de f nesse intervalo é igual à sua derivada nalgum ponto.

Teorema (Teorema de Lagrange)**.** Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então existe um ponto $c \in\,]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Demonstração. Seja $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ a taxa de variação média de f em $[a, b]$ e considere-se a função g definida por $g(x) = f(x) - m(x - a)$. Temos que

$$g(a) = f(a) - m(a - a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - m(b - a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

Pelo Teorema de Rolle existe um ponto c entre a e b tal que $g'(c) = 0$. Por outro lado, $g'(x) = f'(x) - m = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; então

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que implica o resultado enunciado. □

Este resultado implica, por exemplo, que um automóvel que percorra um determinado percurso a uma velocidade média de 100 km/h tenha circulado em algum instante precisamente a essa velocidade.

Outra consequência é o seguinte resultado: as únicas funções com derivada nula são as funções constantes. Para ver que este resultado é consequência do Teorema de Lagrange, basta observar que, se f é diferenciável em $[a, b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então existe um ponto entre a e b cuja derivada é a taxa de variação de f em $[a, b]$ — que certamente não é 0.

Corolário. Se f é uma função diferenciável com derivada nula no intervalo I, então f é constante em I.

Daqui decorre ainda o seguinte resultado, que será fundamental no próximo capítulo.

Corolário. Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo I tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$. Então $f - g$ é uma função constante.

Por último, vamos ver uma ferramenta que usa derivadas para levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Esta é uma ferramenta poderosa usada muitas vezes em programas de computador para cálculo de limites.

Consideremos o já muito referido limite $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e reparemos no seguinte

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} \,.$$

Pelo Teorema de Lagrange, existe y estritamente entre x e 0 tal que

$$\sin(y) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \,,$$

donde

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0} (\sin(y))' = \lim_{x\to0} \cos(y) \,.$$

Ora como y está estritamente entre x e 0 e x tende para 0, temos que y também tende para 0, donde

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{y\to0} \cos(y) = \cos(0) = 1 \,.$$

Vamos aplicar este método a outro limite: $\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$. Seguimos o mesmo raciocício, reparando que $1 = \cos(0)$. Assim

$$\lim_{x\to(0)} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} \,.$$

Mais uma vez, pelo Teorema de Lagrange, existe y estritamente entre x e 0 tal que

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0} (\cos(y))' = \lim_{x\to0} -\sin(y) = -\lim_{y\to0} \sin(y) = -\sin(0) = 0 \,,$$

visto que x tender para 0 obriga necessariamente a que y também convirja para 0.

Estes exemplos são muito simples; vamos agora ver um exemplo de um limite em que não se aplica o Teorema de Lagrange directamente mas para o qual conseguimos usar a mesma técnica. Consideremos o limite

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \,.$$

Como $e^0 = 1$ e $\sin(0) = 0$, vamos dividir e multiplicar por x o limite acima para que se possa utilizar o Teorema de Lagrange.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{\sin(x) - \sin(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^1)(x-0)}{(x-0)(\sin(x) - \sin(0))} \\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-0}{\sin(x) - \sin(0)}\right)\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Lagrange a ambos os limites, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} e^y = \lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x-0}{\sin(x) - \sin(0)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x\to 0} \cos(y)} = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \cos(y)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1\end{aligned}$$

para y estritamente entre x e 0, portanto com y a tender para 0.

Vamos agora analisar o caso geral. Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto que contém o ponto a e tal que $g'(a) \neq 0$. Vamos assumir também que $f(a) = g(a) = 0$, de modo a que o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ seja uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Assim

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \,.$$

De modo semelhante ao que fizemos no exemplo acima, multiplicamos e dividimos por $x-a$ de maneira a poder usar o Teorema de Lagrange.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))(x-a)}{(x-a)(g(x) - g(a))} = \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right)\left(\lim_{x\to a} \frac{x-a}{g(x) - g(a)}\right) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \frac{1}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Lagrange, existe y estritamente entre x e a tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(y) \text{ e } \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} g'(y) \,.$$

Mais uma vez, como y está encaixado entre a e x e x tende para a, necessariamente $y \to a$. Assim

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{y\to a} f'(y) = f'(a) \text{ e } \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \lim_{y\to a} g'(y) = g'(a) \,.$$

Logo, temos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \frac{1}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Este raciocínio justifica o seguinte resultado.

Teorema (Regra de Cauchy)**.** Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto $]a,b[$ tais que $g'(x) \neq 0$ para todo x em $]a,b[$ e que verificam

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty\,.$$

Nestas condições, se existir o limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ também existe e têm o mesmo valor.

Com esta regra, o levantamento de algumas indeterminações fica muito facilitado. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo.

1. O limite $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ gera uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, facilmente levantada pela regra de Cauchy.
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)'}{(x^2+x-2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{2x+1} = \frac{2}{3}\,.$$
Logo $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{2}{3}$.

2. Vamos levantar a indeterminação resultante do limite $\lim_{x\to 2} \frac{\sin\left((2-x)^2\right)}{4-x^2}$ pela regra de Cauchy.
$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sin\left((2-x)^2\right)\right)'}{(4-x^2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{\cos\left((2-x)^2\right)2(2-x)}{-2x} = \frac{0}{-4} = 0,.$$
Daí conclui-se que $\lim_{x\to 2} \frac{\sin\left((2-x)^2\right)}{4-x^2} = 0$.

3. O limite $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$ gera mais uma vez uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$ que também se levanta facilmente pela regra de Cauchy.
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin(x))'}{(\cos(x))'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{0}{1}\,,$$
e portanto $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)} = 0$.

4. Vamos ver agora que nem sempre é útil usar a regra de Cauchy. Consideremos o limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{1000}+x^2}{e^x}$, que é uma indeterminação de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

   Ao usar a regra de Cauchy continuamos com uma indeterminação com um polinómio de grau 999 no numerador e a mesma exponencial no denominador. Assim, para levantar a indeterminação pela regra de Cauchy precisavamos de a aplicar 1000 vezes, o que pode não ser muito cómodo. Neste caso, seria mais simples invocar que a exponencial crece mais rapidamente que qualquer polinómio, justificando desta forma que o limite em questão é 0.

5. O $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)+2x}{x^2}$ gera uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$. Após usar a regra de Cauchy obtemos
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\cos(x)+2x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\sin(x) + 2}{2x} = \frac{3}{0}\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - x\sin(x) + 2}{2x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) - x\sin(x) + 2}{2x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

o limite $\lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x + 2x)'}{(x^2)'}$ não existe, pelo que a regra de Cauchy não permite retirar nenhuma conclusão sobre $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x+2x}{x^2}$.

Teremos de tentar calcular este limite de outro modo. Note-se que todos os termos do limite têm x; vamos então experimentar dividir o numerador e o denominador por x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + 2}{x} = \frac{3}{0}$$

e, tal como acima, este limite não existe porque os limites laterais correspondentes são diferentes.

Exercício 47. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$

(b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan(x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{3-3e^{\sin(x)}}{(x+2)\sin(x)}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{x}}$

(f) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

3.6 Exercícios

48. Calcule as derivadas das seguintes funções de x.

(a) $\frac{x^2+4x-1}{x-3}$

(b) $\frac{1}{x+1}$

(c) $\cos(e^x)$

(d) $\sqrt{\frac{1}{x}}$

(e) $e^{\sqrt{x^2+1}}$

(f) $\cos(5x^2 - 2x + 4)$

(g) $\sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x^2+3}}$

(h) $\tan(\sin x)$

(i) $x^4 - 3x^2$

(j) $e^{\frac{1}{x}}$

(k) $\tan(2x+1)$

(l) $\log \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+1}$

(m) $(x^2+3)^4$

(n) $\log(e^x + 1)$

(o) $(\log x)^2$

(p) $x^2 + 2\sqrt[5]{x-3}$

(q) $\sin(e^x - x^2)$

(r) $\sqrt{\sin x + \tan x}$

(s) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1}$

(t) $e^{\sin x}$

(u) $\frac{1}{x-3}$

(v) $\sin(3x+4)$

49. Calcule as derivadas das seguintes funções de t.

(a) e^{t^2+1}

(b) $\sqrt[3]{t^2 - 2}$

(c) $2^{\sin t}$

(d) $(t\sin t)^3$

(e) $\sqrt[3]{\sin(t)}$

(f) $\frac{1}{t^2+1}$

(g) $\log(t^2 + 3t - 2)$

(h) $t^3 - 2t + 1$

(i) $\log(e^t + 2)$

(j) $\sin(3t^2-2)$
(k) 2^{3t^2+1}
(l) $\cos e^t$
(m) $e^{t^2 \sin t}$
(n) $\log(\sin(2t)\cos t)$
(o) $\frac{\sqrt[3]{t^2-2}}{t^2+3}$
(p) $(t^2+2t+1)(t^4+t+3)$
(q) $\log(t^2+3)$
(r) $\tan(t^3+2\pi)$
(s) $\log\sqrt{t^2+1}$
(t) $t\sin t$
(u) $\frac{e^t}{\sin t}$
(v) $\frac{6t-12}{\sin(5t-10)}$
(w) $\sin\left(\frac{2}{t}+\frac{t^2}{4}\right)$
(x) $\sin\left(\sqrt{t}\right)$
(y) $\frac{\cos\left(t^2\right)}{t}$

50. Calcule as derivadas das seguintes funções, indicando explicitamente o seu domínio.

(a) $u(x) = \begin{cases} 3x^2+2x-4 & x \leq -2 \\ -x^3+2x & x > -2 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ x^2+3x+1 & x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x-1) & x \leq 1 \\ x^2-x & t > 1 \end{cases}$

(d) $f(y) = \begin{cases} \sin\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) & y < -\pi \\ \tan(y^2+1) & -\pi \leq y \leq 0 \\ \sqrt{y^3}+\tan(1) & y > 0 \end{cases}$

(e) $h(t) = \begin{cases} 2te^t & t < -1 \\ -2e^t & -1 \leq t < 1 \\ e^{t^2} & t \geq 1 \end{cases}$

51. Determine as equações das rectas tangentes e normais às seguintes curvas nos pontos indicados.

(a) $y = \sqrt[5]{x-1} - 2$ no ponto de abcissa $x_0 = 2$
(b) $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$ nos pontos $(2,0)$ e $(0,-2)$

52. Determine os pontos da curva

$$y = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

nos quais a tangente à curva é paralela à recta $y = 10x - 5$.

53. Sendo f a função definida por $f(x) = (x+1)\sin^3\left(e^{2x}-1+\frac{\pi}{2}\right)$, determine a equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

54. Usando a definição, calcule os polinómios de Taylor das seguintes funções de y, com o grau n e relativamente ao ponto a indicados em cada alínea. Apresente uma estimativa do erro cometido.

(a) $(y-2)^{20}$, $n=4$, $a=1$
(b) $\left(y^2-2y\right)^3(y+2)^2$, $n=3$, $a=0$
(c) $\log(3y^2+2y-2)$, $n=2$, $a=1$
(d) $\frac{1}{y+2}$, $n=5$, $a=-1$
(e) $e^{2y}\cos(3y)$, $n=2$, $a=\frac{\pi}{2}$
(f) $\frac{1}{(y+2)^2}$, $n=5$, $a=-1$

55. Usando a definição, calcule os polinómios de Mac-Laurin das seguintes funções de x, com o grau n indicado em cada alínea. Apresente uma estimativa do erro cometido.

(a) $\log x + 1$, $n = 4$
(b) $\frac{1}{1+x^3}$, $n = 3$
(c) $\sin(2x + 1)$, $n = 5$
(d) $\log(e^x + 1)$, $n = 3$

56. Obtenha uma aproximação das seguintes constantes com um erro inferior ao indicado. Para cada alínea, comece por escolher a função a desenvolver em polinómio de Taylor e o ponto em torno do qual efectuar o desenvolvimento; use a estimativa do erro para determinar o grau do polinómio.

(a) 0.95^{17} com erro inferior a 10^{-5}
(b) $\log(1.25)$ com erro inferior a 10^{-3}
(c) $\sqrt[3]{e}$ com erro inferior a 10^{-5}
(d) $3e^2$ com erro inferior a 10^{-4}
(e) $\sqrt{2}$ com erro inferior a 10^{-4}
(f) e^{-3} com erro inferior a 10^{-3}

(g) $1 + 1.01^3 - 2.01^4$ com erro inferior a 10^{-6}
(h) $\sin(3\pi + 0.02)$ com erro inferior a 10^{-8}
(i) $\sin(0.2) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.1\right)$ com erro inferior a 10^{-3}
(j) $\sqrt{2}$ com erro inferior a 10^{-6} (usando a relação $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

57. Calcule os extremos das seguintes funções.

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{1}{3}$
(b) $g(x) = \frac{\log(x)}{x}$
(c) $h(x) = x + \sqrt{1-x}$
(d) $f(x) = \arcsin\left(2 + x^2\right)$

58. Determine os valores de a e b para os quais a função g definida por $g(t) = a\log(t) + bt^2 + t$ tenha extremos relativos em $x = 1$ e $x = 2$. Qual a natureza desses extremos?

59. Diga se as funções seguintes têm extremos nos pontos indicados.

(a) $f(x) = 2x^6 - x^3 + 3$ em $x = 0$
(b) $g(x) = 2\cos(x) + x^2$ em $x = 0$
(c) $h(t) = 6\log(t) - 2t^3 + 9t^2 - 18t$ em $t = 1$

60. Faça o estudo completo das seguintes funções e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
(b) $g(x) = e^{-x^2}$
(c) $f(x) = x\log(x)$
(d) $h(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$
(e) $h(y) = \sqrt{y^2 + 2y + 1}$
(f) $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
(g) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
(h) $t(w) = \cos\frac{1}{\sqrt{(1-w^2)}}$
(i) $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$
(j) $g(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$
(k) $f(x) = x^2e^{-x}$
(l) $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
(m) $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$
(n) $k(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z-1}$
(o) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
(p) $s(w) = \frac{\cos w}{2-\sin w}$
(q) $h(x) = x\sqrt{1+x^2}$
(r) $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
(s) $f(x) = \frac{|x|}{2x}$
(t) $g(x) = \frac{3}{x^4+2}$
(u) $j(y) = \frac{y^3}{(y-1)^2}$
(v) $r(z) = z + \sin z$

61. Recorrendo à regra de Cauchy, calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1-\cos(x))}{\log(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log(x)}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log(x)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan(x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-\log(x)}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\log(x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\log(x)}}$

Capítulo 4

Primitivação

4.1 Introdução

Muitas situações concretas dão origem a problemas em que se pretende determinar uma função conhecendo a sua derivada. Consideremos alguns exemplos.

Problema. Um veículo desloca-se numa estrada em linha recta com velocidade constante v. Tomando para origem do referencial a sua posição num instante inicial $t = 0$, qual é a expressão da sua posição em função do tempo?

Resolução. Chamando y à posição do veículo, a função que descreve a sua posição em função do tempo é uma função $y = f(t)$. Uma vez que a velocidade corresponde à derivada (instantânea) da posição, dizer que a velocidade é constante e vale v corresponde a dizer que $f'(t) = v$. Então a função f é uma função cuja derivada é constante; uma função nestas condições é a função $f(t) = v \cdot t$, que se pode verificar satisfazer ainda a condição pedida $f(0) = 0$.

Problema. Considere-se agora um objecto de 1 kg de peso em queda livre. De acordo com as leis de Newton, este objecto está sujeito a uma aceleração constante de valor aproximadamente -10 ms^{-1}, em que o sinal indica que esta aceleração é no sentido descendente. Se o corpo partir duma altura 125 m, quanto tempo demora a atingir o solo?

Resolução. Designando agora por y a distância do corpo ao solo, tem-se que $y = f(t)$ para uma dada função f. Tal como atrás, a velocidade do corpo no instante t é dada pelo valor da derivada $f'(t)$; a aceleração, sendo a variação instantânea da velocidade, é dada por $f''(t)$.

Nas condições do problema, $f''(t) = -10$. Então, uma possibilidade para $f'(t)$ é ter-se $f'(t) = -10t$: por um lado, a derivada desta função é precisamente -10; por outro, quanto $t = 0$, tem-se $f'(t) = 0$, o que corresponde ao facto de o corpo partir do repouso.

Ora das regras de derivação já conhecidas sabe-se que $\left(t^2\right)' = 2t$. Esta igualdade mantém-se se multiplicarmos ambos os membros pela mesma constante; escolhendo o valor -5 (por forma a obter $-10t$ do lado direito) conclui-se que $\left(-5t^2\right)' = -10t$.

Porém, a função $f(t) = -5t^2$ não descreve correctamente a posição da partícula, pois $f(0) = 0$ e é dito que o corpo parte duma altura inicial de 125 m. Contudo, uma vez que a derivada de qualquer constante é 0, podemos somar o valor 125 à expressão de f sem alterar os valores das suas derivadas. Concluímos assim que a altura do corpo no instante t é dada por $f(t) = 125 - 5t^2$.

O corpo atinge o solo quando $f(t) = 0$, ou seja, $125 - 5t^2 = 0$. Resolvendo esta equação, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
125 - 5t^2 = 0 &\iff 125 = 5t^2 \\
&\iff 25 = t^2 \\
&\iff t = \pm 5
\end{aligned}$$

Uma vez que estamos interessados num valor positivo, concluímos que o tempo que o corpo demora a atingir o solo é 5 segundos.

A resolução de qualquer destes problemas recorre à determinação da expressão duma função a partir da expressão da sua derivada. Esta operação, chamada *primitivação*, é objecto de estudo deste capítulo.

Definição. Sejam F e f funções reais de variável real. A função F diz-se uma *primitiva* de f em $]a,b[$ se $F' = f$ em $]a,b[$.

Por outras palavras, a primitivação é a operação que permite resolver equações da forma $f'(x) = g(x)$. Observe-se que a derivada duma função só está definida em pontos interiores ao seu domínio, pelo que o conceito de primitiva só faz sentido em intervalos abertos.

Conforme a definição acima ilustra, a notação tipicamente usada para denotar primitivas recorre ao uso de letras maiúsculas: F representa uma primitiva de f, G representa uma primitiva de g, etc. A excepção mais comum ocorre quando a função a primitivar é ela própria uma derivada: a primitiva de f' é (tipicamente) f.

Exemplo. Nos exemplos acima, vt é uma primitiva de v, $-10t$ é uma primitiva de -10 e $-5t^2$ é uma primitiva de $-10t$. Dizemos que estas primitivas são primitivas *em ordem a t* para salientar que a variável da função é t.

Se derivarmos as funções (de x) x^3+2x, $\sin(x)$ e e^{x^2} encontramos, respectivamente, $3x^2+2$, $\cos(x)$ e $2xe^{x^2}$. Então, $x^3 + 2x$ é uma primitiva de $3x^2 + 2$; $\sin(x)$ é uma primitiva de $\cos(x)$; e e^{x^2} é uma primitiva de $2xe^{x^2}$. Estas primitivas não são únicas: $x^3 + 2x - 3$ também é uma primitiva de $3x^2 + 2$; $\sin(x) + \pi$ é outra primitiva de $\cos(x)$; e $e^{x^2} + 3$ é ainda uma primitiva de $2xe^{x^2}$.

Contrariamente à derivação, que é uma operação algorítmica (a derivada duma função consegue-se sempre calcular recorrendo à aplicação dum conjunto fixo de regras), o problema de encontrar uma primitiva duma função dada requer algum engenho e prática. Não existe um método sistemático para encontrar a primitiva duma função dada; em muitos casos, nem sequer é possível escrever uma expressão simples para a primitiva duma função.

Definição. Uma função diz-se *elementarmente primitivável* se a sua primitiva é uma função transcendente elementar.

A afirmação acima traduz-se, portanto, em que há funções elementares que não são elementarmente primitiváveis. Alguns exemplos simples são as funções e^{x^2}, $\frac{\sin(x)}{x}$ e $\frac{1}{\log(x)}$.

Por outro lado, como os exemplos acima ilustram, podem existir várias primitivas da mesma função.

O cálculo de primitivas faz-se recorrendo a técnicas que permitem tratar classes de funções. Estas técnicas derivam todas do estudo das regras de derivação, pelo que é importante conhecê-las bem. Saber que técnica usar perante uma função concreta requer alguma intuição, que se ganha com um pouco de treino.

Antes de estudar essas técnicas, há um resultado importante que permite responder a uma questão importante: a de como determinar *todas* as primitivas duma dada função. Mais adiante (Secção 5.3) responder-se-á à pergunta de quais as funções que são primitiváveis.

Suponhamos que F_1 e F_2 são duas primitivas da mesma função f num intervalo $]a,b[$. Então, para qualquer $x \in]a,b[$, temos que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$; por outras palavras,

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0\,,$$

donde $F_1' - F_2'$ vale 0 em todo o intervalo $]a,b[$. Pelo Corolário 2 do Teorema de Lagrange (p. 187), a função $F_1 - F_2$ é constante nesse intervalo, ou seja: $F_1(x) - F_2(x) = C$ para todo o $x \in]a,b[$, ou, equivalentemente, $F_1(x) = F_2(x) + C$ para algum real C.

Em contrapartida, se F é uma primitiva de f, então a função F^* definida pela expressão $F^*(x) = F(x) + C$ também é uma primitiva de f para qualquer constante real C:

$$(F^*(x))' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Estas duas observações constituem a prova do seguinte resultado.

Teorema. Seja F uma primitiva de f num intervalo $]a,b[$. Então F^* é uma primitiva de f no mesmo intervalo se e só se existe uma constante C tal que $F^*(x) = F(x) + C$.

O conjunto de todas as primitivas de f designa-se habitualmente por $F(x) + C$, $P(f)$, $\int f$ ou $\int f(x)\,dx$. A primeira notação é justificada pelo resultado acima enunciado; a última notação é a usada mais frequentemente por motivos que discutiremos na Secção 5.3.

Exemplo. De acordo com o exemplo anterior, podemos escrever as seguintes relações.

$$P\left(3x^2 + 2\right) = x^3 + 2x + C \qquad P\left(2xe^{x^2}\right) = e^{x^2} + C$$

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} + C \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

É importante salientar que o resultado se aplica *apenas* a intervalos. Pensemos por exemplo na função $f(x) = \frac{1}{x}$, cujo domínio é a união de dois intervalos: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Uma sua primitiva é a função $\log|x|$: se $x > 0$, $\log|x| = \log(x)$ e a sua derivada é $\frac{1}{x}$; se $x < 0$, então $\log|x| = \log(-x)$ e a sua derivada é $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Contudo, existem primitivas de $\frac{1}{x}$ que *não* são da forma $\log|x| + C$, por exemplo:

$$F(x) = \begin{cases} \log(-x) + 1 & x < 0 \\ \log(x) & x > 0 \end{cases}$$

Uma vez que F não está definida no ponto 0, o resultado anterior não é aplicável para intervalos contendo este ponto.

Mais adiante (Secção 4.3) voltaremos à questão das constantes e veremos situações em que as queremos determinar.

4.2 Primitivas imediatas

Os exemplos mais simples de primitivas obtêm-se lendo as regras de derivação das funções mais comuns (polinómios, potências, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas) da direita para a esquerda.

Por exemplo, da relação $(x^2)' = 2x$ conclui-se que uma primitiva de $2x$ é x^2. Uma vez que a multiplicação por constantes pode ser feita antes ou depois da derivação, para qualquer valor real a tem-se igualmente que $(ax^2)' = 2ax$, e portanto $2ax$ é uma primitiva de ax^2. Fazendo $a = \frac{1}{2}$, conclui-se que $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Outro exemplo: a partir de $(\cos(x))' = -\sin(x)$, conclui-se que $\cos(x)$ é uma primitiva de $-\sin(x)$. Uma vez que a troca de sinal comuta com a derivação, tem-se igualmente $(-\cos(x))' = \sin(x)$, donde $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$.

Este raciocínio pode ser aplicado a várias regras de derivação para obter as primitivas de diversas funções elementares. A Tabela 4.1 apresenta uma lista de primitivas determinadas desta maneira. A dedução destas primitivas é um bom exercício.

Regra de derivação		Regra de primitivação	
$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$G(x)$
C	0	0	C
x^k, $k \neq 0$	kx^{k-1}	x^k, $k \neq -1$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$
e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \log(a)$	a^x	$\frac{a^x}{\log(a)}$
$\left.\begin{array}{l}\log(x),\ x>0\\ \log(-x),\ x<0\end{array}\right\}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Tabela 4.1: Primitivas deduzidas a partir das regras de derivação.

Exercício 1. Há outras regras de derivação que permitem calcular primitivas de funções aparentemente mais complexas. Determine as primitivas das funções seguintes.

(a) $\frac{1}{\cos^2(x)}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $1 + \tan^2(x)$

Observe-se que a regra de primitivação da potência se aplica a quaisquer expoentes e não apenas a expoentes inteiros. Assim, podem-se calcular primitivas de raízes quadradas, raízes cúbicas ou inversos de potências pelo mesmo método.

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

Exercício 2. Calcule as primitivas das seguintes funções.

(a) $\sqrt{x^3}$ (b) $\frac{1}{x^2}$ (c) $x^{\frac{3}{5}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Para além destas, há duas outras regras de derivação que podem ser lidas nos dois sentidos. De $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ e $(c \times f(x))' = c \times f'(x)$ deduzem-se, respectivamente, as regras

$$\int f+g = \int f + \int g \qquad\qquad \int c \times f = c \int f$$

que exprimem a linearidade da primitivação: para calcular a primitiva duma soma, basta somar as primitivas das funções consideradas; para calcular a primitiva do produto duma função por uma constante basta primitivar a função e multiplicar a primitiva pela mesma constante.

Com base na linearidade da primitivação e nas regras apresentadas na Tabela 4.1, podemos calcular primitivas duma classe muito maior de funções.

$$\int x^2+3x-2\,dx = \int x^2\,dx + \int 3x\,dx - \int 2\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

$$\int \sin(x) - \sqrt{x}\,dx = \int \sin(x)\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = -\cos(x) - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

A complexidade do cálculo de primitivas provém da regra de derivação do produto: uma vez que a derivada do produto de duas funções não corresponde ao produto das derivadas de cada uma delas, também a primitiva dum produto não é em geral o produto de duas primitivas.

Exemplo. Considere-se a função definida por $f(x) = x\cos(x)$. Contrariamente ao que se poderia pensar, a função $g(x) = \frac{x^2}{2}\sin(x)$ *não* é uma primitiva de f. De facto, o cálculo da derivada de g mostra que

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\sin(x)\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\sin(x) + \frac{x^2}{2}\left(\sin(x)\right)' = x\sin(x) + \frac{x^2}{2}\cos(x)$$

que não corresponde à expressão de $f(x)$.

Mais adiante (Secção 4.6) explicar-se-á como se calculam estas primitivas.

Assim, para primitivar um produto de duas funções é necessário recorrer a outras técnicas. Olhando de novo para as regras de derivação, há uma regra que tem um produto do lado direito: a regra de derivação da função composta, que diz que $f(g(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Esta regra pode ser lida como uma regra de primitivação da seguinte forma: a primitiva dum produto em que uma das parcelas é a derivada duma expressão que ocorre na outra parcela calcula-se primitivando *apenas* a segunda parcela, mantendo a primeira como argumento.

Exemplo. Suponhamos que queríamos primitivar $f(x) = 2x\left(x^2+3\right)^5$. Embora seja possível expandir a potência e primitivar esta expressão como um polinómio, tal não é prático.

Observe-se, contudo, que f é o produto de duas parcelas. Designando x^2+3 por $g(x)$, a primeira parcela é precisamente $g'(x)$, enquanto a segunda é $g(x)^5$:

$$f(x) = \underbrace{2x}_{g'(x)}\underbrace{\left(x^2+3\right)^5}_{g(x)^5}.$$

Então a primitiva de f é calculada primitivando esta última potência em ordem a $g(x)$, ou seja:

$$\int f(x)\,dx = \frac{g(x)^6}{6} = \frac{\left(x^2+3\right)^6}{6} + C\,.$$

Outra forma de chegar ao mesmo resultado: fazendo $y = x^2 + 3$, tem-se $\frac{dy}{dx} = 2x$, donde $dy = 2x\ dx$. Então

$$\int f(x)\ dx = \int 2x\left(x^2+3\right)^5\ dx = \int y^5\ dy = \frac{y^6}{6} + C = \frac{\left(x^2+3\right)^6}{6} + C\,.$$

A identificação deste tipo de primitivas, que também são primitivas directas, é fundamental. O segundo método acima apresentado, recorrendo a uma mudança de variável, pode ser um bom auxiliar de início — mas o objectivo final deve ser conseguir resolver estas situações directamente. Apresentam-se de seguida mais alguns exemplos, resolvidos de ambas as formas.

Exemplo.

1. Calcular as primitivas de $\cos(x)\sin^2(x)$.

   Uma vez que $\cos(x) = (\sin(x))'$, fazendo $y = \sin(x)$ tem-se que $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, donde $dy = \cos(x)\ dx$. Então

   $$\int \cos(x)\sin^2(x)\ dx = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C\,.$$

   Em alternativa, podemos primitivar directamente $\sin^2(x)$ em ordem a $\sin(x)$:

   $$\int \cos(x)\sin^2(x)\ dx = \frac{\sin^3(x)}{3} + C\,.$$

2. Calcular as primitivas de $(2x+2)e^{x^2+2x+1}$.

   O factor $2x{+}2$ corresponde precisamente à derivada de $x^2{+}2x{+}1$. Fazendo $y = x^2{+}2x{+}1$, tem-se $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$, ou $dy = (2x+2)\ dx$ e portanto

   $$\int (2x+2)e^{x^2+2x+1}\ dx = \int e^y\ dy = e^y + C = e^{x^2+2x+1} + C\,.$$

   Em alternativa, podemos primitivar directamente a função em ordem a $x^2 + 2x + 1$, obtendo directamente

   $$\int (2x+2)e^{x^2+2x+1}\ dx = e^{x^2+2x+1} + C\,.$$

3. Calcular as primitivas de $\frac{2x+1}{x^2+x+4}$.

   Reescrevendo a função como $(2x{+}1)\left(x^2+x+4\right)^{-1}$, o factor $2x{+}1$ corresponde à derivada de $x^2{+}x{+}4$, pelo que a função se primitiva em ordem a esta expressão como uma potência. Uma vez que o expoente é -1, a primitiva em causa é um logaritmo, e obtém-se

   $$\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\ dx = \int (2x+1)\left(x^2+x+4\right)^{-1}\ dx = \log\left(x^2+x+4\right) + C\,,$$

   tendo em conta que o argumento do logaritmo nunca se anula.

4. Calcular as primitivas de $\frac{2}{1+(2x+3)^2}$.

   Novamente, o numerador da fracção é a derivada duma expressão que ocorre no denominador, neste caso $2x+3$. Fazendo $y = 2x+3$, tem-se que $dy = 2\ dx$ e a primitiva calcula-se directamente como

$$\int \frac{2}{1+(2x+3)^2}\ dx = \int \frac{1}{1+y^2}\ dy = \arctan(y) + C = \arctan(2x+3) + C\,.$$

   ou, calculando directamente a primitiva em ordem a $2x+3$,

$$\int \frac{2}{1+(2x+3)^2}\ dx = \arctan(2x+3) + C\,.$$

Exercício 3. Calcule as primitivas das seguintes funções.

(a) $3x^2\sqrt{x^3}$

(b) $\frac{2x}{x^2}$

(c) $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(d) $(4x+2)\cos\left(2x^2+2x\right)$

(e) $\frac{2}{(2x)^2+1}$

(f) $2x\left(x^2+3\right)^3$

Os exemplos acima ilustram os casos mais simples. Em geral, porém, é frequente ser necessário recorrer a algumas manipulações algébricas para obter uma primitiva imediata. O caso mais simples é a multiplicação por uma constante: uma vez que esta operação comuta com o cálculo da primitiva, é frequente recorrer a transformações baseadas na identidade $\int f = \frac{1}{c}\int cf$.

Por exemplo, o cálculo da primitiva de $\sin(x)\cos^2(x)$ decorre da observação de que a derivada de $\cos(x)$ é $-\sin(x)$, e este termo aparece a multiplicar a menos de um sinal. Acrescentando este sinal dentro e fora do sinal de primitiva, tem-se

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\ dx = -\int -\sin(x)\cos^2(x)\ dx = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C\,.$$

Apresentam-se mais alguns exemplos de funções que se primitivam desta forma.

Exemplo.

1. Calcular as primitivas de $3x\left(x^2+2\right)^5$.

   Neste caso, basta multiplicar a função por $\frac{2}{3}$ para obter como primeiro factor a derivada de x^2+2. Tem-se então

$$\begin{aligned}\int 3x\left(x^2+2\right)^5\ dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\,3x\left(x^2+2\right)^5\ dx = \frac{3}{2}\int 2x\left(x^2+2\right)^5\ dx\\ &= \frac{3}{2}\frac{\left(x^2+2\right)^6}{6} + C = \frac{\left(x^2+2\right)^6}{4} + C\,.\end{aligned}$$

2. Calcular as primitivas de $\frac{3}{2x+1}$.

   Estamos de novo no caso duma fracção cujo numerador é semelhante à derivada do denominador, a menos dum factor multiplicativo. Então

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x+1}\ dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+1}\ dx\\ &= \frac{3}{2}\log(2x+1) + C\end{aligned}$$

3. Calcular as primitivas de $(2x-5)e^{3x^2-15x}$.

   Neste exemplo, basta multiplicar a função por 3 para obter uma primitiva imediata.

$$\begin{aligned}\int (2x-5)e^{3x^2-15x}\,dx &= \frac{1}{3}\int 3(2x-5)e^{3x^2-15x}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int (6x-15)e^{3x^2-15x}\,dx\\ &= \frac{e^{3x^2-15x}}{3}+C\end{aligned}$$

Com alguma prática, estas primitivas conseguem-se calcular sem passos intermédios; daí serem todas classificadas como primitivas imediatas.

Exercício 4. Calcule as primitivas das seguintes funções.

(a) $\frac{x+1}{x^2+2x}$

(b) $x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}}$

(c) $\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+3x}$

(d) $e^x\sqrt[3]{2e^x+3}$

(e) $\sin(x)e^{2\cos(x)+1}$

(f) $x\sin\left(x^2+1\right)$

A primitivação de funções trigonométricas reduz-se em muitos casos ao cálculo de primitivas imediatas, mas requer alguma manipulação das expressões envolvidas com base em identidades trigonométricas.

Um exemplo bastante simples é o cálculo de $\int \tan(x)\,dx$. Conforme vimos atrás, não há nenhuma função elementar que tenha esta derivada; porém, recorrendo à definição da tangente, primitiva-se facilmente a função:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\log|\cos(x)|+C\,,$$

uma vez que $\sin(x)$ é o simétrico da derivada de $\cos(x)$.

Apresentam-se de seguida mais alguns exemplos deste tipo de transformação.

Exemplo.

1. Calcular as primitivas de $\sin^2(x)$.

   Aqui não é possível ver esta função como uma potência, uma vez que não aparece nenhum factor contendo $\cos(x)$ (a derivada de $\sin(x)$). Para resolver o problema, podemos reescrever a expressão com base em identidades trigonométricas (Secção 2.4.2). Partindo da expressão para $\cos(2x)$, obtém-se

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=\left(1-\sin^2(x)\right)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)\,,$$

   donde se deduz que $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$. Então

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx-\int \cos(2x)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int dx-\frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)+C\\ &= \frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}+C\,.\end{aligned}$$

2. Calcular as primitivas de $\sin^3(x)$.

   A técnica aqui é um pouco diferente. Usando a identidade fundamental da trigonometria, tem-se que $\sin^3(x) = \sin(x)\sin^2(x) = \sin(x)(1-\cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)$, donde

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)\,dx &= \int \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)\,dx \\ &= \int \sin(x)\,dx + \int -\sin(x)\cos^2(x)\,dx \\ &= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C\,.\end{aligned}$$

3. Calcular as primitivas de $\tan^2(x)$.

   Uma vez que $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$, este problema resolve-se não multiplicando por uma constante, mas somando e subtraindo a unidade que falta.

$$\int \tan^2(x)\,dx = \int 1 + \tan^2(x) - 1\,dx = \int 1 + \tan^2(x)\,dx - \int 1\,dx = \tan(x) - x + C$$

Exercício 5. Calcule as primitivas das seguintes funções.

(a) $\cot(x)$ (b) $\cos^2(x)$ (c) $\sin^5(x)$ (d) $\tan^2(2x+1)$

4.3 Determinação das constantes de primitivação

Nos problemas apresentados no início do capítulo, o objectivo não era encontrar todas as primitivas duma dada função, mas sim encontrar uma primitiva em particular que satisfizesse mais algumas condições. No primeiro exemplo, a primitiva representava a posição e era necessário que valesse 0 para $t = 0$; no segundo exemplo, no primeiro passo estávamos interessados numa função cuja derivada valesse 0 no instante $t = 0$, e tal que a própria função valesse 125 nesse mesmo ponto.

Na prática, os problemas concretos com que nos deparamos são deste estilo — determinar uma função com uma dada derivada sujeita a um valor específico num ponto. Esta condição (chamada frequentemente *condição de fronteira*) tem como efeito impor um valor à constante que distingue as diversas primitivas da função.

Consideremos um exemplo. Como determinar uma função f tal que $f'(x) = 3x^2 + 2$, sujeita à condição extra $f(2) = -1$?

Em primeiro lugar, determina-se a expressão geral das primitivas de f'. Sendo f' um polinómio, é imediato concluir que

$$f(x) = \int 3x^2 + 2\,dx = x^3 + 2x + C$$

para alguma constante C. Substituindo a expressão de $f(2)$ na condição dada $f(2) = -1$ obtém-se a equação

$$-1 = f(2) = 12 + C = -1$$

donde se conclui que $C = -13$. A função pretendida é, portanto,

$$f(x) = x^3 + 2x - 13\,.$$

Exercício 6. Encontre funções satisfazendo as condições dadas.

(a) $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f'(x) = \sqrt{x+2} \\ f(4) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f'(x) = \sin(x)e^{2\cos(x)} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \end{cases}$

Conforme foi discutido na p. 197, quando o domínio da função é uma união de intervalos disjuntos, a constante de primitivação pode não ser a mesma nos vários intervalos. Em geral, e mais uma vez tendo em conta os problemas concretos que interessa resolver, nesses casos só estamos interessados num dos intervalos em que a função está definida, pelo que essa informação deve ser fornecida juntamente com a condição de fronteira.

Nalgumas situações, também se pode dar a condição de fronteira assimptoticamente, na forma do limite da função à medida que o argumento tende para $+\infty$ (ou $-\infty$). Apresentam-se de seguida alguns exemplos destas situações.

Exemplo.

1. Encontrar uma função f definida em $]-\infty, 1[$ tal que:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2}{x^3-1} \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

A determinação de f é feita exactamente como atrás. Uma vez que x^2 é um múltiplo da derivada de $x^3 - 1$, a primitivação é imediata:

$$f(x) = \int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\log\left|x^3 - 1\right| + C\,.$$

Para determinar a constante, avaliamos a expressão anterior no ponto 0, obtendo

$$3 = f(0) = \frac{1}{3}\log|-1| + C = C$$

donde $C = 3$. A função pretendida é portanto

$$f(x) = \frac{1}{3}\log\left|x^3 - 1\right| + 3\,.$$

2. Determinar uma função f definida em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \end{cases}$$

Tal como atrás, começa-se por determinar a expressão geral das primitivas de f'.

$$f(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

A segunda condição traduz-se num limite que sabemos calcular.

$$2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x} + C\right) = C$$

donde se conclui que $C = 2$, pelo que a função pretendida é $f(x) = -e^{-x} + 2$.

3. Determinar uma função definida numa vizinhança de 0 tal que

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Tal como atrás, procede-se em primeiro lugar ao cálculo das primitivas de f'.

$$f(x) = \int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\, dx = \log\left|x^2+x-2\right| + C$$

Esta função não está definida para $x = -2$ e $x = 1$, onde o seu denominador se anula. Uma vez que estamos interessados no intervalo que contém o ponto 0, vamos considerar a função definida apenas em $]-2, 1[$. Da condição de fronteira obtemos

$$0 = f(0) = \log 2 + C\,,$$

donde $C = -\log 2$ e a expressão de f é portanto

$$f(x) = \log\left|x^2+x-2\right| - \log 2$$

com $D_f =]-2, 1[$.

4. Consideremos agora o problema semelhante de determinar uma função definida no maior domínio possível e tal que

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} \\ f(-3) = \log 4 \\ f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

Tal como atrás, a função f terá a expressão

$$f(x) = \log\left|x^2+x-2\right| + C\,,$$

mas agora a constante C pode ser diferente em cada um dos três intervalos $]-\infty, -2[$, $]-2, 1[$ e $]1, +\infty[$ em que f está definida. As três condições de fronteira dão os três valores para a constante.

Em $]-\infty, -2[$:

$$\log 4 = f(-3) = \log 4 + C\,,$$

donde $C = 0$.

Em $]-2, 1[$:

$$0 = f(0) = \log 2 + C\,,$$

donde $C = -\log 2$.

Em $]1, +\infty[$:

$$1 = f(2) = \log 4 + C\,,$$

donde $C = 1 - \log 4$.

A função tem então a expressão geral

$$f(x) = \begin{cases} \log|x^2+x-2| & x < -2 \\ \log|x^2+x-2| - \log 2 & -2 < x < 1 \\ \log|x^2+x-2| + 1 - \log 4 & 1 < x \end{cases}$$

Exercício 7. Determine funções satisfazendo as seguintes condições.

(a) $\begin{cases} f'(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{x} \\ f(1) = 2 \\ D_f =]0, +\infty[\end{cases}$ (b) $\begin{cases} f'(x) = 3\cos(2x-1) \\ f(\pi) = -1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f'(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(0) = -1 \end{cases}$

4.4 Primitivação de funções racionais

Uma função racional é uma função obtida como quociente de dois polinómios: $R(X) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Na Secção 4.2 vimos alguns exemplos simples em que a primitivação deste tipo de funções gera novamente funções racionais, logaritmos ou arcos de tangente.

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1} + C$$
$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-2}\,dx = \log\left|x^2+3x-2\right| + C$$
$$\int \frac{3}{1+(3x)^2}\,dx = \arctan(3x) + C$$

Nesta secção discute-se o caso geral, apresentando um método de primitivar qualquer função racional. Este método reduz a primitivação de funções racionais ao cálculo de primitivas imediatas dos três tipos acima exemplificados.

Em primeiro lugar, vamos analisar os casos mais simples em que o denominador é um polinómio de segundo grau e o numerador é um polinómio no máximo de primeiro grau. Os três casos expostos correspondem às três situações seguintes:

1. o numerador tem grau 1 (logaritmo);

2. o numerador é constante e o denominador é um quadrado perfeito (potência);

3. o numerador é constante mas o denominador não tem raízes (arco de tangente).

A situação em que o numerador tem raízes é tratada mais adiante, quando discutirmos o caso geral deste tipo de funções.

No primeiro caso, pode ainda surgir um termo contendo uma potência ou um arco de tangente, conforme se mostra nos exemplos abaixo.

Exemplo.

1. Calcular as primitivas de $\frac{3x+2}{x^2+1}$.

   Este exemplo é do primeiro tipo descrito acima. Nesta fracção, a derivada do denominador é $2x$; multiplicando o numerador por $\frac{2}{3}$ obtém-se este termo, mas continua a existir um termo constante.

O truque é separar a fracção em duas, deixando na primeira o termo contendo a variável x e na segunda o termo independente; por linearidade, a primitiva será uma soma dum logaritmo com um arco de tangente.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan(x) + C\end{aligned}$$

2. Calcular as primitivas de $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

   Este exemplo também é do primeiro tipo, mas agora a derivada do denominador passou a ser $2(x+1) = 2x+2$; a primeira parte é semelhante à anterior, mas é necessário tratar o numerador duma forma diferente. O primeiro passo é fazer surgir o termo $2x$, multiplicando por $\frac{2}{3}$. De seguida, soma-se e subtrai-se 2 ao numerador:

$$2x + \frac{4}{3} = 2x + \frac{4}{3} + 2 - 2 = 2x + 2 - \frac{2}{3}.$$

   Finalmente separa-se a fracção em duas e primitiva-se.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-\frac{2}{3}}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+2}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{\frac{2}{3}}{(x+1)^2}\,dx\right) \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{x+1} + C\end{aligned}$$

3. Calcular as primitivas de $\frac{1}{x^2+2}$.

   Estamos agora perante o terceiro tipo: o numerador é uma constante e o denominador um polinómio de segundo grau que não é um quadrado perfeito. A determinação da primitiva da função faz-se em três passos: primeiro, divide-se o numerador pelo valor necessário para fazer surgir o coeficiente 1. De seguida, escreve-se o termo em x^2 como um quadrado perfeito. Finalmente, acerta-se o numerador da fracção para ser o coeficiente de x nesse quadrado.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\end{aligned}$$

4. Calcular as primitivas de $\frac{1}{x^2+2x+2}$.

   Este caso é semelhante ao anterior, mas agora há um termo em x no numerador. O procedimento é semelhante, com um passo extra no início: a partir dos dois primeiros termos (x^2 e $2x$), escreve-se um quadrado perfeito juntando o valor adequado do termo independente — neste caso 1, pois $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

Neste exemplo, esta transformação gera uma primitiva imediata; em geral, prossegue-se como no caso anterior.

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\, dx = \arctan(x + 1) + C$$

5. Calcular as primitivas de $\frac{3x+2}{x^2+x+1}$.

   Este exemplo é outra vez do primeiro tipo, mas mais complexo. A função a primitivar sugere um logaritmo, devido ao polinómio de grau 1 no numerador; multiplicando por $\frac{2}{3}$ obtém-se $2x + \frac{4}{3}$, o que (separando o termo correspondente à derivada do denominador) corresponde a $2x + 1 + \frac{1}{3}$. Este último termo vai dar origem a um arco de tangente no resultado final.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1}\, dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{4}{3}}{x^2 + x + 1}\, dx \\
&= \frac{3}{2} \left(\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + x + 1}\, dx \right) \\
&= \frac{3}{2} \log\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx \\
&= \frac{3}{2} \log\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{1}{2}\frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 + 1}\, dx \\
&= \frac{3}{2} \log\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{2}\right)^2 + 1}\, dx \\
&= \frac{3}{2} \log\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx \\
&= \frac{3}{2} \log\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Exercício 8. Calcule as primitivas das seguintes funções.

(a) $\frac{2}{3+2x^2}$ (c) $\frac{1}{x^2+4x+4}$ (e) $\frac{x+3}{2x^2+4x+2}$ (g) $\frac{x-1}{x^2-1}$ (i) $\frac{2}{x^2-1}$

(b) $\frac{1}{x^2+2x+3}$ (d) $\frac{x}{x^2+4x+6}$ (f) $\frac{2x+2}{2x^2+4x+6}$ (h) $\frac{x+1}{x^2-1}$ (j) $\frac{3x+1}{2+x^4}$

Vamos agora discutir a primitivação de funções racionais no caso geral. A técnica é sempre a mesma: reescrever a função como soma de primitivas imediatas — que serão dos três tipos acima ou então simplesmente da forma $\frac{1}{x-a}$, que dá origem a um logaritmo. O algoritmo para reescrever é conhecido como *método de decomposição em elementos simples* e tem três passos.

1. Escrever a função como soma dum polinómio com uma fracção própria, isto é, uma fracção cujo numerador tem grau estritamente menor que o denominador.

2. Factorizar o denominador $Q(x)$; esta factorização produzirá apenas polinómios de primeiro ou segundo grau sem raízes.

3. Reescrever a fracção como soma de fracções cujos denominadores são os factores determinados no passo anterior, eventualmente com expoentes menores ou iguais aos que ocorrem na factorização.

4.4.1 Divisão de polinómios

O primeiro passo pode ser efectuado com recurso ao algoritmo de divisão de polinómios. Aqui opta-se por uma variante ligeiramente mais simples deste algoritmo que devolve o resultado na forma certa. A ideia é muito simples: se $\frac{P(x)}{Q(x)}$ não é uma fracção própria, escolhem-se os termos de maior grau $a_p x^p$ de $P(x)$ e $a_q x^q$ de $Q(x)$, e reescreve-se a expressão como $\frac{a_p}{a_q}x^{p-q} + \frac{P^*(x)}{Q(x)}$, onde $P^*(x)$ é escolhido por forma a não alterar o valor da expressão.

Exemplo. Consideremos a fracção

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + x^2}{x^2 - 1}\,,$$

que não é uma fracção própria. Dividindo os termos de maior expoente obtemos $2x^2$, pelo que a expressão deve ser reescrita como $2x^2 + \frac{P^*(x)}{x^2-1}$.

Ora $2x^2\left(x^2 - 1\right) = 2x^4 - 2x^2$. A esta expressão é preciso somar $-4x^3 + 3x^2$ para obter o numerador original. É precisamente este valor que tomamos para $P^*(x)$. Ou seja:

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + x^2}{x^2 - 1} = 2x^2 + \frac{-4x^3 + 3x^2}{x^2 - 1}\,.$$

Agora repetimos o processo, uma vez que a fracção obtida não é uma fracção própria. Dividindo os termos de maior grau obtemos $-4x$, e $-4x\left(x^2 - 1\right) = -4x^3 + 4x$, a que é preciso somar $3x^2 - 4x$ para obter o numerador original. Então

$$2x^2 + \frac{-4x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} = 2x^2 - 4x + \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}\,.$$

Repetindo novamente o processo, obtemos o termo 3, e a $3\left(x^2 - 1\right) = 3x^2 - 3$ é preciso somar $-4x + 3$ para recuperar o numerador original. Obtemos o resultado final:

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + x^2}{x^2 - 1} = 2x^2 - 4x + 3 + \frac{-4x + 3}{x^2 - 1}\,.$$

Exercício 9. Reescreva as seguintes fracções como soma dum polinómio com uma fracção própria.

(a) $\frac{3x^2+1}{x^2+2}$	(c) $\frac{x^6-1}{x-1}$	(e) $\frac{x^3-2x+3}{3x^2-x+2}$	(g) $\frac{x^4-1}{x^2+1}$
(b) $\frac{x^5+7x^3-x^2}{x^3}$	(d) $\frac{x^7-3x^5+2x}{x-1}$	(f) $\frac{2x^4-2x^2+x}{3x^3-2x}$	(h) $\frac{2x^4-3x}{4x^2+3x-1}$

4.4.2 Factorização de polinómios

O segundo passo assenta num resultado já conhecido: se um polinómio P satisfaz $P(a) = 0$, então $P(x) = (x - a)P^*(x)$ para algum polinómio $P^*(x)$. A determinação de $P^*(x)$ pode ser feita ou recorrendo ao algoritmo anterior, pela regra de Ruffini ou pela aplicação de casos notáveis da multiplicação de polinómios.

Exemplo.

1. Para factorizar $x^2 - 1$ basta observar que se trata dum caso notável da multiplicação de polinómios: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

2. Da mesma forma, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

3. Para factorizar $x^2 - 4x + 3$ pode-se usar a fórmula resolvente para determinar as suas duas raízes: 1 e 3; então o resultado acima garante que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

4. O polinómio $x^2 - 4x + 5$ não tem raízes reais, pelo que já está factorizado.

5. Para factorizar $x^4 - 1$, começa-se por observar que é uma diferença de quadrados, donde $x^4 - 1 = \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)$. O primeiro factor não tem raízes, o segundo já factorizámos atrás. Então $x^4 - 1 = \left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$.

6. Para factorizar $x^3 + 5x^2 + 4x$ começa-se por pôr x em evidência e depois procuram-se as raízes do polinómio de segundo grau resultante, para obter $x^3+5x^2+4x = x(x+1)(x+4)$

É importante salientar que em geral determinar as raízes de um polinómio não é um problema simples, havendo uma fórmula resolvente apenas para polinómios de grau até 4.

Exercício 10. Factorize os seguintes polinómios.

(a) $x^2 + 2$

(b) $x^5 + 7x^3 - x^2$

(c) $x^3 - 1$

(d) $x^3 - x^2 - x$

(e) $x^3 + 1$

(f) $3x^2 - x + 2$

(g) $3x^3 - 2x$

(h) $4x^4 + 3x^3 - x^2$

(i) $\left(x^3 - 4x\right)\left(x^2 + 4x + 4\right)$

4.4.3 Decomposição de fracções próprias

Passemos agora ao terceiro passo. O interesse de factorizar o denominador $Q(x)$ é o facto de, numa fracção própria, ser sempre possível escrevê-la como soma de fracções com esses factores como denominadores. Mais precisamente, é possível demonstrar o resultado seguinte.

Teorema. Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma fracção própria e $Q(x) = (Q_1(x))^{p_1} \times \cdots \times (Q_n(x))^{p_n}$ a factorização de $Q(x)$. Então $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode ser escrito de forma única como uma soma de fracções próprias cujos denominadores são os polinómios $Q_i(x)$ com expoentes menores ou iguais aos que ocorrem na factorização de $Q(x)$.

Embora o resultado geral seja difícil de escrever, na prática é simples obter a decomposição usando o *método dos coeficientes indeterminados*. Essencialmente, este método permite obter um conjunto de equações que permitem determinar os numeradores das fracções constantes da decomposição.

Consideremos em primeiro lugar o problema de decompor a fracção $\frac{-4x+3}{x^2-1}$. O denominador factoriza-se em $(x+1)(x-1)$, pelo que as fracções obtidas na decomposição terão denominadores $(x+1)$ e $(x-1)$. Uma vez que estas fracções são próprias, os seus numeradores terão de ser constantes, o que significa que

$$\frac{-4x+3}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

para determinados A e B. Multiplicando esta equação por $(x+1)(x-1)$, obtém-se a relação

$$-4x+3 = A(x-1) + B(x+1) = (A+B)x + (-A+B) .$$

A partir daqui é preciso encontrar duas equações que permitam determinar os valores de A e B. Há muitas formas de o conseguir; uma hipótese é atribuir valores a x. A igualdade $-4x+3 = A(x+1)+B(x-1)$ sugere tomar $x=-1$ e $x=1$, já que estes valores anulam uma parcela do segundo membro; obtêm-se as equações seguintes.

$$\begin{array}{llll} x=-1: & 7=-2B & \Longrightarrow & B=-\frac{7}{2} \\ x=1: & -1=2A & \Longrightarrow & A=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Então

$$\frac{-4x+3}{x^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{7}{2}}{x-1}$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{-4x+3}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{7}{2}}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{7}{2}\log|x-1| + C \end{aligned}$$

Vejamos mais alguns exemplos semelhantes.

Exemplo.

1. Consideremos a fracção $\frac{x^2+3x-1}{x^3-4x}$. O denominador factoriza-se como

   $$x^3-4x = x\left(x^2-4\right) = x(x-2)(x+2) ,$$

   pelo que

   $$\frac{x^2+3x-1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} ,$$

   ou, eliminando os denominadores nesta equação,

   $$x^2+3x-1 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) .$$

Avaliando esta expressão para $x = 0$, $x = 2$ e $x = -2$ obtemos as três equações seguintes.

$$\begin{array}{llll} x = -2: & -3 = 8C & \Longrightarrow & C = -\frac{3}{8} \\ x = 0: & -1 = -4A & \Longrightarrow & A = \frac{1}{4} \\ x = 2: & 9 = 8B & \Longrightarrow & B = \frac{9}{8} \end{array}$$

Então

$$\frac{x^2+3x-1}{x^3-4x} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{9}{8}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{8}}{x+2}$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3x-1}{x^3-4x}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{9}{8}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{8}}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{9}{8}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}\log|x| + \frac{9}{8}\log|x-2| - \frac{3}{8}\log|x+2| + C \end{aligned}$$

2. Consideremos agora a fracção $\frac{2x^3-1}{(x^2-5x+6)(x^2-1)}$. Aplicando a fórmula resolvente, encontramos as raízes $x = 2$ e $x = 3$ para o primeiro polinómio do denominador, enquanto o segundo é um caso notável. Então

$$\begin{aligned} \frac{2x^3-1}{(x^2-5x+6)(x^2-1)} &= \frac{2x^3-1}{(x-2)(x-3)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}\,, \end{aligned}$$

ou, eliminando os denominadores nesta equação,

$$\begin{aligned} 2x^3-1 = A(x-3)(x-1)(x+1) + B(x-2)(x-1)(x+1) + \\ + C(x-2)(x-3)(x+1) + D(x-2)(x-3)(x-1)\,. \end{aligned}$$

Avaliando esta expressão para $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$ e $x = -1$ obtemos as quatro equações seguintes.

$$\begin{array}{llll} x = -1: & -3 = -24D & \Longrightarrow & D = \frac{1}{8} \\ x = 1: & 1 = 4C & \Longrightarrow & C = \frac{1}{4} \\ x = 2: & 15 = -3A & \Longrightarrow & A = -5 \\ x = 3: & 53 = 8B & \Longrightarrow & B = \frac{53}{8} \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3-1}{(x^2-5x+6)(x^2-1)}\,dx &= -5\int \frac{dx}{x-2} + \frac{53}{8}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= -5\log|x-2| + \frac{53}{8}\log|x-3| + \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{1}{8}\log|x+1| + C \end{aligned}$$

Exercício 11. Primitive as seguintes funções.

(a) $\frac{2x}{x^3-x}$ (b) $\frac{x^2+2x}{x^3+5x^2+6x}$ (c) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ (d) $\frac{3x+1}{(x^2-9)(x^2+2x)}$

Havendo polinómios de segundo grau irredutíveis (sem raízes) na decomposição de $Q(x)$, há apenas um cuidado a ter: o numerador duma fracção própria com esse denominador é em geral um polinómio de primeiro grau, e não uma constante. Assim, para primitivar $\frac{1}{x^3+x^2+x}$ começa-se por factorizar o denominador: $x^3+x^2+x = x\left(x^2+x+1\right)$, e este último polinómio não tem raízes. Então

$$\frac{1}{x^3+x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

para determinados valores de A, B e C.

Tal como atrás, começamos por eliminar denominadores, obtendo

$$1 = A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)x\,.$$

Novamente, atribuindo a x o valor 0 obtém-se $A=1$. Para obter os valores de B e C é necessário encontrar mais duas equações. Uma hipótese é dar novos valores a x; porém, não há valores que anulem mais termos. Embora seja perfeitamente viável escolher outros valores (por exemplo, $x=-1$ e $x=1$), há outra forma de proceder. Desenvolvendo a expressão anterior e agrupando os termos em x e x^2, obtém-se

$$1 = (A+B)x^2 + (A+C)x + A\,.$$

Para que esta equação seja verdadeira para *todos* os valores de x, é necessário que os coeficientes das potências de x coincidam; ou seja, o coeficiente do termo independente do lado esquerdo (1) tem de ser igual ao do lado direito (A), donde $A=1$; o de x^2 do lado esquerdo (0) tem de ser igual ao do lado direito ($A+B$), donde $B=-1$; e analogamente para o coeficiente em x, donde também $C=-1$. Tem-se então:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+x^2+x}\,dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{-x-1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \log|x| - \frac{1}{2}\log\left|x^2+x+1\right| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

onde a primitiva da última parcela é semelhante à calculada no último exemplo da p. 208.

Vejamos outro exemplo semelhante.

Exemplo. Calcular as primitivas de $\frac{3x^2+2x-5}{x^4-1}$.

Factorizando o denominador, obtemos

$$x^4-1 = \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) = \left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)\,.$$

Então

$$\frac{3x^2+2x-5}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}\,.$$

Eliminando denominadores obtemos a relação

$$3x^2 + 2x - 5 = (Ax + B)(x + 1)(x - 1) + C\left(x^2 + 1\right)(x - 1) + D\left(x^2 + 1\right)(x + 1)$$

donde se obtêm as seguintes relações.

$$\begin{array}{llcr} x = -1: & -4 = -4C & \Longrightarrow & C = 1 \\ x = 1: & 0 = 4D & \Longrightarrow & D = 0 \\ x = 0: & -5 = -B - C + D & \Longrightarrow & B = 4 \\ (x^3): & 0 = A + C + D & \Longrightarrow & A = -1 \end{array}$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^4 - 1}\,dx &= \int \frac{-x + 4}{x^2 + 1} + \frac{1}{x + 1}\,dx \\ &= \int \frac{-x}{x^2 + 1}\,dx + \int \frac{4}{x^2 + 1}\,dx + \int \frac{1}{x + 1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log\left|x^2 + 1\right| + 4\arctan(x) + \log|x + 1| + C\,. \end{aligned}$$

Exercício 12. Primitive as seguintes funções.

(a) $\frac{x^2-1}{x^3+4x}$ (b) $\frac{4x^2-2x}{(x-1)(x^2+2)}$ (c) $\frac{2x^2-2x+2}{x^3+x}$

O único caso que falta considerar é o caso em que há factores repetidos na factorização de $Q(x)$. Neste caso, na decomposição podem surgir parcelas com todos os expoentes menores que o que ocorre na factorização de $Q(x)$, mas sempre com numeradores do mesmo grau.

Consideremos o problema de primitivar $\frac{x^2+2}{x^4+2x^3+x^2}$. O denominador factoriza-se como

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 + 2x + 1\right) = x^2(x + 1)^2\,,$$

em que os polinómios x e $x + 1$ aparecem ambos com expoente 2. Então, na decomposição da fracção, cada um destes polinómios poderá ocorrer em denominador com expoente 1 ou 2, mas sempre com numerador constante (pois são polinómios de grau 1). Ou seja:

$$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x + 1} + \frac{B_2}{(x + 1)^2}\,,$$

onde usámos A_1 e A_2 para salientar que ambas as fracções provêm do mesmo termo da factorização, e analogamente para B_1 e B_2.

O procedimento a partir daqui é semelhante: eliminamos denominadores, obtendo

$$x^2 + 2 = A_1x(x + 1)^2 + A_2(x + 1)^2 + B_1x^2(x + 1) + B_2x^2$$

e atribuindo a x os valores 0 e -1 determinamos valores de duas incógnitas. Para as restantes, podemos comparar os coeficientes de x e x^3 nos polinómios da esquerda e da direita.

$$\begin{array}{llcr} x = -1: & 3 = B_2 & \Longrightarrow & B_2 = 3 \\ x = 0: & 2 = A_2 & \Longrightarrow & A_2 = 2 \\ (x): & 0 = A_1 + 2A_2 & \Longrightarrow & A_1 = -4 \\ (x^3): & 0 = A_1 + B_1 & \Longrightarrow & B_1 = 4 \end{array}$$

Agora é simples primitivar a função.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{x^4+2x^3+x^2}\,dx &= \int \frac{-4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\,dx \\ &= -4\log|x|-\frac{2}{x}+4\log|x+1|-\frac{3}{x+1}+C \\ &= 4\log\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+C\,.\end{aligned}$$

O caso em que aparecem polinómios de segundo grau com expoente superior a 1 na factorização de $Q(x)$ é um pouco mais complicado (embora também seja primitivável) e não será considerado nesta exposição.

Exercício 13. Primitive as seguintes funções.

(a) $\frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+2x+1}$ (b) $\frac{-2x^3+x^2-4x+5}{(x^2+1)(x^2-2x+1)}$ (c) $\frac{3x+1}{(x^2-4)(x^2+2x)}$

4.5 Primitivação por substituição

Perante uma função que não é claramente a derivada de outra, é necessário recorrer a técnicas específicas de primitivação. A primeira destas técnicas é bastante simples e repete uma ideia que já encontrámos a propósito do cálculo de primitivas imediatas.

Recorde-se que, para primitivar por exemplo $\cos(x)\sin^3(x)$, começámos por identificar $\cos(x)$ como sendo a derivada de $\sin(x)$ para concluir que estamos perante uma aplicação da regra de derivação da função composta. Explicitamente, tomando $y=\sin(x)$, temos $\frac{dy}{dx}=\cos(x)$, donde $dy=\cos(x)\,dx$ — e uma vez que a expressão $\cos(x)\,dx$ já ocorria em $\int\cos(x)\sin^3(x)\,dx$ era fácil prosseguir.

A ideia do método de primitivação por substituição é aplicar o mesmo raciocínio mesmo quando a derivada $\frac{dy}{dx}$ não ocorre na expressão a primitivar. De facto, temos sempre escrito o diferencial de y em termos do diferencial de x, mas é possível (calculando a derivada $\frac{dx}{dy}$) obter a relação inversa e escrever

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(y))g'(y)\,dy$$

onde se tomou $x=g(y)$.

Na primitivação por substituição, é tradição usar-se a letra t para a nova variável, por analogia com situações mais complexas que serão estudadas em disciplinas posteriores. Assim, a partir de agora seguiremos essa convenção, pelo que a relação anterior deverá ser escrita como

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

Esta fórmula tem várias justificações relativamente intuitivas. Para além da que já apresentámos, baseada na regra de cálculo, há outra explicação que decorre directamente da definição de primitiva: se F é uma primitiva de f, então a derivada de $F(x)$ é $f(x)$ (definição de primitiva) e a derivada de $F(g(t))$ é $f(g(t))g'(t)$ (regra da cadeia). Assim, ao primitivar a última expressão encontramos precisamente $F(g(t))$, pelo que desfazendo a substituição podemos recuperar a expressão da função pretendida $F(x)$.

Há ainda uma interpretação geométrica desta fórmula que não apresentaremos aqui.

Vejamos alguns exemplos de aplicação deste método. Comecemos por considerar o problema de calcular as primitivas de $\frac{1}{e^x-1}$. Uma vez que esta função não é uma primitiva imediata, podemos pensar em tomar $t = e^x$ para simplificar a sua expressão. Então, $x = \log(t)$ (ou seja, na terminologia usada acima, $g(t) = \log(t)$), donde $dx = \frac{dt}{t}$. A primitiva calcula-se agora facilmente pelas técnicas já conhecidas.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x-1}\,dx &= \int \frac{1}{t-1}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\,dt \\ &= \log|t-1| - \log|t| + C = \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + C\end{aligned}$$

Esta expressão está em função da variável t e não da variável x. O passo final é desfazer a substituição, ou seja, substituir t pelo seu valor (e^x), obtendo-se a primitiva

$$\log\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + C\,.$$

Da mesma forma, para primitivar $x\sqrt{x-1}$ podemos começar por definir $\sqrt{x-1} = t$ para eliminar a raíz quadrada da expressão a primitivar. Resolvendo esta última equação em ordem a x, obtém-se $x - 1 = t^2$, donde $x = t^2 + 1$ e portanto $dx = 2t\,dt$. Então

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int \left(t^2+1\right) t\; 2t\,dt = \int 2t^4 + 2t^2\,dt \\ &= \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C\,.\end{aligned}$$

Um raciocínio semelhante permite-nos calcular as primitivas de $\frac{\log(x)}{x(\log(x)-1)}$. Tal como atrás, não nos encontramos perante uma primitiva directa. A expressão da função sugere, contudo, que usemos a substituição $\log(x) = t$, que equivale a $x = e^t$. Então $dx = e^t\,dt$, donde

$$\int \frac{\log(x)}{x(\log(x)-1)}\,dx = \int \frac{t}{e^t(t-1)}e^t\,dt = \int \frac{t}{t-1}\,dt\,.$$

Observe-se que poderíamos ter chegado mais rapidamente a esta expressão escrevendo dt em função de dx: de $\log(x) = t$ conclui-se que $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, ou $dt = \frac{dx}{x}$ (à semelhança do que fizemos no cálculo de primitivas imediatas). Uma vez que o termo $\frac{dx}{x}$ ocorre na expressão a primitivar, poder-se-ia ter efectuado a substituição dessa forma.

A partir da identidade $\frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$ chegamos rapidamente à primitiva

$$\int \frac{t}{t-1}\,dt = \int 1 + \frac{1}{t-1}\,dt = t + \log|t-1| + C$$

e, desfazendo a substituição, encontramos a resposta

$$\log(x) + \log|\log(x) - 1| + C\,.$$

O verdadeiro potencial do método de substituição surge quando usado em conjugação com outros, em particular em combinação com as técnicas de primitivação de funções racionais, que nos permitem primitivar facilmente qualquer função racional de e^x, $\log(x)$ ou de $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Exemplo.

1. Determinar as primitivas de $\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}$.

   Uma vez que ocorrem diversas exponenciais nesta fracção, é natural usar a substituição $e^x = t$. Tem-se $e^{2x} = t^2$, $x = \log(t)$ e $dx = \frac{dt}{t}$, donde

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\, dx &= \int \frac{t^2}{(t^2-1)(t+1)} \frac{1}{t}\, dt \\ &= \int \frac{t}{(t^2-1)(t+1)}\, dt\,.\end{aligned}$$

   O denominador desta fracção factoriza-se em $(t^2-1)(t+1) = (t-1)(t+1)^2$, donde

$$\frac{t}{(t^2-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B_1}{t+1} + \frac{B_2}{(t+1)^2}$$

   ou

$$t = A(t+1)^2 + B_1(t+1)(t-1) + B_2(t-1)\,.$$

   Tomando $t = 1$, $t = -1$ e $t = 0$ obtêm-se os valores de A, B_1 e B_2.

$$\begin{array}{llll} t=-1: & -1=-2B_2 & \Longrightarrow & B_2 = \frac{1}{2} \\ t=1: & 1=4A & \Longrightarrow & A = \frac{1}{4} \\ t=0: & 0 = A - B_1 - B_2 & \Longrightarrow & B_1 = -\frac{1}{4} \end{array}$$

   Então

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\, dx &= \int \frac{t}{(t^2-1)(t+1)}\, dt \\ &= \int \frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)^2}\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}\, dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}\, dt \\ &= \frac{1}{4}\log|t-1| - \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + C \\ &= \frac{1}{4}\log|e^x-1| - \frac{1}{4}\log(e^x+1) - \frac{1}{2e^x+2} + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| - \frac{1}{2e^x+2} + C\end{aligned}$$

2. Consideremos de seguida o problema de determinar as primitivas de $\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$. Aqui a substituição $t = \sin(x)$ não é muito simples de utilizar, uma vez que a expressão a primitivar envolve senos e cosenos; a técnica usada consiste em começar por dividir o numerador e o denominador da fracção por $\cos(x)$, por forma a obter constantes e

tangentes, e depois aplicar a substituição $t = \tan(x)$, donde $x = \arctan(t)$ e portanto $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\, dx = \int \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\cos(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x)}}\, dx = \int \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1}\, dx$$
$$= \int \frac{t-1}{t+1}\frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Novamente, o denominador desta fracção factoriza-se em $(t+1)\left(1+t^2\right)$, donde

$$\frac{t-1}{(t+1)\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

ou

$$t - 1 = A(t^2+1) + Bt(t+1) + C(t+1)\,.$$

Tomando $t = -1$, $t = 0$ e $t = 1$ obtêm-se os valores de A, B e C.

$$\begin{array}{lll} t = -1: & -2 = 2A & \Longrightarrow \quad A = -1 \\ t = 0: & -1 = A + C & \Longrightarrow \quad C = 0 \\ t = 1: & 0 = 2A + 2B + 2C & \Longrightarrow \quad B = 1 \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\, dx &= \int \frac{-1}{t+1} + \frac{t}{t^2+1}\, dt \\ &= -\log|t+1| + \frac{1}{2}\log\left|t^2+1\right| + C \\ &= -\log|\tan(x)+1| + \log|\cos(x)| + C \\ &= \log\left|\frac{\cos(x)}{\tan(x)+1}\right| + C \end{aligned}$$

usando a identidade trigonométrica $\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$ e propriedades dos logaritmos.

Exercício 14. Primitive as seguintes funções.

(a) $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ (b) $\frac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}$ (c) $\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)-2\cos(x)}$

Outra situação frequente é o caso de fracções em que ocorrem diferentes potências não inteiras de x. Aqui, uma substituição adequada permite transformar todas as potências em potências de expoente inteiro, reduzindo o problema a um problema de primitivação de fracções racionais.

Por exemplo, considere-se o problema de primitivar $\frac{\sqrt{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$. Aqui, ocorrem as potências $x = x^1$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ e $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. O menor denominador comum daqueles expoentes é 6, obtendo-se

$$x = x^1 = x^{\frac{6}{6}} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^6 \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{6}} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^3 \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{6}} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2\,.$$

Tome-se então $\sqrt[6]{x} = t$, donde $x = t^6$ e $dx = 6t^5\ dt$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\ dx &= \int \frac{t^3}{t^6\left(1+t^2\right)} 6t^5\ dt = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\ dt \\
&= 6\int 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dt = 6t - 6\arctan(t) + C \\
&= 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\left(\sqrt[6]{x}\right) + C
\end{aligned}$$

que, mais uma vez, não seria simples de determinar por outro método.

Exercício 15. Primitive as seguintes funções.

(a) $\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ (b) $\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{x^2-x\sqrt{x}+1}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[x]{}+\sqrt[5]{x}}$

Para além destas situações, há outras em que substituições menos óbvias podem conduzir rapidamente ao resultado. Um exemplo típico são funções envolvendo a expressão $\sqrt{1-x^2}$ (ou semelhante), que se primitivam usando a substituição $x = \sin(t)$. De facto, com esta substituição o termo $\sqrt{1-x^2}$ reduz-se a $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$, tomando t no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Por exemplo, para primitivar a própria expressão $\sqrt{1-x^2}$ podemos tomar $x = \sin(t)$, donde $dx = \cos(t)\ dt$. Obtém-se

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\ dt \\
&= \int \cos^2(t)\ dt \\
&= \int \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\ dt \\
&= \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

Para desfazer a substituição, há que ter em conta que $\sin(t) = x$, pelo que $\cos(t) = \sqrt{1-x^2}$ e $t = \arcsin x$. Da relação $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ obtém-se então

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + C \\
&= \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + \frac{t}{2} + C \\
&= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C
\end{aligned}$$

primitiva esta que seria claramente difícil de determinar directamente.

Quando necessário, acrescentam-se os factores multiplicativos necessários para conseguir simplificar a raiz. Por exemplo, se a função a primitivar contiver $\sqrt{4-x^2}$ toma-se $x = 2\sin(t)$ para ter

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(t)} = 2\sqrt{1-\sin^2(t)} = 2\cos(t)\,.$$

Outro tipo de substituição pouco evidente pode ser usada para calcular as primitivas de $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ (um exemplo do caso de primitivação de funções racionais que não discutimos atrás). De facto, tomando $x = \tan(t)$ a função primitiva-se quase imediatamente: uma vez que $dx = (1 + \tan^2(t))\ dt$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(\tan^2(t)+1)^2}\left(\tan^2(t)+1\right)dt = \int \frac{1}{\tan^2(t)+1}\,dt \\ &= \int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C \\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{\sin(2\arctan(x))}{4} + C\end{aligned}$$

onde se usou a identidade trigonométrica $\tan^2(t)+1 = \frac{1}{\cos^2(t)}$ (note-se que são as duas expressões mais frequentemente usadas para a derivada da tangente).

Em geral, para primitivar funções da forma $\frac{A}{((x-p)^2+q^2)^2}$ usa-se a substituição $x-p = q\tan(t)$.

Esta substituição também é útil para calcular primitivas de funções onde ocorrem termos com $\sqrt{1+x^2}$ ou similares, devido mais uma vez à identidade $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Assim, temos por exemplo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+\tan^2(t)}\left(1+\tan^2(t)\right)dt = \int \frac{1}{\cos^3(t)}\,dt \\ &= \int \frac{\cos(t)}{\cos^4(t)}\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\left(1-\sin^2(t)\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy\end{aligned}$$

onde $x = \tan(t)$ e $y = \sin(t)$.

Uma vez que $(1-y^2)^2 = ((1-y)(1+y))^2 = (1-y)^2(1+y)^2 = (y-1)^2(y+1)^2$, podemos escrever a função integranda como

$$\frac{A_1}{y-1} + \frac{A_2}{(y-1)^2} + \frac{B_1}{y+1} + \frac{B_2}{(y+1)^2}$$

donde se obtém, eliminando denominadores,

$$1 = A_1(y-1)(y+1)^2 + A_2(y+1)^2 + B_1(y+1)(y-1)^2 + B_2(y-1)^2\,.$$

Tomando $y = \pm 1$, $y = 0$ e $y = 2$ obtêm-se os valores destas constantes.

$$\begin{array}{lllr} y=1: & 1 = 4A_2 & \Longrightarrow & A_2 = \frac{1}{4} \\ y=-1: & 1 = 4B_2 & \Longrightarrow & B_2 = \frac{1}{4} \\ y=0: & 1 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 & \Longrightarrow & B_1 - A_1 = \frac{1}{2} \\ y=2: & 1 = 9A_1 + 9A_2 + 3B_1 + B_2 & \Longrightarrow & 3A_1 + B_1 = -\frac{1}{2}\end{array}$$

donde $A_1 = -\frac{1}{4}$ e $B_1 = \frac{1}{4}$.

Então

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy = \int \frac{-\frac{1}{4}}{y-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(y-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{y+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(y+1)^2}\,dy \\ &= \frac{1}{4}\left(-\log|y-1| - \frac{1}{y-1} + \log|y+1| - \frac{1}{y+1}\right)\end{aligned}$$

Vamos tratar esta expressão em pedaços. As parcelas $-\log|y-1|+\log|y+1|$ podem ser reescritas como $\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$ ou, trocando o sinal da expressão dentro do módulo, como

$$\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \log\left|\frac{(1+y)^2}{1-y^2}\right|,$$

multiplicando esta fracção em cima e em baixo por $1+y$ e simplificando. Substituindo $y=\sin(t)$ obtemos, tendo em conta a relação $1-y^2=\cos^2(t)$,

$$\log\left|\frac{(1+\sin(t))^2}{\cos^2(t)}\right|.$$

Uma vez que $\log\left(a^2\right)=2\log(a)$, podemos simplificar esta expressão obtendo

$$2\log\left|\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right| = 2\log\left|\frac{1}{\cos(t)}+\tan(t)\right|.$$

Como $x=\tan(t)$, sabemos que $\frac{1}{\cos(t)}=\sqrt{1+\tan^2(t)}=\sqrt{1+x^2}$, donde esta última expressão se reduz a

$$2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|.$$

As duas outras parcelas geram

$$-\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1} = -\frac{2y}{y^2-1} = \frac{2y}{1-y^2}.$$

Substituindo y por $\sin(t)$ (e portanto $1-y^2=\cos^2(t)$) obtemos

$$\frac{2\sin(t)}{\cos^2(t)} = 2\tan(t)\frac{1}{\cos(t)} = 2x\sqrt{1+x^2}$$

após desfazer a substituição $x=\tan(t)$, com as mesmas observações de atrás.

Juntando estas duas expressões obtemos

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\left(-\log|y-1|-\frac{1}{y-1}+\log|y+1|-\frac{1}{y+1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+2x\sqrt{1+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}.\end{aligned}$$

Exercício 16. Primitive as seguintes funções.

(a) $x\sqrt{1-x^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}^3}$ (e) $\frac{1}{(x^2-2)^2}$ (g) $\frac{1}{(x^2-2x)^2}$

(b) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}$ (d) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (f) $\frac{16}{(4x^2-1)^2}$ (h) $\frac{x^4-2x^2}{(x^2-1)^2}$

Existem outras substituições comuns para outras situações, que poderão ser encontradas em livros de referência sobre primitivação.

4.6 Primitivação por partes

A última técnica de primitivação que vamos abordar destina-se a permitir o cálculo de primitivas de produtos de funções e assenta na regra de derivação do produto:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Passando um dos termos do lado direito da equação para o lado esquerdo, obtemos a relação seguinte.

$$(f(x)g(x))' - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$$

Esta relação implica que se pode obter uma primitiva da função do lado direito primitivando a função do lado esquerdo. Ora esta é composta por duas parcelas; a primeira tem como primitiva precisamente $f(x)g(x)$. Obtém-se então a *regra de primitivação por partes*:

$$\int f'(x)g(x)\;dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\;dx\,.$$

Observe-se que, por simetria, também se poderia escrever

$$\int f(x)g'(x)\;dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\;dx\,.$$

Ambas as formas são equivalentes — o produto de funções é comutativo — mas na prática é mais simples chamar f à primeira função e g à segunda, independentemente de qual delas vai ser derivada.

A regra de primitivação por partes requer algum cuidado na sua aplicação, já que pode tornar o problema a resolver bastante mais complicado. Antes de mais, convém garantir que não estamos perante uma primitiva imediata — já que nesse caso o problema se resolve directamente. Em segundo lugar, a regra só é aplicável em situações em que estamos perante um produto de duas funções, uma das quais é uma primitiva imediata: a expressão a primitivar tem de ser da forma $f'(x)g(x)$. Finalmente, a primitivação por partes *nunca* rseolve problemas de primitivação — simplesmente transforma-os noutros que, idealmente, são mais simples de resolver.

Por norma, um bom indicador de que a primitivação por partes pode ser um bom caminho a seguir é a existência dum factor que se simplifica por derivação. São exemplos disto os polinómios, os logaritmos e as funções trigonométricas inversas. De seguida veremos exemplos de todas estas situações.

Há várias situações características do uso de primitivação por partes, que discutiremos na sequência. Cada uma tem algumas particularidades, pelo que convém discuti-las com algum detalhe.

4.6.1 Produtos por polinómios

O caso paradigmático da primitivação por partes diz respeito à situação em que a função a primitivar é o produto dum polinómio por uma primitiva imediata (tipicamente uma função exponencial ou trigonométrica). Nestes casos, a função polinomial simplifica-se por derivação, pelo que deverá ser a escolhida para derivar.

Ilustremos esta situação com o cálculo das primitivas de xe^x. Vamos tomar $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, donde se tem $f'(x) = 1$ e $g(x) = e^x$. A aplicação da regra de primitivação por partes, com anotações que devem ser auto-explicativas, permite calcular facilmente esta primitiva da forma seguinte:

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{e^x}_{g}\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C\,.$$

Vejamos alguns exemplos do mesmo estilo.

Exemplo.

1. Para calcular $\int x\cos(x)\,dx$ escolhe-se novamente $f(x) = x$, $g'(x) = \cos(x)$ e procede-se como antes.

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{cos(x)}_{g'}\,dx = x\sin(x) - \int 1\sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C\,.$$

2. Para calcular $\int x^2e^{-x}\,dx$ temos de aplicar primitivação por partes duas vezes.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^{-x}}_{g'}\,dx &= x^2\left(-e^{-x}\right) - \int 2x\left(-e^{-x}\right)dx\\ &= -x^2e^{-x} + \int \underbrace{2x}_{f}\underbrace{e^{-x}}_{g'}\,dx\\ &= -x^2e^{-x} + 2x\left(-e^{-x}\right) - \int 2\left(-e^{-x}\right)dx\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -\left(x^2+2x+2\right)e^{-x} + C\end{aligned}$$

3. Para calcular $\int (x^2+3x)\sin(4x)\,dx$ o raciocínio é novamente semelhante.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\left(x^2+3x\right)}_{f}\underbrace{\sin(4x)}_{g'}\,dx &= \left(x^2+3x\right)\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right) - \int (2x+3)\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right)dx\\ &= -\frac{x^2+3x}{4}\cos(4x) + \int \underbrace{\frac{2x+3}{4}}_{f}\underbrace{\cos(4x)}_{g'}\,dx\\ &= -\frac{x^2+3x}{4}\cos(4x) + \frac{2x+3}{4}\frac{\sin(4x)}{4} - \int \frac{1}{2}\frac{\sin(4x)}{4}\,dx\\ &= -\frac{x^2+3x}{4}\cos(4x) + \frac{2x+3}{16}\sin(4x) + \frac{\cos(4x)}{32} + C\\ &= -\frac{8x^2+24x+1}{32}\cos(4x) + \frac{2x+3}{16}\sin(4x) + C\end{aligned}$$

Quando o polinómio surge multiplicado por um logaritmo ou uma função trigonométrica inversa, contudo, deve ser escolhido como função a primitivar e não a derivar. A razão para isto é simples: por um lado, nem os logaritmos nem as funções trigonométricas são directamente primitiváveis; por outro, são funções que derivadas dão funções racionais (ou que são transformáveis em funções racionais por substituição), pelo que a primitivação por partes gera sempre uma função que sabemos primitivar.

Vejamos como calcular uma primitiva e $x\log(x)$. Conforme dissemos, vamos escolher $f'(x) = x$ e $g(x) = \log(x)$, tendo portanto $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Temos então

$$\int \underbrace{x}_{f'}\underbrace{\log(x)}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\underbrace{\log(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = \frac{x^2\log(x)}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2\log(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

ou, simplificando a última expressão,

$$\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2(2\log(x)-1)}{4} + C\,.$$

Um exemplo um pouco mais complexo, porque requer o recurso às técnicas estudadas atrás, diz respeito à primitivação de $x\arcsin(x)$. Novamente, vamos primitivar o polinómio e derivar o arco de seno.

$$\int \underbrace{x}_{f'}\underbrace{\arcsin(x)}_{g}\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x^2\arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Vamos calcular separadamente a primitiva que ocorre nesta última expressão. Uma vez que nela ocorre a expressão $\sqrt{1-x^2}$, vamos recorrer à substituição $x = \sin(t)$, donde $dx = \cos(t)\,dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int \sin^2(t)\,dt \\ &= \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + C \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + C = \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int x\arcsin(x)\,dx &= \frac{x^2\arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right) + C \\ &= \frac{2x^2-1}{4}\arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C\,.\end{aligned}$$

É importante observar, contudo, que a mesma substituição poderia ter sido aplicada logo à função original. De facto, a presença de $\arcsin(x)$ sugere que se tome $\arcsin(x) = t$ (e portanto $x = \sin(t)$), obtendo-se

$$\int x\arcsin(x)\,dx = \int \sin(t)t\cos(t)\,dt$$

que se primitiva novamente por partes tomando $f(t) = t$ e $g'(t)) = \sin(t)\cos(t)$ — correspondendo precisamente à escolha que fizemos na primeira resolução do exercício.

Da mesma forma, a primitiva de $x\log(x)$ poderia ter sido calculada recorrendo à substituição $\log(x) = t$, donde $x = e^t$, obtendo-se

$$\int x\log(x)\,dx = \int e^t t e^t\,dt\,,$$

função que depois seria necessário primitivar por partes. Neste caso, a substituição revelou-se um passo adicional que não contribuiu para resolver o problema.

Em suma: o recurso à substituição não evita que se tenha de usar primitivação por partes. Assim, perante um produto que sugere que se primitive por partes não é vantajoso começar por usar substituições.

Observe-se que os argumentos do logaritmo ou da função trigonométrica podem ser mais complexos, sem contudo requerer maior número de aplicações da primitivação por partes.

Exemplo.

1. Para primitivar $(x^2+1)\arctan(x)$, escolhe-se $f'(x)=x^2+1$ e $g(x)=\arctan(x)$.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{(x^2+1)}_{f'}\underbrace{\arctan(x)}_{g}\,dx &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\int\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\int\frac{x^3+3x}{3\,(x^2+1)}\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\int\frac{x}{3}+\frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\frac{x^2}{6}-\log\left|x^2+1\right|+C\end{aligned}$$

2. Calcular as primitivas de $(x^2+1)\log|x^2-1|$.

   Primitivando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int \underbrace{(x^2+1)}_{f'}\underbrace{\log\left|x^2-1\right|}_{g}\,dx &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log\left|x^2-1\right|-\int\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{2x}{x^2-1}\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log\left|x^2-1\right|-\int\frac{2x^4+6x^2}{3\,(x^2-1)}\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log\left|x^2-1\right|-\int\frac{2x^2}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\frac{1}{x^2-1}\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log\left|x^2-1\right|-\frac{2x^3}{9}-\frac{8x}{3}-\frac{8}{3}\int\frac{1}{x^2-1}\,dx\end{aligned}$$

   Para o cálculo da última primitiva, basta observar (por exemplo decompondo em elementos simples) que

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

   donde

$$\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

   e portanto

$$\int (x^2+1)\log\left|x^2-1\right|\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log\left|x^2-1\right|-\frac{2x^3}{9}-\frac{8x}{3}-\frac{4}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\,.$$

Finalmente, há algumas situações de produto dum polinómio por uma função em que se consegue factorizar o polinómio para obter uma primitiva imediata em conjugação com a outra função. Esta situação ocorre frequentemente em funções envolvendo radicais.

Por exemplo, para primitivar $\frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$ pode-se factorizar x^5 em x^3x^2, obtendo-se assim uma primitiva imediata.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\,dx &= \int \underbrace{x^3}_{f}\underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}}_{g'}\,dx = \frac{2}{3}x^3\sqrt{1+x^3} - \int 3x^2\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x^3\sqrt{1+x^3} - \frac{4}{9}\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Da mesma forma, para primitivar produtos de polinómios por exponenciais de potências de x (ou funções trigonométricas destes argumentos) é necessário começar por factorizar o polinómio. É importante observar que, contrariamente aos casos simples de produtos de polinómios por exponenciais (ou funções trigonométricas) de múltiplos de x, funções mais complexas deste tipo podem não ser elementarmente primitiváveis. Outra forma de tratar estes casos é começar por efectuar uma substituição para transformar o argumento da exponencial (ou função trigonométrica) em t.

Exercício 17. Primitive as seguintes funções.

(a) $(x+1)e^{2x-1}$

(b) $\frac{3x+4}{e^x}$

(c) $(x^2+4x+5)\cos(2x)$

(d) $x\sin^2(x)\cos(x)$

(e) $\frac{x^2}{(x^2+2)^2}$

(f) $\frac{(3x^3+5x)}{e^{2x^2}}$

4.6.2 Logaritmos e funções trigonométricas inversas

A primitivação por partes pode também ser usada em situações em que não é óbvio que se esteja perante um produto para permitir calcular primitivas de algumas funções que se simplificam por derivação. Os exemplos paradigmáticos são o cálculo das primitivas de $\log(x)$, $\arcsin(x)$ e $\arctan(x)$.

Consideremos primeiro o problema de calcular $\int \log(x)\,dx$. Vimos na secção anterior que, em produtos de polinómios por logaritmos, se resolve o problema primitivando o polinómio e derivando o logaritmo. Ora, uma vez que $\log(x) = 1 \times \log(x)$, podemos aplicar esta técnica tomando $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log(x)$:

$$\int \underbrace{}_{f'}\underbrace{\log(x)}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{\log(x)}_{g} - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log(x) - \int 1\,dx = x\log(x) - x + C$$

que é de facto uma primitiva de $\log(x)$.

Exercício 18. Calcule as primitivas de $\arcsin(x)$ e $\arctan(x)$.

A mesma técnica pode ser aplicada para calcular primitivas de logaritmos e arcos de tangente (e nalguns casos arcos de seno) de polinómios de grau mais elevado.

Exemplo.

1. Calcular as primitivas de $\log|x^3 + 4x|$.

   Vendo a expressão desta função como um produto por 1 e raciocinando como atrás, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ }_{f'} \underbrace{\log\left|x^3+4x\right|}_{g}\, dx &= x\log\left|x^3+4x\right| - \int x\frac{3x^2+4}{x^3+4x}\, dx \\
&= x\log\left|x^3+4x\right| - \int \frac{3x^2+4}{x^2+4}\, dx \\
&= x\log\left|x^3+4x\right| - \int 3 - \frac{8}{x^2+4}\, dx \\
&= x\log\left|x^3+4x\right| - \int 3 - \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\, dx \\
&= x\log\left|x^3+4x\right| - 3x + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

2. Calcular as primitivas de $\arcsin(3x+2)$.

   Tal como antes, vamos interpretar esta expressão como o produto de 1 pelo arco de seno. Primitivando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ }_{f'} \underbrace{\arcsin(3x+2)}_{g}\, dx &= x\arcsin(3x+2) - \int x\frac{3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\, dx \\
&= x\arcsin(3x+2) - \int (3x)\left(1-(3x+2)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\, dx \\
&= x\arcsin(3x+2) - \int \frac{1}{6}(18x+12)\left(1-(3x+2)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\left(1-(3x+2)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\, dx \\
&= x\arcsin(3x+2) + \frac{1}{6}2\left(1-(3x+2)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\arcsin(3x+2) + C \\
&= \left(x+\frac{2}{3}\right)\arcsin(3x+2) + \frac{1}{3}\sqrt{1-(3x+2)^2} + C
\end{aligned}$$

   que é a primitiva pretendida.

3. Calcular as primitivas de $\arctan\left(x^2\right)$.

   Pelo mesmo processo, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ }_{f'} \underbrace{\arctan\left(x^2\right)}_{g}\, dx &= x\arctan\left(x^2\right) - \int x\frac{2x}{\left(x^2\right)^2+1}\, dx \\
&= x\arctan\left(x^2\right) - \int \frac{2x^2}{x^4+1}\, dx
\end{aligned}$$

   O cálculo desta última primitiva é um bom exercício de primitivação de funções racionais. Comecemos por observar que

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = \left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)$$

sendo estes dois polinómios irredutíveis. Então

$$\frac{2x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

donde sai a relação seguinte.

$$2x^2 = Ax\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+B\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+Cx\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+D\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

Podemos começar por tomar $x=0$ e $x=\pm\sqrt{2}$. Para obter a quarta equação, podemos calcular o coeficiente em x^3.

$$\begin{array}{ll}
x=0: & 0=B+D \\
x=\sqrt{2}: & 4=\sqrt{2}A+B+5\sqrt{2}C+5D \\
x=-\sqrt{2}: & 4=-5\sqrt{2}A+5B-\sqrt{2}C+D \\
(x^3): & 0=A+C
\end{array}$$

A primeira e a última equações permitem escrever C e D em termos de A e B; substituindo na duas outras equações e resolvendo, obtém-se $B=D=0$ e $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

O cálculo do resto da primitiva deixa-se como exercício, apresentando-se apenas o resultado final.

$$\int \arctan\left(x^2\right)dx = x\arctan\left(x^2\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+ \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}x+1)-\arctan(\sqrt{2}x-1)\right)$$

Exercício 19. Primitive as seguintes funções.

(a) $\log\left(x^2\right)$ (b) $\arctan(2x+1)$ (c) $\log\left|\frac{1}{x}+1\right|$ (d) $\arctan\left(\sqrt{x}\right)$

4.6.3 Produtos de exponenciais por funções trigonométricas

Outra situação importante, que surge com alguma frequência em aplicações, é aquela em que se pretende primitivar o produto duma função exponencial por uma trigonométrica (tipicamente seno ou coseno). Aqui a técnica de primitivação por partes não simplifica o problema, já que ambas as funções mantêm a sua complexidade com a derivação ou primitivação; porém, a troca de sinal na derivação (ou primitivação) das funções trigonométricas permite que se reduza o cálculo da primitiva a uma equação linear.

Vejamos como se pode proceder desta forma para primitivar $e^x\sin(x)$. Tipicamente, opta-se por primitivar a exponencial porque não tem trocas de sinal; ou seja, toma-se $f'(x)=e^x$ e $g(x)=\sin(x)$. Tem-se então

$$\int \underbrace{e^x}_{f'}\underbrace{\sin(x)}_{g}\,dx = \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx$$

A primitiva que falta calcular é novamente o produto duma função exponencial por uma trigonométrica; vamos aplicar novamente primitivação por partes, mantendo a escolha feita atrás de primitivar a exponencial.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\,dx &= e^x \sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\cos(x)}_{g}\,dx \\ &= e^x \sin(x) - \left(\underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{(-\sin(x))}_{g'}\,dx \right) \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\,dx\end{aligned}$$

Neste ponto parece que voltámos ao problema inicial. Porém, *assumindo que a função* $e^x \sin(x)$ *é primitivável* (veremos mais adiante que é de facto o caso), podemos ver a relação

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$

como uma equação em que a incógnita é $\int e^x \sin(x)\,dx$. Explicitamente, chamando $F(x)$ a esta função, a relação acima pode ser escrita como

$$F(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - F(x)\,,$$

donde se obtém

$$2F(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$$

e portanto

$$F(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))\,.$$

Esta é uma primitiva de $e^x \sin(x)$; para obter a expressão geral das primitivas desta função, basta adicionar uma constante arbitrária, obtendo-se

$$\int e^x \sin(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C\,.$$

Esta técnica permite primitivar muitas funções desta classe (produto duma exponencial por um seno ou coseno). Há contudo duas observações importantes a fazer.

Em primeiro lugar, observe-se que se poderia ter chegado ao mesmo resultado invertendo a escolha da função a primitivar, ou seja, derivando a exponencial e primitivando a função trigonométrica. Em geral, opta-se por primitivar a exponencial para minimizar as hipóteses de erros de sinais.

Em segundo lugar, é importante que a escolha de qual função derivar seja a mesma nas duas aplicações da primitivação por partes. De facto, se tivéssemos invertido a escolha no segundo passo, iríamos essencialmente inverter todo o raciocínio inicial, chegando à relação $\int e^x \sin(x)\,dx = \int e^x \sin(x)\,dx$, da qual não conseguiríamos obter qualquer conclusão.

Exemplo. Usemos a mesma técnica para calcular as primitivas de $e^{-2x+1}\cos(3x+\pi)$.

$$\int \underbrace{e^{-2x+1}}_{f'}\underbrace{\cos(3x+\pi)}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{e^{-2x+1}}{-2}}_{f}\underbrace{\cos(3x+\pi)}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{-2x+1}}{-2}}_{f}\underbrace{(-3\sin(3x+\pi))}_{g'}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) - \frac{3}{2}\int \underbrace{e^{-2x+1}}_{f'}\underbrace{\sin(3x+\pi)}_{g}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) - \frac{3}{2}\left(\underbrace{\frac{e^{-2x+1}}{-2}}_{f}\underbrace{\sin(3x+\pi)}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{-2x+1}}{-2}}_{f}\underbrace{3\cos(3x+\pi)}_{g'}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) + \frac{3}{4}e^{-2x+1}\sin(3x+\pi) - \frac{9}{4}\int e^{-2x+1}\cos(3x+\pi)\,dx$$

Note-se a importância, neste exemplo, de passar as constantes para fora da primitiva para obter a função inicial. Designando novamente por $F(x)$ uma primitiva de $e^{-2x+1}\cos(3x+\pi)$, obtemos a equação

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) + \frac{3}{4}e^{-2x+1}\sin(3x+\pi) - \frac{9}{4}F(x)$$

donde

$$\frac{13}{4}F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) + \frac{3}{4}e^{-2x+1}\sin(3x+\pi)$$

e portanto

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) + \frac{3}{4}e^{-2x+1}\sin(3x+\pi)\right)\\ &= -\frac{2}{13}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) + \frac{3}{13}e^{-2x+1}\sin(3x+\pi)\end{aligned}$$

donde

$$\int e^{-2x+1}\cos(3x+\pi)\,dx = -\frac{2}{13}e^{-2x+1}\cos(3x+\pi) + \frac{3}{13}e^{-2x+1}\sin(3x+\pi) + C\,.$$

O mesmo raciocínio permite tratar o caso do produto de senos e/ou cosenos com argumentos diferentes.

Exemplo. Calcular as primitivas de $\sin(2x)\sin(3x+\pi)$.

$$\int \underbrace{\sin(2x)}_{f'}\underbrace{\sin(3x+\pi)}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{f}\underbrace{\sin(3x+\pi)}_{g} - \int \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{f}\underbrace{3\cos(3x+\pi)}_{g'}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(3x+\pi) + \frac{3}{2}\int \underbrace{\cos(2x)}_{f'}\underbrace{\cos(3x+\pi)}_{g}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(3x+\pi) + \frac{3}{2}\left(\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_{f}\underbrace{\cos(3x+\pi)}_{g} - \int \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}}_{f}\underbrace{(-3\sin(3x+\pi))}_{g'}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(3x+\pi) + \frac{3}{4}\sin(2x)\cos(3x+\pi) + \frac{9}{4}\int \sin(2x)\sin(3x+\pi)\,dx$$

Designando por $F(x)$ uma primitiva de $\sin(2x)\sin(3x+\pi)$, obtemos a equação

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(3x+\pi) + \frac{3}{4}\sin(2x)\cos(3x+\pi) + \frac{9}{4}F(x)$$

donde

$$-\frac{5}{4}F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(3x+\pi) + \frac{3}{4}\sin(2x)\cos(3x+\pi)$$

e portanto

$$F(x) = \frac{2}{5}\cos(2x)\sin(3x+\pi) - \frac{3}{5}\sin(2x)\cos(3x+\pi)$$

donde

$$\int \sin(2x)\sin(3x+\pi)\,dx = \frac{2}{5}\cos(2x)\sin(3x+\pi) - \frac{3}{5}\sin(2x)\cos(3x+\pi) + C\,.$$

Exercício 20. Primitive as seguintes funções.

(a) $e^{\frac{x}{2}}\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\frac{\cos(3x)}{\sqrt{e^x}}$ (c) $\sin(x)\cos(x)\cos(3x)$

4.6.4 Miscelânea

Para além destas situações típicas, há casos isolados em que é necessário recorrer à primitivação por partes. Para decidir qual das funções primitivar e qual derivar, há uma mnemónica simples: deve-se derivar a primeira função que ocorre na sigla LIATE.

Logaritmos
Inversas de trigonométricas
Algébricas
Trigonométricas
Exponenciais

Claro que esta regra só pode ser utilizada no caso em que ambas as funções são primitiváveis. Vejamos alguns exemplos de aplicação de primitivação por partes.

Exemplo.

1. Calcular as primitivas de $\log^2(x)$.

   Aqui a situação é completamente simétrica, já que a função é o produto de $\log(x)$ por si própria. Tomando $f(x) = \log(x) = g'(x)$, temos $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x(\log(x)-1)$ (calculada na página 226).

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\log(x)}_{f}\underbrace{\log(x)}_{g'}\,dx &= \log(x)x(\log(x)-1) - \int \frac{1}{x}x(\log(x)-1)\,dx \\ &= x\log^2(x) - x\log(x) - \int \log(x)\,dx + \int dx \\ &= x\log^2(x) - x\log(x) - x(\log(x)-1) + x + C \\ &= x\log^2(x) - 2x\log(x) + 2x + C\end{aligned}$$

2. Calcular as primitivas de $\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$.

   Neste caso convém começar por aplicar a substituição $\sqrt{x} = t$ para simplificar a função a primitivar (embora se possa aplicar directamente primitivação por partes). Obtém-se então $x = t^2$, donde $dx = 2t\, dt$, e portanto

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\, dx &= \int \underbrace{2t^2}_{f}\underbrace{\sin(t)}_{g'}\, dt \\ &= -2t^2\cos(t) - \int \underbrace{-4t}_{f}\underbrace{\cos(t)}_{g'}\, dt \\ &= -2t^2\cos(t) - \left(-4t\sin(t) - \int -4\sin(t)\, dt\right) \\ &= -2t^2\cos(t) + 4t\sin(t) - 4\cos(t) + C \\ &= -2x\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - 4\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Exercício 21. Primitive as seguintes funções.

(a) $\frac{\log|x|}{1+x^2}$ (b) $\cos(2x)\log|\tan(x)|$ (c) $\frac{x^7}{(1+x^4)^2}$ (d) $\sin(x)\log|\cos(x)|$

As aplicações práticas da primitivação são diversas. No próximo capítulo discutem-se algumas das mais importantes.

4.7 Exercícios

22. Mostre que a função F tal que $F(x) = \arctan(x^2)$ é uma primitiva de f definida por

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^4}\,.$$

   Determine a primitiva de f que toma o valor 1 quando $x = 0$.

23. As funções definidas pelas expressões seguintes são todas primitivas imediatas. Calcule as suas primitivas.

   (a) $\tan(x)\log|\cos(x)|$
   (b) $2x + 10$
   (c) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
   (d) $-\frac{2}{x^2}$
   (e) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$
   (f) $\frac{x-1}{x^2-1}$
   (g) e^{3x+1}
   (h) $x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}}$
   (i) $\frac{(\log|x|+1)^2}{x}$
   (j) $\frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$
   (k) $\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}$
   (l) $\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$
   (m) $\sin(3x+1)$
   (n) $\frac{1}{x\sqrt{1-(\log|x|)^2}}$
   (o) $3x\cos\left(2x^2\right)$
   (p) $\frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}$
   (q) $\frac{1}{x^2+2x+3}$
   (r) $\frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$
   (s) $\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$
   (t) $5x + x^2$
   (u) $x^2 + x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$
   (v) $\frac{1}{x^2+4x+4}$
   (w) $(2x+1)e^{x^2+x}$
   (x) $\frac{2x+2}{2x^2+4x+6}$
   (y) $\left(\sin^3(x) + \sin^4(x)\right)\cos^3(x)$
   (z) $\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$

24. Encontre funções satisfazendo as condições seguintes.

(a) $\begin{cases} f'(x) = 3\sqrt{x-1} - 2 \\ f(2) = 5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4-3x^2}} \\ f(-1) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'(x) = \sin^3(x) \\ f(2\pi) = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-3} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x(\log|x|)^2} \\ f(e) = 1 \end{cases}$

25. Calcule as primitivas das seguintes funções racionais.

(a) $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ (d) $\frac{2x}{(x-2)^2}$ (g) $\frac{5x^2-2x}{x^3-4x}$ (j) $\frac{3x-6}{x^2-4x+3}$

(b) $\frac{1}{x-2}$ (e) $\frac{2x}{x^2+x+1}$ (h) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ (k) $\frac{3}{x^2}$

(c) $\frac{2x}{x^2-2}$ (f) $\frac{x^5}{x^2-1}$ (i) $\frac{-x^3+x^2-1}{x^3+2x}$ (l) $\frac{x^4+2x^3+4x^2-2x}{(x-1)(x^2+2)^2}$

26. Encontre funções satisfazendo as condições seguintes.

(a) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2}{x+9} \\ D_f =]-9,+\infty[\\ f(1) = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \\ D_f =]1,+\infty[\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2}{1+x^6} \\ D_f = \mathbb{R} \\ f(1) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2}{x^2+x+\frac{1}{4}} \\ D_f = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\\ f(2) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x} \\ D_f =]-1,+\infty[\\ f(0) = 3 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x+5}{x^2-2x+2} \\ \dim f = \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

27. Use substituições adequadas para calcular primitivas das funções seguintes.

(a) $\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$ (c) $\frac{(\log|x|)^4+(\log|x|)^3}{x(\log|x|+1)}$ (e) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x^4}\right)}$

(b) $\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ (d) $x^2\sqrt{1-x^2} + 3\arcsin(x)$ (f) $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

28. Encontre funções satisfazendo as condições seguintes.

(a) $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \\ D_f =]0,+\infty[\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f'(x) = \cos\sqrt{x} \\ D_f = [0,+\infty[\\ f(0) = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} \\ D_(f) = \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\\ f(0) = -1 \end{cases}$

29. Recorra à técnica de primitivação por partes para encontrar primitivas das seguintes funções.

(a) $(x^3+2x+4)\log|x|$ (e) $(3x^2+2)\,e^x$ (i) $x\arctan(x)$

(b) $x^2\log(x^2)$ (f) $\cos(\log|x|)$ (j) $e^x(e^x+x)$

(c) $3^x\cos(x)$ (g) $\cos^3(x)$ (k) $\frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) xe^{2x+1} (h) $\frac{x^7}{(1-x^4)^2}$ (l) $2x\sin(x)$

30. Encontre funções satisfazendo as condições seguintes.

(a) $\begin{cases} f'(x) = x\sin(2x) \\ D_f = \mathbb{R} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x}{\cos^2(x)} \\ D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ f(1) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f'(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{e^x}} \\ D_f = \mathbb{R} \\ f(\log 2) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f'(x) = \log\left(x^2+1\right) \\ D_f = \mathbb{R} \\ f(1) = \sqrt{3} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} f'(x) = \left(x^2+x\right)e^{5x} \\ D_f = \mathbb{R} \\ f\left(\frac{1}{5}\right) = e \end{cases}$

(f) $\begin{cases} f'(x) = \left(x^4+3x\right)\log(x) \\ D_f =]0, +\infty[\\ f(1) = 2 \end{cases}$

31. Calcule as primitivas das seguintes funções recorrendo à(s) técnica(s) mais convenientes.

(a) $\frac{(\log|2x+3|)^2}{x}$

(b) $\log|x|e^x$

(c) $\frac{2}{x^2+1}$

(d) $\frac{3\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}$

(e) $\frac{5\sin(x)\tan(x)-2\sin(x)+3\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$

(f) $\frac{3}{x}$

(g) $\frac{2x+1}{x^2+x}$

(h) $x\sin(2x^2)e^{-x^2}$

(i) $(\log|x|)^3$

(j) x^4+3x-1

(k) $\frac{1}{x^2+x}$

(l) $\frac{2x^2-2x+2}{x^3-x}$

(m) $2\left(\tan^2(x)+1\right)\left(\tan(x)+1\right)$

(n) $\frac{3x+1}{2+x^4}$

(o) $\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$

(p) $x\left(1+x^2\right)\arctan(x)$

(q) $\sqrt{x}\log|x|$

(r) $\frac{1}{(x-2)^2}$

(s) $\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)+2\cos^2(x)}$

(t) $\frac{3}{(x+1)^2}$

(u) $\frac{1}{2x}$

(v) $\left(x^2+1\right)\cos(x)$

(w) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

(x) $\left(\sin^3(x)+\sin^4(x)\right)\cos(x)$

32. Encontre funções satisfazendo as condições seguintes, indicando o domínio em que estão definidas.

(a) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x+5} \\ f(0) = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'(x) = \frac{\sin x}{2+3\cos x} \\ f(\pi) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{3x^2+12x-6}} \\ f(1) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f'(x) = \frac{\log(\log(x))}{x\log(x)} \\ f(e) = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2}{x^3-1} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} f'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \\ f(0) = -\frac{1}{e} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} f'(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} f'(x) = x^3e^{x^2} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} f'(x) = e^x\cos\left(e^x\right) \\ f(\log(\pi)) = 2 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} f'(x) = x\left(x^2-1\right)^2 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} f'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}+3}}{\sqrt{x}} \\ f(4) = -2 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} f'(x) = e^{2x}\sin(3x) \\ f(0) = 2 \end{cases}$

(n) $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2-x^2}} \\ f(1) = 1 \end{cases}$

(o) $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \\ f(1) = -1 \end{cases}$

33. Calcule as primitivas das seguintes funções recorrendo à(s) técnica(s) mais convenientes.

(a) $\frac{2x+1}{2x^2+1}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

(c) $\frac{3}{2x^2+4}$

(d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$

(e) xe^{-x^2}

(f) $\frac{2\log|x|}{x}$

(g) $(3x^3-5x)\,e^{2x^2}$

(h) $(x^2+1)\sqrt{x^3+3x}$

(i) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$

(j) $\frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2+2}$

(k) $\frac{2}{x^2+4x+4}$

(l) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

(m) $\sin(x)e^{\cos(x)}$

(n) $\sin^2(x)\cos^2(x)$

(o) $3x\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

(p) $2\sqrt{x}$

(q) $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$

(r) $\frac{3(\log(x))^2+2\log(x)+3}{x\log(x)\left((\log(x))^2+1\right)x}$

(s) $\frac{2}{x^2-1}$

(t) $\cos^4(x)$

34. Calcule uma primitiva de

$$\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}+\frac{\sin(3x)}{1+\cos(3x)}+\frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$$

35.

(a) Primitive a função f definida por

$$f(x)=\frac{3x^2+7}{(x^2+4)(x^2-1)}.$$

(b) Calcule a primitiva F_1 de f que satisfaz $F_1(0)=1$.

(c) Calcule a primitiva F_2 de f que satisfaz $\lim_{x\to+\infty}F_2(0)=\frac{\pi}{2}$.

36. Determine a função f tal que $f''(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$ e o gráfico de f passa pela origem, onde é tangente ao eixo horizontal.

Capítulo 5

Cálculo Integral

Neste capítulo, vamos estudar o problema da determinação de áreas de figuras planas, formulado em termos de áreas sob gráficos de funções. Um dos primeiros resultados que teremos oportunidade de demonstrar permite resolver este problema de forma sistemática recorrendo ao cálculo de primitivas — ilustrando a importância e utilidade do estudo que fizemos no capítulo anterior.

O Cálculo Integral tem, contudo, inúmeras aplicações práticas que vão bastante além do cálculo de áreas. Nos exemplos ao longo do texto, mostraremos como muitos problemas do dia-a-dia, de áreas bastante distintas, podem ser formulados como problemas de cálculo de áreas e resolvidos através dum integral.

5.1 Áreas de figuras planas

Um dos problemas mais antigos da Geometria é a determinação de áreas de figuras, motivado originalmente pela necessidade de dividir terrenos (por questões de partilhas e heranças) cuja forma não era uma figura regular, devido quer a fenómenos naturais (como o serem limitados por rios, por exemplo), quer devido a partilhas anteriores. Assim, já desde a Antiguidade que vários estudiosos se debruçaram sobre o problema de determinar áreas de figuras regulares e de construir figuras com determinadas áreas; alguns desses problemas ficaram célebres (como o problema da quadratura do círculo ou o problema da duplicação do cubo, ambos demonstrados irresolúveis no século XIX), outros tornaram-se parte da formação básica do mundo ocidental (como o cálculo da área dum quadrado, dum rectângulo ou dum círculo).

Nesta secção vamos discutir o problema do cálculo de áreas de figuras limitadas por gráficos de funções, ou seja: figuras limitadas pelo eixo horizontal entre dois pontos a e b, pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, e pelo gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$, como exemplificado na Figura 5.1. Para já, exigiremos ainda que a função f seja não negativa nesse intervalo, ou seja, $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$.

À área duma figura destas chamamos *integral definido* da função f entre os pontos a e b, que denotaremos por

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

A segunda notação é de longe a mais utilizada, nomeadamente quando estamos interessados em efectuar cálculos, sendo a primeira (mais sintética) útil em contextos mais teóricos. No símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ a variável x é, como habitualmente, um símbolo auxiliar para representar

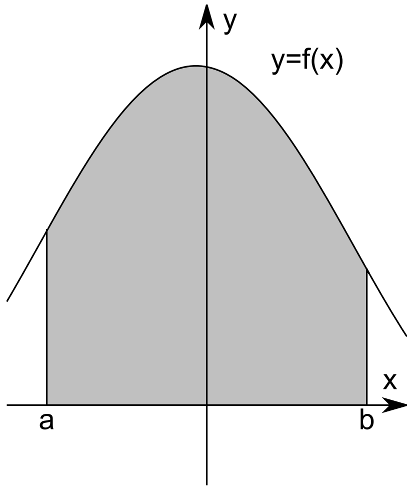


Figura 5.1: Figura plana limitada pelo gráfico duma função.

o parâmetro da função — poderíamos escrever com o mesmo sentido qualquer das variantes

$$\int_a^b f(t)\,dt\,,\int_a^b f(y)\,dy \text{ ou mesmo } \int_a^b f(*)\,d*\ .$$

Para já, não nos vamos preocupar com a questão de saber para que funções é que faz sentido falar de integral definido. Quando dermos uma definição formal deste conceito, ficaremos em condições de responder a esta pergunta.

A Figura 5.2 mostra algumas figuras deste estilo. Na figura (a), a função f tem a expressão

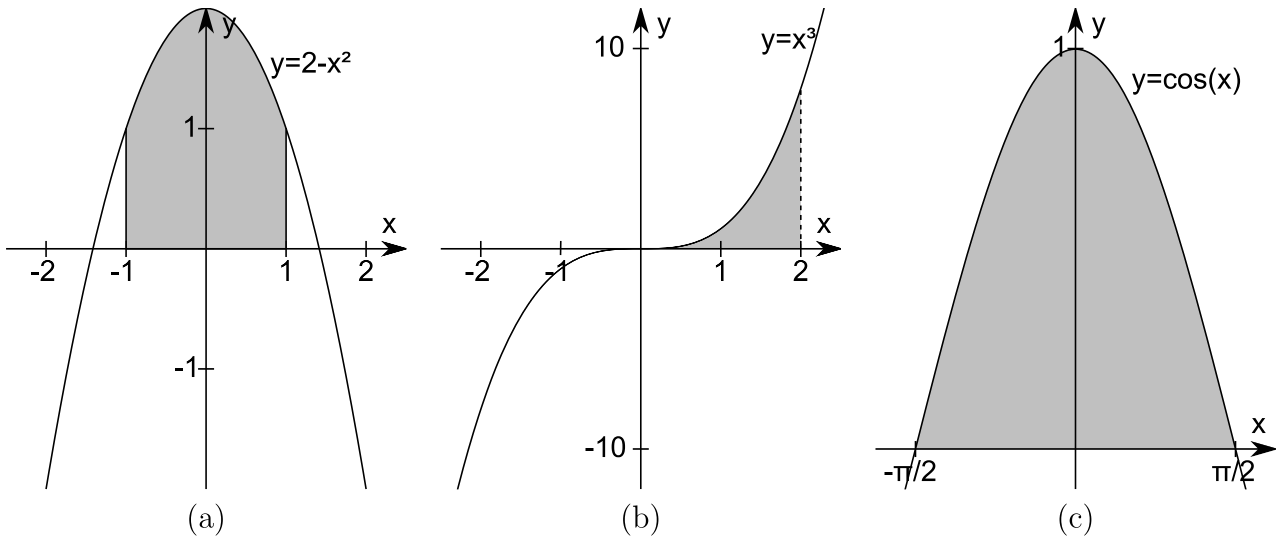


Figura 5.2: Exemplos de integrais definidos.

$f(x) = 2 - x^2$, pelo que a área a sombreado pode ser denotada por qualquer das expressões

$$\int_{-1}^1 \left(2-x^2\right)\,dx\,,\int_{-1}^1 \left(2-y^2\right)\,dy \text{ ou } \int_{-1}^1 \left(2-*^2\right)\,d*\,,$$

enquanto a função f da figura (b) tem a expressão $f(x) = x^3$, podendo a área a sombreado ser denotada por

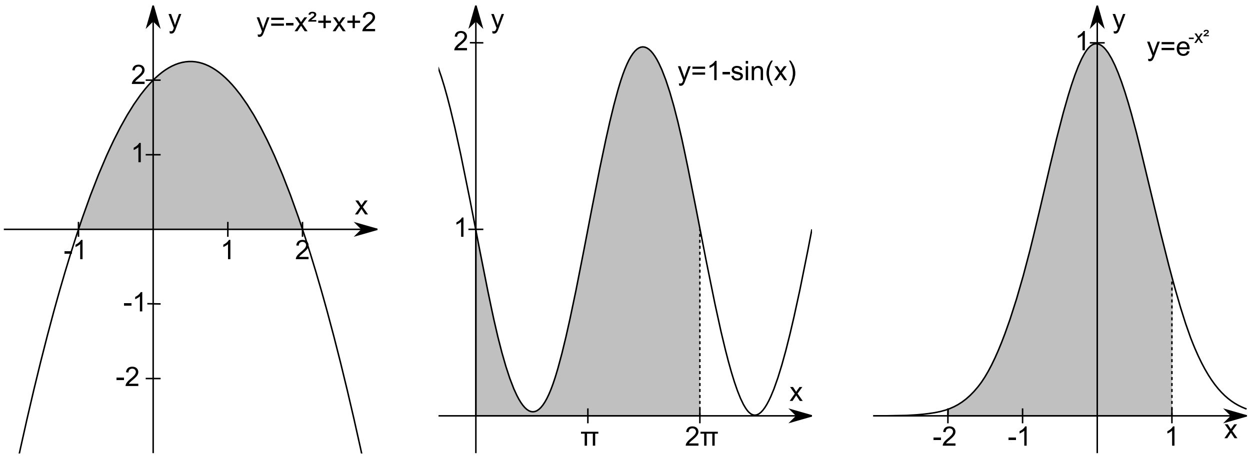
$$\int_0^2 x^3\,dx\,,\int_0^2 t^3\,dt \text{ ou } \int_0^2 \bullet^3\,d\bullet\ .$$

Na terceira figura, a expressão da função f é $f(x) = \cos(x)$ e área a sombreado pode ser expressa como

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx\,, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega)\, d\omega \text{ ou } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z)\, dz\,.$$

Em geral, seguiremos a prática corrente e utilizaremos predominantemente as variáveis x e t como variáveis mudas do integral definido; em casos particulares, contudo, poderemos recorrer a outras notações que sejam mais adequadas no contexto.

Exercício 1. Escreva as áreas das figuras abaixo como integrais definidos.



(a) (b) (c)

Se c for um ponto em $[a, b]$, então o integral entre a e b é igual à soma dos integrais de f em $[a, c]$ e em $[c, b]$:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

De facto, não estamos a afirmar senão que dividindo uma figura ao meio obtemos duas figuras cuja área total é igual à área da figura original. Esta observação, contudo, é útil quando a função f é definida por ramos: permite-nos escrever o integral de f como uma soma de integrais, cada um definido pela sua expressão. Esta situação está ilustrada na Figura 5.3.

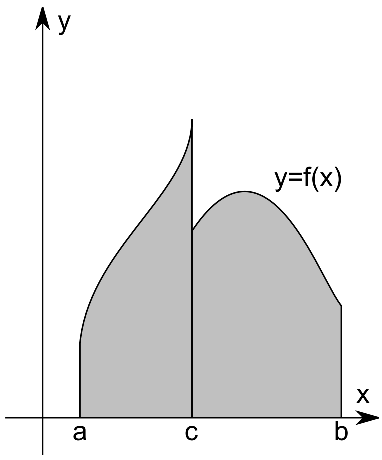
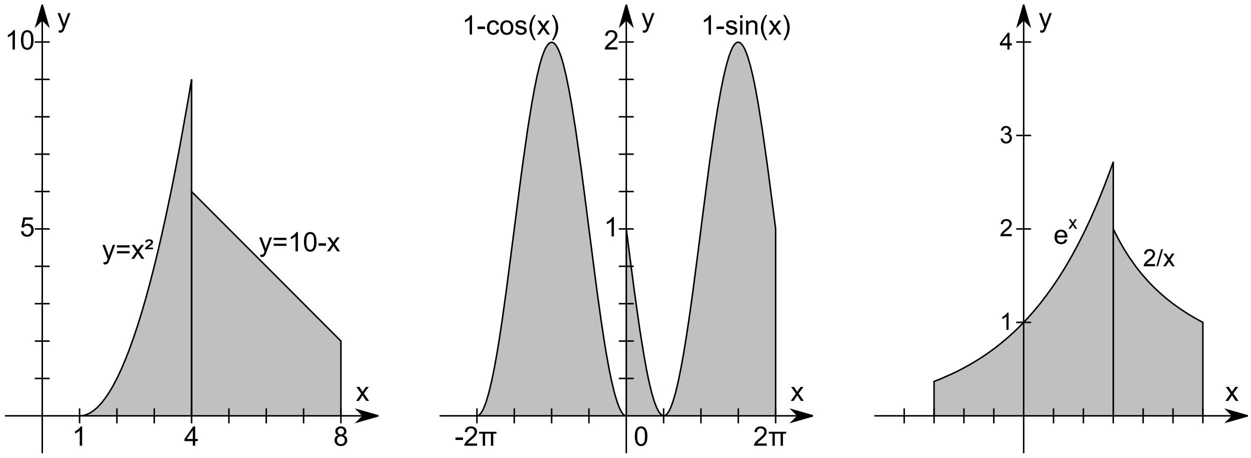


Figura 5.3: Integral duma função com uma descontinuidade.

Exercício 2. Escreva as áreas das figuras abaixo como integrais definidos, tendo o cuidado de separar a função que limita superiormente cada figura nos seus pontos de descontinuidade.



(a) (b) (c)

5.2 Definição analítica do integral definido

Até agora, o integral definido é simplesmente uma notação. O próximo passo é ver como podemos defini-lo formalmente e atribuir-lhe um valor — embora, como veremos mais tarde, esta definição não nos forneça uma forma muito prática de efectuar os cálculos em situações concretas.

Praticamente todas as técnicas de cálculo de áres se baseiam no conceito de limite, recorrendo a aproximações sucessivas. Por exemplo, os primeiros valores para áreas de círculos foram obtidas considerando polígonos regulares com cada vez mais lados (quadrado, pentágono, hexágono, etc.). A ideia é que, intuitivamente, quanto mais lados o polígono tiver, mais próxima a figura geométrica está do círculo e mais próxima é a sua área da do círculo.

Para o cálculo integral, a técnica que vamos utilizar é extremamente simples e recorre unicamente à divisão de figuras em rectângulos. A área dum rectângulo (Figura 5.4 (a))é extremamente simples de calcular: um rectângulo de base b e altura h tem uma área $b \times h$ — é aliás esta uma das motivações para introduzir a operação de multiplicação entre números reais. Se tivermos uma figura que não seja um rectângulo, mas se consiga decompor em vários rectângulos (Figura 5.4 (b)) também podemos calcular a sua área somando as áreas dos vários rectângulos que a compõem.

O problema surge quando temos uma figura que *não* se pode decompor em rectângulos. Aqui, esta técnica não nos permite calcular a sua área exacta; porém, se decompusermos a figura aproximadamente em rectângulos, podemos obter um valor aproximado, que será tanto mais exacto quanto menor for a diferença entre a figura e a sua decomposição. Intuitivamente, quanto mais pequenos forem os rectângulos, menor será este erro (Figura 5.5).

Outra alternativa é cobrir a figura de rectângulos, obtendo uma aproximação por excesso da sua área. Neste caso, quanto mais pequenos forem os rectângulos, melhor será a aproximação — mas agora o erro é por excesso (Figura 5.6).

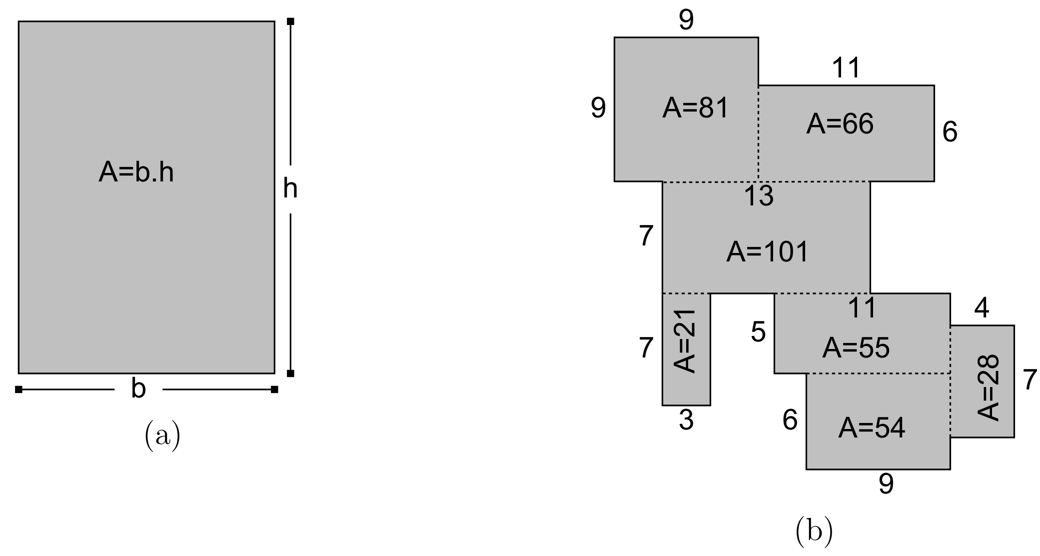


Figura 5.4: Área dum rectângulo (a) e duma figura que se decompõe em rectângulos (b).

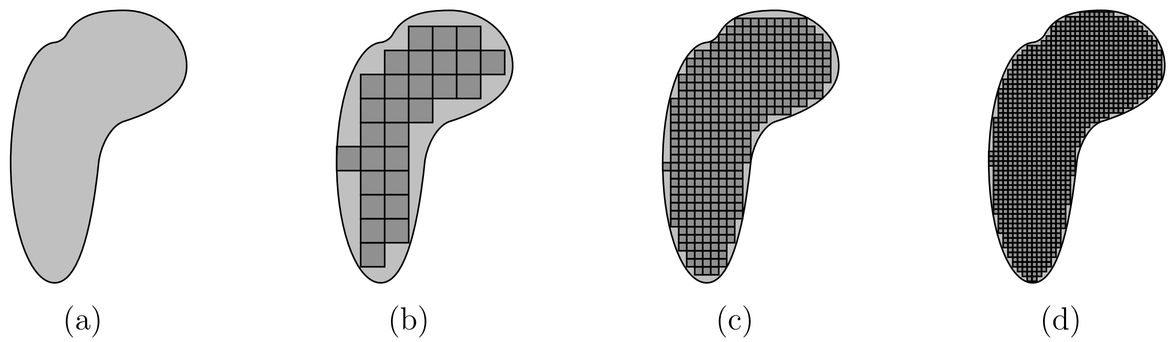


Figura 5.5: Decomposição aproximada duma figura em rectângulos. Na figura (b), os rectângulos são quadrados de lado 1 (e portanto de área 1) e a figura contém 28 quadrados, pelo que o valor da sua área é aproximadamente 28. Nas figuras (c) e (d), os quadrados têm lado respectivamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, sendo as suas áreas $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{25}$; as aproximações contêm, respectivamente, 343 e 1053 quadrados, sendo o valor aproximado da área 38.11 e 42.12.

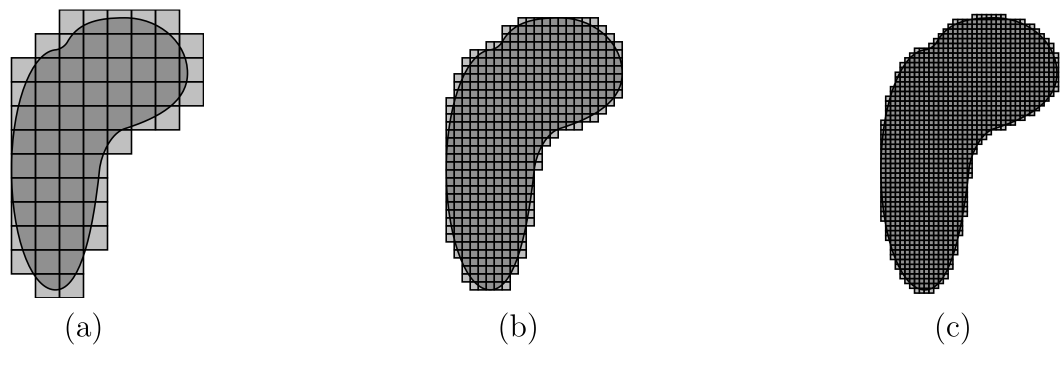


Figura 5.6: Decomposição por excesso duma figura em rectângulos. Na figura (a), os rectângulos são novamente quadrados de lado 1 (e portanto de área 1) e a figura é coberta por 62 quadrados, pelo que o valor da sua área é aproximadamente 62. Nas figuras (b) e (c), os quadrados têm lado respectivamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, sendo as suas áreas $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{25}$; as aproximações contêm, respectivamente, 443 e 1216 quadrados, sendo o valor aproximado da área 49.22 e 48.64.

Observe-se que os valores das aproximações vão convergindo. A decomposição em quadrados de lado $\frac{1}{5}$ permite-nos dizer que a área da figura está entre 42.12 e 48.64; tomando quadrados (ou rectângulos) mais pequenos, obteríamos aproximações mais e mais precisas.

No caso duma figura limitada superiormente pelo gráfico duma função, podemos fazer esta divisão de forma sistemática. Começamos por dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos; e aproximamos em cada um deles o gráfico de f por uma recta. Para que os rectângulos obtidos estejam todos contidos na área a medir, a altura de cada um deles deve corresponder ao menor valor de f nesse intervalo (Figura 5.7 (a) a (c)); para que contenham a área a medir, a sua altura deve corresponder ao maior valor de f nesse intervalo (Figura 5.7 (d) a (f)).

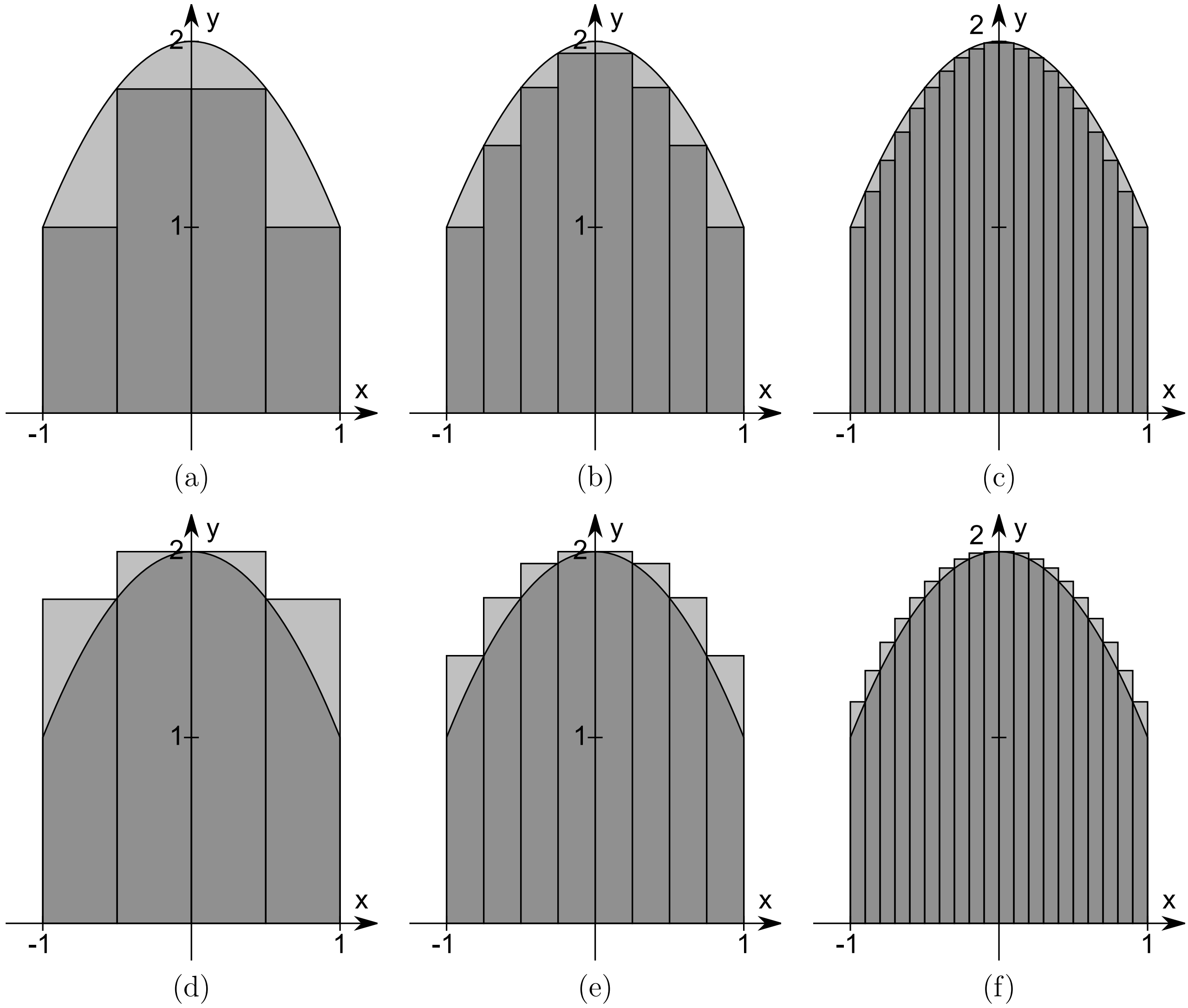


Figura 5.7: Aproximação da área sob o gráfico de f por rectângulos, obtidos dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos e aproximando f por rectas. Neste caso, $f(x) = 2 - x^2$ e o intervalo é o intervalo $[-1, 1]$; na figura (a) os subintervalos têm comprimento $\frac{1}{2}$, na figura (b) têm comprimento $\frac{1}{4}$, e na figura (c) têm comprimento $\frac{1}{10}$. As áreas aproximadas são, respectivamente, 2.75, 3.0625 e 3.23. Nas figuras (d), (e) e (f), os subintervalos têm os mesmos comprimentos, mas as alturas dos rectângulos correspondem ao máximo de f em cada subintervalo, pelo que os valores aproximados da área são, respectivamente, 3.75, 3.5625 e 3.43. O valor exacto da área é $\frac{10}{3} \approx 3.33$.

Definição. Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é uma sequência $P = x_0, x_1, \ldots, x_n$ de pontos tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. O *diâmetro* da partição P, $\delta(P)$, é o maior dos valores $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$.

Exemplo. Nos exemplos da Figura 5.7, as partições utilizadas são as seguintes.

$$\begin{aligned}
P_a &= -1, -0.5, 0, 0.5, 1 \\
P_b &= -1, -0.75, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 \\
P_c &= -1, -0.9, -0.8, -0.7, \ldots, 0.7, 0.8, 0.9, 1
\end{aligned}$$

O diâmetro de P_a é $\delta(P_a) = \frac{1}{2}$, o de P_b é $\delta(P_b) = \frac{1}{4}$ e o de P_c é $\delta(P_c) = \frac{1}{10}$.

Observe-se contudo que poderíamos ter escolhido partições cujos pontos não fossem igualmente espaçados. As seguintes sequências também são partições do intervalo $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned}
P_1 &= -1, -0.8, -0, 3, 0.6, 1 \\
P_2 &= -1, -0.9, -0.6, -0, 2, 0.4, 1 \\
P_3 &= -1, 0, 0.2, 0.5, 1
\end{aligned}$$

Exercício 3. Determine o diâmetro das partições P_1, P_2 e P_3 acima e utilize-as para calcular aproximadamente a área sombreada na Figura 5.7.

Dada uma partição, podemos calcular um valor aproximado por defeito da área sob o gráfico de f escolhendo em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ o ponto x_i^- onde f toma o valor mínimo e podemos calcular um valor aproximado por excesso da mesma área escolhendo o ponto x_i^+ onde f toma o valor máximo.

Definição. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, $P = x_0, x_1, \ldots, x_n$ uma partição de $[a, b]$, $x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-$ os pontos de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ onde f atinge o valor mínimo nesse intervalo, e $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+$ os pontos onde f atinge o valor máximo nos mesmos intervalos. A *soma inferior* de f associada à partição P é a soma

$$S_{\min}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f\left(x_i^-\right)$$

das áreas dos rectângulos que têm por base os segmentos entre pontos consecutivos da partição P e por altura os valores mínimos da função nesses intervalos. A *soma superior* de f associada à partição P é a soma

$$S_{\max}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f\left(x_i^+\right)$$

das áreas dos rectângulos que têm por base os segmentos entre pontos consecutivos da partição P e por altura os valores máximos da função nesses intervalos.

Por outras palavras, as somas inferiores são as áreas assinaladas com o sombreado mais escuro da Figura 5.7 (a) a (c) e as somas superiores são as áreas assinaladas com o sombreado mais escuro da mesma figura (d) a (f).

Se a função f for contínua, sabemos que podemos escolher um valor δ e encontrar ε tal que $|f(x) - f(y)| < \delta$ sempre que $|x - y| < \varepsilon$. Se P for uma partição com diâmetro $\delta(P) < \varepsilon$, então as somas $S_{\min}(f,P)$ e $S_{\max}(f,P)$ estão bastante próximas uma da outra: a variação de altura de cada rectângulo é a diferença entre o máximo e o mínimo de f nesse intervalo, que é no máximo δ; então a diferença máxima entre as duas somas $S_{\min}(f,P)$ e $S_{\max}(f,P)$ é $\delta(b-a)$, correspondendo à soma das áreas de todos os rectângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura δ para $i = 1,\ldots,n$. Concluimos assim que esta variação tende para 0 quando $\delta P \to 0$.

Por outro lado, um argumento geométrico mostra que, se P' tiver mais pontos do que P, então $S_{\min}(f,P') \geq S_{\min}(f,P)$ e $S_{\max}(f,P') \leq S_{\max}(f,P)$, visto que o máximo e o mínimo de f em cada intervalo de P' estão limitados pelos mesmos valores no intervalo correspondente de P (Figura 5.8).

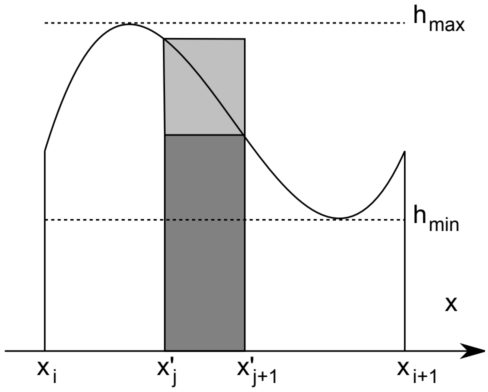


Figura 5.8: O máximo e mínimo de f num intervalo da partição P' estão entre o máximo e mínimo de f no intervalo correspondente da partição P. Os pontos x'_j e x'_{j+1} são pontos de P', os pontos x_{i-1} e x_i são os pontos de P que definem um intervalo contendo $\left[x'_{j-1}, x'_j\right]$.

Proposição. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa. Então

$$\lim_{\delta(P)\to 0} S_{\min}(f,P) = \lim_{\delta(P)\to 0} S_{\max}(f,P) = \int_a^b f\,,$$

ou seja, quando o diâmetro das partições de $[a,b]$ tende para zero, as somas correspondentes convergem para o valor da área limitada pelo eixo horizontal, pelas rectas $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico de f.

Temos assim uma primeira propriedade que nos permite calcular o valor do integral de f. Observe-se que, caso f seja limitada e contínua por troços em $[a,b]$, podemos decompor o intervalo $[a,b]$ nos troços onde f é contínua e calcular o seu integral como uma soma de integrais em cada um desses troços. O resultado anterior generaliza-se portanto para funções limitadas e contínuas por troços.

Embora haja funções f que para as quais aqueles limites não convergem para o mesmo valor (e portanto para as quais o valor de $\int_a^b f$ não está definido), estas não surgem em contextos comuns nas aplicações em que estamos interessados. Todas as funções obtidas por modelação de sistemas do mundo real (sistemas físicos, biológicos, económicos e estatísticos) são pelo menos contínuas por troços.

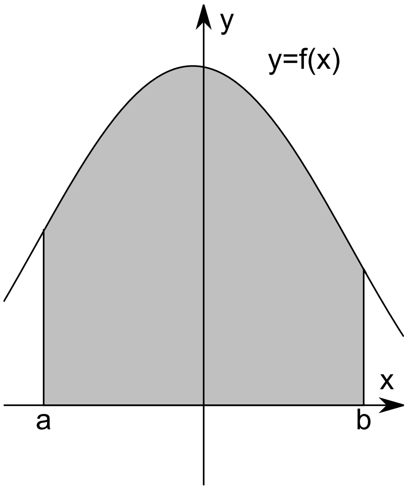
Analiticamente, é prática corrente usar a convergência do limite acima como definição de integral e (procedendo de modo inverso) mostrar que corresponde à área sob o gráfico de f em $[a,b]$. Nesta exposição, preferiu-se usar o percurso inverso por forma a obter desde o início um significado geométrico claro para o símbolo de integral.

Na prática esta forma de calcular integrais é extremamente útil para obter valores numéricos de áreas: os métodos computacionais para o cálculo de integrais resumem-se em geral a dividir o intervalo $[a, b]$ num número suficientemente grande de pontos (para muitas aplicações, mil é suficiente) e a calcular uma soma $S_{\min}(f, P)$ ou $S_{\max}(f, P)$ (ou então escolhendo simplesmente um ponto aleatório x_i^* em cada intervalo).

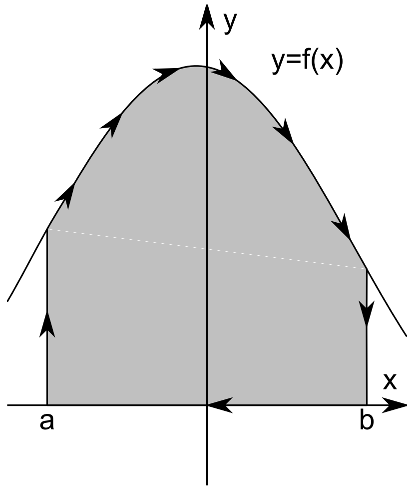
Contudo, para obter valores *exactos* de integrais definidos, aquela expressão é muito pouco prática. O próximo passo vai ser obter uma fórmula explícita para o cálculo de integrais recorrendo ao cálculo de primitivas. Para tal, vamos estudar algumas propriedades do integral que são consequência directa da definição.

Em primeiro lugar, observemos que a proposição anterior é aplicável a *qualquer* função contínua em $[a, b]$, e não apenas a funções que não tomem valores negativos. Se pensarmos em termos de partições e somas, vemos que, se $f(x) < 0$ para qualquer x em $[a, b]$, então o integral de f nesse intervalo é negativo. Como é que podemos dar sentido a esta afirmação?

De facto, o integral definido mede aquilo que é costume chamar uma área *orientada*. Pensemos novamente na Figura 5.1, reproduzida na Figura 5.9 (a). Se percorrermos a fronteira da figura de tal forma que o gráfico de f é percorrido de a para b (ver Figura 5.9 (b)), verificamos que a área que queremos medir está toda à direita da figura. Convenciona-se (por motivos relacionados com aplicações que veremos adiante) definir esta área como sendo uma área positiva, correspondendo à orientação positiva da figura.



(a)



(b)

Figura 5.9: Uma área orientada positivamente.

Por outro lado, se o gráfico de f estiver *abaixo* do eixo horizontal e percorrermos a fronteira da figura limitada por este gráfico, pelo eixo horizontal e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ (Figura 5.10), verificamos que a área a medir fica sempre à nossa esquerda. Dizemos então que esta área é negativa e atribuimos-lhe um valor negativo, sendo o seu módulo o da área (habitual) da figura.

Como consequência das propriedades elementares da soma, temos as seguintes propriedades do integral definido.

Proposição (Linearidade do integral)**.** Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e c um número real. Então verificam-se as duas propriedades seguintes.

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b f \qquad \int_a^b (c \times f) = c \int_a^b f$$

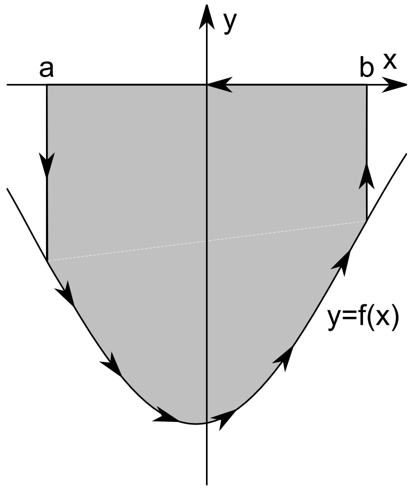


Figura 5.10: Uma área orientada negativamente.

Demonstração. A prova destas duas propriedades é muito simples. Pensando por exemplo em $\int_a^b (f+g)$, este pode ser calculado através do limite seguinte.

$$\int_a^b (f+g) = \lim_{\delta(P)\to 0} S_{\min}\left((f+g),P\right)$$

Expandindo a definição de $S_{\min}\left((f+g),P\right) Q$ e aplicando propriedades dos limites, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta(P)\to 0} S_{\min}\left((f+g),P\right) Q &= \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,(f+g)\left(x_i^-\right) \\
&= \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\left(f\left(x_i^-\right) + g\left(x_i^-\right)\right) \\
&= \lim_{\delta(P)\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f\left(x_i^-\right) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g\left(x_i^-\right) \right) \\
&= \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f\left(x_i^-\right) + \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g\left(x_i^-\right) \\
&= \int_a^b f + \int_a^b g\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, aplicando a definição de $\int_a^b (c\times f)$ e propriedades dos limites, temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (c\times f) = \lim_{\delta(P)\to 0} S_{\min}\left((c\times f),P\right) &= \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,(c\times f)\left(x_i^-\right) \\
= \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, cf\left(x_i^-\right) &= \lim_{\delta(P)\to 0} c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f\left(x_i^-\right) \\
= c \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f\left(x_i^-\right) &= c\int_a^b f\,.
\end{aligned}$$

□

Em particular, tomando $c = -1$, obtemos a relação $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$, que é coerente com a observação anterior relativa a áreas orientadas.

Outro caso particular importante é o caso de a função f ser constante, $f(x) = c$. Então, para qualquer partição P do intervalo $[a, b]$, os rectângulos considerados quer em $S_{\min}(f, p)$ quer em $S_{\max}(f, P)$ têm altura c; decorre daí automaticamente que

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)\,.$$

Consideremos agora a relação entre os extremos de integração. Até agora assumimos sempre implicitamente que se tem $a < b$; porém, não há necessidade de o fazer. Se pensarmos no significado geométrico de $\int_a^a f$, trata-se da área da figura por baixo do gráfico de f entre a e a — que é um segmento de recta vertical, tendo portanto área nula. Concluimos assim que

$$\int_a^a f = 0\,.$$

Por outro lado, se invertermos os extremos de integração (ou seja, se escrevermos $\int_b^a f$, com $a < b$) estamos ainda a considerar a área sob o gráfico de f, mas agora quando percorremos este gráfico partindo de b em direcção a a. Um pouco de reflexão mostra que isto corresponde a inverter o sentido da trajectória da fronteira, o que, conforme discutimos atrás, inverte a orientação da figura e troca portanto o sinal do valor da sua área (orientada). Temos assim que

$$\int_b^a f = -\int_a^b f\,.$$

Em qualquer destes casos, continua a verificar-se a seguinte relação.

Proposição. Seja f uma função contínua num intervalo contendo os três pontos a, b e c. Então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

Demonstração. Já verificámos esta relação para o caso $a < c < b$. No caso $a = c$, obtemos

$$\int_a^b f = \int_a^a f + \int_a^b f\,,$$

que é verdadeiro uma vez que $\int_a^a f = 0$; o caso $b = c$ é análogo. Finalmente, no caso $a < b < c$ sabemos que

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \iff \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^b f \iff \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

conforme queríamos demonstrar. O caso $c < a < b$ é análogo.

Se $b < a$ o raciocínio é idêntico, trocando os papéis de a e b. □

Esta proposição tem uma consequência muito simples, mas útil na prática: da relação $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, obtemos

$$\int_a^b f - \int_a^c f = \int_c^b f\,,$$

identidade que utilizaremos várias vezes no seguimento.

Outra propriedade cuja validade é muito simples de estabelecer geometricamente é o seguinte resultado.

Teorema (Teorema da Média)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e m, M dois números reais tais que $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer $x \in [a, b]$. Então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demonstração. Os valores $m(b-a)$ e $M(b-a)$ correspondem a $S_{\min}(f, P)$ e $S_{\max}(f, P)$ para a partição mais simples P que só contém os pontos a e b. Para qualquer outra partição P' tem-se (por P' ser mais fina do que P) que $S_{\min}(f, P') \geq S_{\min}(f, P)$ e $S_{\max}(f, P') \leq S_{\max}(f, P)$; sendo o valor do integral definido o limite daquelas sucessões quando $\delta(P') \to 0$, este estará necessariamente entre aqueles dois valores. □

Exercício 4. Mostre que $2 \leq \int_0^2 e^{x^2}\,dx \leq 2e^4$.

Teremos oportunidade de ver mais adiante como estas propriedades são usadas na prática no cálculo de integrais definidos. Para já, o seu interesse é essencialmente teórico, no sentido em que serão estas propriedades que nos permitirão finalmente encontrar uma regra de cálculo de integrais.

Para terminar esta secção, vamos apenas fazer uma referência a uma questão notacional. Na notação para o integral definido, o símbolo de integral ($\int$) e a denotação da variável de integração (tipicamente dx) funcionam como uma espécie de "parêntesis", no sentido em que marcam o início e o fim da função a integrar. Porém, é frequente (até por questões ligadas a algumas aplicações do integral, conforme discutiremos na Secção 5.5) ver o integral definido como uma soma de infinitas parcelas (um pouco à semelhança duma série), em que se "somam" as áreas de infinitos "rectângulos" com altura $f(x)$ e base dx. Dentro desta tradição, o símbolo dx é visto como uma parcela dum produto, sendo frequente fazer as simplificações habituais, nomeadamente quando a função a integrar é constante e igual a 1 ou uma fracção. Por exemplo,

$$\int_a^b 1\,dx \text{ abrevia-se para } \int_a^b dx$$
$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx \text{ abrevia-se para } \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$
$$\int_a^b \frac{2x}{x^2+1}\,dx \text{ abrevia-se para } \int_a^b \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

e assim por diante. Aliás, já utilizámos esta notação no contexto da primitivação, embora sem a justificar formalmente.

5.3 Integral indefinido e o Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta secção vamos mostrar a relação íntima existente entre o cálculo de integrais e o cálculo de primitivas. Para tal, vamos introduzir um conceito novo: o de integral indefinido.

Suponhamos que f é uma função integrável num intervalo I e seja a um ponto desse intervalo. Para cada valor $x \in I$, sabemos como dar sentido ao integral $\int_a^x f$ — vimos na secção anterior como interpretar os casos inicialmente não previstos em que $x = a$ ou $x < a$. Ora x é um número real e $\int_a^x f$ também; a regra de tranformação que associa a cada real x aquele integral definido é então uma função (de x), designada por integral indefinido de f.

Definição. Sejam I um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em I e $a \in I$. O *integral indefinido de f a partir de a* é a função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,.$$

Uma vez que o integral indefinido é função de x, é importante escolher uma variável diferente para a integração, para evitar ambiguidades. Observe-se ainda que escolhemos a mesma notação para o integral indefinido que usámos no capítulo anterior para designar primitivas. Veremos de imediato que esta escolha é perfeitamente justificada.

Dados dois pontos x e y, temos

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f\, dt - \int_a^y f = \int_y^x f\,,$$

pelo que $F(x) - F(y) \to 0$ quando $x \to y$. Temos assim o resultado seguinte.

Proposição. O integral indefinido de qualquer função é uma função contínua.

Sendo F uma função contínua, faz sentido tentar calcular a sua derivada. Por definição de derivada, temos que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h}\,.$$

Ora sendo m_h o valor mínimo de f entre x e $x+h$ e M_h o valor máximo de f no mesmo intervalo, sabemos do Teorema da Média que $m_h h \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq M_h h$. Concluimos então que

$$m_h \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h} \leq M_h\,;$$

mas se $h \to 0$, os valores de m_h e M_h tendem ambos para $f(x)$ (desde que f seja contínua no ponto x). Tem-se então

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h} = f(x)\,.$$

Dito de outra forma, $F'(x) = f(x)$.

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo I)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o integral indefinido de f é uma primitiva de f.

Este resultado tem duas consequências imediatas.

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo II)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então f é a derivada do integral indefinido de f.

Proposição. Toda a função contínua é primitivável.

Note-se que o Teorema Fundamental do Cálculo não refere explicitamente o ponto de origem do integral indefinido; de facto, qualquer ponto do intervalo I serve. Se tomarmos dois integrais indefinidos F_1 e F_2 com origem em pontos diferentes, por exemplo a_1 e a_2, temos que

$$F_1(x) - F_2(x) = \int_{a_1}^{x} f(t)\,dt - \int_{a_2}^{x} f(t)\,dt = \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt$$

é constante. Obtemos mais uma confirmação dum dos resultados do capítulo anterior, que dizia que duas primitivas da mesma função diferem por uma constante.

Por outro lado, sendo F o integral indefinido de x a partir dum ponto a, temos que

$$\int_{x}^{y} f(t)\,dt = \int_{x}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{y} f(t)\,dt = \int_{a}^{y} f(t)\,dt - \int_{a}^{x} f(t)\,dt = F(y) - F(x)\,.$$

Uma vez que o ponto a é arbitrário, esta fórmula é válida para *qualquer* integral indefinido de f; mais, é válida para qualquer primitiva de f, já que todas elas diferem entre si por uma constante. Se F^* for outra primitiva de f, temos que $F^*(x) = F(x) + C$, donde

$$F^*(y) - F^*(x) = (F(y) + C) - (F(x) + C) = F(y) - F(x)\,.$$

Obtemos daqui uma fórmula de cálculo para o integral definido.

Teorema (Regra de Barrow)**.** Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f nesse intervalo. Então

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Nesta fase, podemos finalmente calcular valores de integrais definidos.

Exemplo. Vamos agora calcular as áreas da Figura 5.2, que escrevemos anteriormente na forma de integral indefinido.

1. Vimos anteriormente que a área da Figura 5.2 (a) é dada pela expressão

$$\int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)\,dx\,.$$

   Ora a função $f(x) = 2 - x^2$ admite como primitiva a função $F(x) = 2x - \frac{x^3}{3}$; então temos que

$$\int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)\,dx = F(1) - F(-1) = \left(2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}\,.$$

2. Também vimos atrás que a área a sombreado na Figura 5.2 (b) é dada pela expressão

$$\int_{0}^{2} x^3\,dx\,.$$

   Uma primitiva de $f(x) = x^3$ é, por exemplo, $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Então temos que

$$\int_{0}^{2} x^3\,dx = F(2) - F(0) = 4 - 0 = 4\,.$$

3. Finalmente, no caso da Figura 5.2 (c), a área a sombreado é dada pela expressão

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx\,.$$

Uma primitiva de $f(x) = \cos(x)$ é, por exemplo, $F(x) = \sin(x)$. Então temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2\,.$$

Exercício 5. Considere novamente o Exercício 1. Calcule as áreas das figuras nas alíneas (a) e (b). Qual é o problema que surge com o cálculo da área da alínea (c)?

Exercício 6. Calcule as áreas das figuras do Exercício 2.

O Teorema Fundamental do Cálculo também nos permite calcular derivadas de funções mais complexas definidas como integrais indefinidos. Imaginemos que queríamos derivar a função g definida da seguinte forma.

$$g(x) = \int_{2x+1}^{x^3-1} \arctan(t)\, dt$$

O Teorema Fundamental do Cálculo só nos permite derivar funções da forma $\int_a^x f(t)\, dt$; precisamos então de escrever g nesta forma. Sendo $f(x) = 2x+1$ e $h(x) = x^3 - 1$, temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{f(x)}^{h(x)} \arctan(t)\, dt \\ &= \int_{f(x)}^{a} \arctan(t)\, dt + \int_{a}^{h(x)} \arctan(t)\, dt \\ &= \int_{a}^{h(x)} \arctan(t)\, dt - \int_{a}^{f(x)} \arctan(t)\, dt \end{aligned}$$

para qualquer ponto a para o qual os integrais indefinidos considerados façam sentido. Ora sendo $g_* = \int_a^x f(t)\, dt$ o integral indefinido de $\arctan(t)$, temos que o integral $\int_a^{h(x)} \arctan(t)\, dt$ é a composição de g_* com $h(x)$; então

$$g(x) = g_*(h(x)) - g_*(f(x))\,,$$

donde pela regra da cadeia obtemos

$$g'(x) = g_*'(h(x))h'(x) - g_*'(f(x))f'(x) = \arctan\left(x^3 - 1\right) \times 3x^2 - \arctan(2x+1) \times 2\,.$$

Em geral, temos a seguinte relação.

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt\right)' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)\,.$$

Exercício 7. Para cada uma das seguintes funções, calcule a sua derivada e use o resultado obtido para determinar os seus máximos, mínimos e intervalos de monotonia.

(a) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}(t+3)\,dt$ (b) $G(x) = \int_0^x \frac{t^2-5t+6}{t-4}\,dt$ (c) $H(x) = \int_1^{2x} t\log(t)\,dt$

5.4 Cálculo de integrais

A secção anterior apresentou uma fórmula de cálculo para integrais definidos com base na regra de Barrow, que relaciona o integral definido de f com valores das primitivas de f.

Nesta secção vamos introduzir uma notação usada muito frequente no cálculo de integrais, que é útil quando a função integranda não é uma primitiva imediata. Vamos ainda reescrever as regras de primitivação em termos de integrais definidos — uma técnica que simplifica o cálculo de integrais concretos, por permitir poupar alguns cálculos.

A regra de Barrow afirma que o integral definido de f entre a e b pode ser calculado como $F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f. É muito comum representar esta diferença pela notação $[F(x)]_a^b$, que se lê "F *somada* entre a e b". Recorrendo a esta notação, a regra de Barrow passa a ter a forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,.$$

Usando esta notação, os exemplos do final da secção anterior poderiam ter sido escritos da seguinte forma.

$$\int_{-1}^1 \left(2-x^2\right)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \left(2-\frac{1}{3}\right) - \left(-2+\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4-0 = 4$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-(-1) = 2$$

A grande vantagem desta notação é permitir-nos incluir o cálculo da primitiva durante a resolução do integral definido, evitando que se tenha de interromper um problema para resolver outro no entretanto. Esta vantagem é ainda mais notória quando a primitiva não é imediata — nomeadamente nos casos da primitivação por partes e por substituição. No primeiro caso, permite-nos ir somando as primitivas que vão surgindo; no segundo caso, permite-nos poupar o trabalho de desfazer as substituições no final.

Consideremos em primeiro lugar o caso da primitivação por partes. Vimos que esta regra pode ser escrita como

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

ou, explicitando a variável,

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Uma vez que a expressão da direita é uma primitiva de $f'(x)g(x)$, se quisermos calcular um integral definido desta última expressão entre a e b temos de somar a função da direita entre esses dois pontos. Mas somar $\int f(x)g'(x)\;dx$ entre a e b é precisamente calcular o integral definido desta função entre esses dois pontos. Obtemos então a seguinte regra.

Proposição (Integração por partes)**.** Sejam f e g duas funções tais que $f'g$ e fg' são funções integráveis entre a e b. Então

$$\int_a^b f'(x)g(x)\;dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\;dx\,.$$

Suponhamos que queríamos calcular $\int_1^2 \log(x)\;dx$. Uma vez que $\log(x)$ se primitiva por partes, podemos utilizar a regra da integração por partes para calcular o resultado.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \log(x)\;dx = [x\log(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{x}\;dx &= (2\log 2 - \log 1) - \int_1^2\;dx\\ = 2\log 2 - [x]_1^2 &= 2\log 2 - (2-1) = 2\log 2 - 1\end{aligned}$$

Esta regra é particularmente útil quando precisamos de primitivar várias vezes por partes. Por exemplo, vejamos como calcular $\int_{-1}^2 (x^2-x)\,e^x\;dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \left(x^2-x\right)e^x\;dx &= \left[\left(x^2-x\right)e^x\right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 (2x-1)e^x\;dx\\ &= \left(2e^2-2e^{-1}\right) - [(2x-1)e^x]_{-1}^2 + \int_{-1}^1 2e^x\;dx\\ &= \left(2e^2-2e^{-1}\right) - \left(3e^2+3e^{-1}\right) + \int_{-1}^1 2e^x\;dx\\ &= -e^2 - 5e^{-1} + 2\left[e^x\right]_{-1}^2\\ &= -e^2-5e^{-1}+2e^2-2e^{-1} = e^2-7e^{-1}\end{aligned}$$

Calculando a primitiva separadamente os cálculos seriam bastante mais trabalhosos.

Exercício 8. Aplique a regra de integração por partes para calcular os seguintes integrais.

(a) $\int_0^1 x^2e^x\;dx$ (b) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+4x}}\;dx$ (c) $\int_0^\pi x^3\sin(x)\;dx$

A regra de primitivação por substituição gera uma regra de integração um pouco diferente. Relembremos: para primitivar $f(x)$ com $x=g(t)$, primitivamos $f(g(t))g'(t)$ em ordem a t e depois desfazemos a substituição. Temos então a fórmula

$$\int f(x)\;dx = \int f(g(t))g'(t)\;dt\,.$$

Em termos de integrais, isto significa que a expressão do lado direito é uma primitiva de $f(x)$ — mas escrita em termos da variável t. Então, para calcular $\int_a^b f(x)\;dx$, podemos somar a primitiva da direita *em* x entre a e b. Ora usando a relação $x=g(t)$ podemos somar essa mesma primitiva *em* t desde que ajustemos os extremos do intervalo por forma a manter essa relação. É ainda necessário que a função g seja monótona no novo intervalo de integração.

Obtemos então a seguinte regra.

Proposição (Integração por substituição)**.** Sejam f e g duas funções tais que f é integrável entre a e b e $(f \circ g)g'$ é integrável entre α e β, com $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$; assuma-se ainda que g é monótona entre α e β. Então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\, dt\,.$$

Esta regra parece muito complicada, mas na realidade é bastante simples de aplicar. Vamos ver como esta técnica nos permite calcular de forma relativamente simples o integral

$$\int_1^e \frac{\log(x) - (\log(x)^2) + 3\,(\log(x)^3)}{x}\, dx\,.$$

Uma vez que $\frac{1}{x}$ é a derivada de $\log(x)$, fazendo $t = \log(x)$ obtemos $dt = \frac{1}{x}\, dx$, que nos permite simplificar a função a primitivar.

O que é que acontece aos extremos de integração? Se $x = 1$, então $t = \log(x) = 0$; se $x = e$, então $t = \log(x) = 1$. Vamos portanto integrar em t entre 0 e 1. Os restantes cálculos são simples.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\log(x) - (\log(x)^2) + 3\,(\log(x)^3)}{x}\, dx &= \int_0^1 t - t^2 + 3t^3\, dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{11}{12}\end{aligned}$$

Vejamos outro exemplo. Suponhamos que queríamos calcular

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx\,,$$

integral que sabemos ser resolúvel com a substituição $x = \sin(t)$. Então temos que $dx = \cos(t)dt$; para usar a regra de integração por substituição, precisamos de encontrar dois pontos α e β tais que $\sin(\alpha) = -1$, $\sin(\beta) = 1$ e a função seno é monótona entre α e β. Uma possibilidade é tomar $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{\pi}{2}$. Temos então as seguintes igualdades.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t) + 1)\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

A grande vantagem é não termos de desfazer a substituição no final. Em geral, isto representa uma grande simplificação nos cálculos a realizar.

Exercício 9. A escolha de $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{\pi}{2}$ não é a única nas condições da regra de integração por substituição. Verifique que o valor do integral é o mesmo se se usarem as seguintes escolhas.

(a) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = \frac{5\pi}{2}$

(b) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$

O que é que acontece se tomarmos $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{5\pi}{2}$? Porque é que isto não contradiz a regra de primitivação por substituição?

Exercício 10. Aplique a regra de integração por substituição para calcular os seguintes integrais.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(b) $\int_{1}^{e} \frac{1+\log(x)}{x}\, dx$

(c) $\int_{0}^{\log 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$

Exercício 11. Verifique que $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{1}{x}\right)\, dx = 0$, com $a \neq 0$, usando a substituição $x = \frac{1}{t}$.

5.5 Aplicações

Agora que sabemos calcular integrais definidos recorrendo à regra de Barrow, vamos discutir problemas práticos cuja formulação conduz naturalmente à resolução de um destes objectos. Naturalmente, alguns destes exemplos são geométricos, dada a nossa motivação inicial baseada no cálculo de áreas; porém, o integral definido permite resolver outro tipo de problemas que à partida pouco parecem ter a ver com este contexto.

5.5.1 Cálculo de áreas

Definimos o integral duma função f num intervalo $[a, b]$ como sendo o valor da área sob o gráfico de f nesse intervalo. Isto significa que podemos usar integrais definidos para calcular áreas de figuras desta forma — como aliás fizemos já nalguns exemplos e exercícios de secções anteriores.

Porém, a mesma técnica pode ser usada em casos mais gerais. Consideremos por exemplo a área a sombreado na Figura 5.11 (a). À partida, a área desta figura não corresponde à área sob o gráfico de nenhuma função; porém, podemos ver o seu contorno superior como o gráfico duma função f e o seu contorno inferior como o gráfico duma função g (Figura 5.11 (b)) e escrever a sua área como a *diferença* de duas áreas (Figura 5.11 (c)).

Concluimos então que a área pretendida é dada por $\int_a^b f - \int_a^b g$, que, por linearidade, é igual a

$$\int_a^b f - g\,.$$

Vamos ver como podemos usar este método para calcular áreas de algumas figuras. Para começar, vamos determinar a área dum círculo de raio R. Uma vez que esta área não varia por translacção, podemos escolher o sistema de eixos centrado no centro do círculo (Figura 5.12).

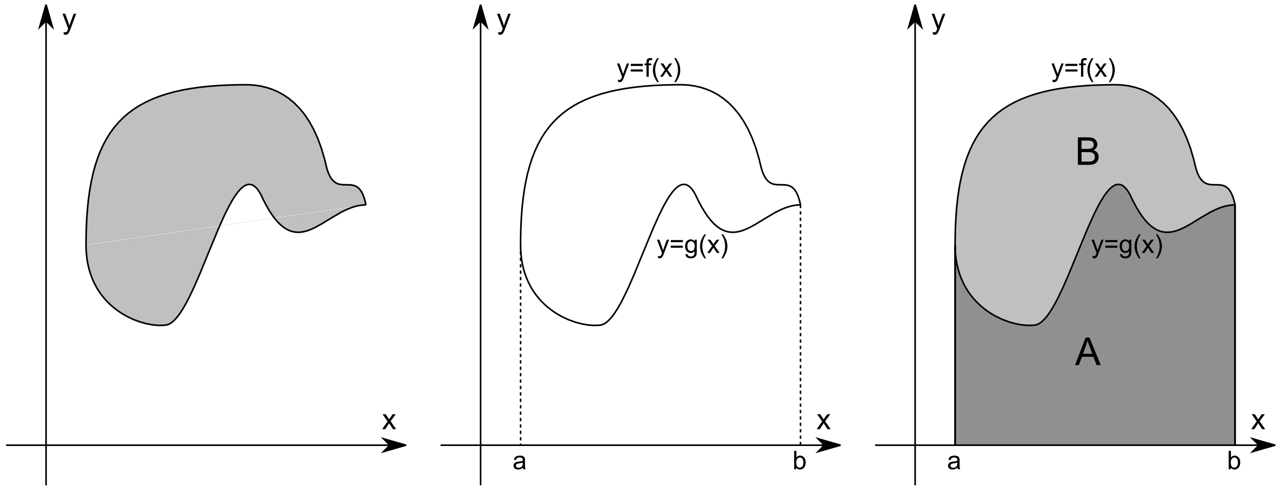


Figura 5.11: A área representada na figura (a) pode ser vista como limitada pelos gráficos de duas funções f e g (b). Assim, podemos representá-la como a diferença de dois integrais (c): a área B é a diferença entre o integral de f (que mede $A+B$) e o integral de g (que mede A).

A equação analítica da circunferência é $x^2+y^2=R^2$. Resolvendo esta equação em ordem a y, obtemos

$$x^2+y^2=R^2 \Longleftrightarrow y^2=R^2-x^2 \Longleftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\,.$$

As duas soluções desta equação correspondem às duas funções que limitam a circunferência superior e inferiormente. Temos então que a área do círculo é dada por

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}-\left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)\,dx=\int_{-R}^{R}2\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,.$$

Para resolver este integral, vamos aplicar a substituição $x=R\sin(t)$. Já sabemos que $dx=R\cos(t)\,dt$, $x=-R$ quando $t=-\frac{\pi}{2}$ e $x=R$ quando $t=\frac{\pi}{2}$. Por outro lado, temos que

$$\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}=\sqrt{R^2\cos^2 t}=R\cos(t)$$

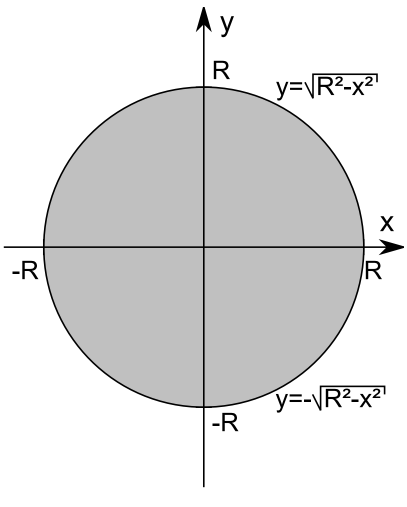


Figura 5.12: Cálculo da área dum círculo.

uma vez que $R \geq 0$ e $\cos(t)$ é positivo no intervalo considerado. Obtemos

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2(t)\,dt$$
$$= 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

usando o valor do integral já calculado anteriormente.

Exercício 12. Recorrendo a um integral indefinido, calcule:

(a) a área dum triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,a)$ e (b,a);

(b) a área duma elipse de equação $x^2 + 2y^2 = 3$;

(c) a área da figura limitada superiormente pelo gráfico de $y = e^x$, inferiormente pelo gráfico de x^2, e horizontalmente pelas rectas $y = 1$ e $y = 3$.

Um caso muito frequente é haver interesse em calcular a área duma figura limitada por várias curvas. Nestas situações, é conveniente começar por desenhar a figura e determinar os pontos relevantes para a expressão da sua área como integral: pontos onde a equação da fronteira muda e extremos de integração, entre outros. De seguida, escreve-se a área a calcular como um integral definido ou uma soma de integrais definidos e calcula-se pelos processos usuais.

Exemplo.

1. Vamos calcular a área limitada pela parábola $y = x^2 - 2x$ e pela recta $y = x$.

   O primeiro passo é determinar os pontos de intersecção daquelas duas curvas, que serão os vértices da fronteira da região a integrar. Estes pontos determinam-se igualando ambas as funções e resolvendo a equação resultante.

   $$x^2 - 2x = x \Longleftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow x(x-3) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

   Concluimos portanto que as curvas se intersectam nos pontos $(0,0)$ e $(3,3)$. Em seguida, precisamos de esboçar a figura para perceber qual das curvas limita superiormente a região e qual a limita inferiormente. O desenho está feito na Figura 5.13; uma vez que no intervalo $[0,3]$ a recta $y = x$ está acima da parábola $y = x^2 - 2x$, vamos tomar a primeira expressão como o gráfico de $y = f(x)$ e a segunda como o de $y = g(x)$. A área da figura é então dada pelo seguinte integral.

   $$\int_0^3 x - \left(x^2 - 2x\right)\,dx = \int_0^3 -x^2 + 3x\,dx$$
   $$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-9 + \frac{27}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

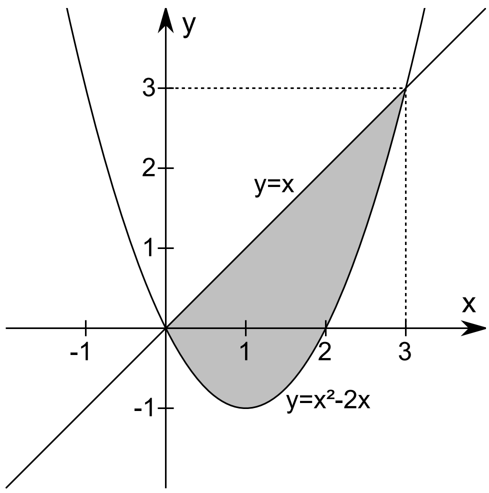


Figura 5.13: Região limitada pela parábola $y = x^2 - 2x$ e pela recta $y = x$.

2. Consideremos agora a região limitada pelas três rectas $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ e $y = -2x + 4$. Para podermos escrever esta região como um integral, vamos calcular os pontos de intersecção destas rectas, resolvendo as três equações seguintes.

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \iff 9x + 3 = 2x - 4 \iff 7x = -7 \iff x = -1$$
$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 4 \iff 3x + 1 = -4x + 8 \iff 7x = 7 \iff x = 1$$
$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -2x + 4 \iff x - 2 = -6x + 12 \iff 7x = 14 \iff x = 2$$

Estas rectas intersectam-se portanto nos pontos $(-1, -1)$, $(1, 2)$ e $(2, 0)$. Desenhando a região (Figura 5.14), verificamos que esta é limitada entre $x = -1$ e $x = 1$ pelas rectas $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (acima) e $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (abaixo), enquanto que entre $x = 1$ e $x = 2$ é limitada por $y = -2x + 4$ (acima) e $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (abaixo). A área desta região é portanto dada pela soma de dois integrais definidos.

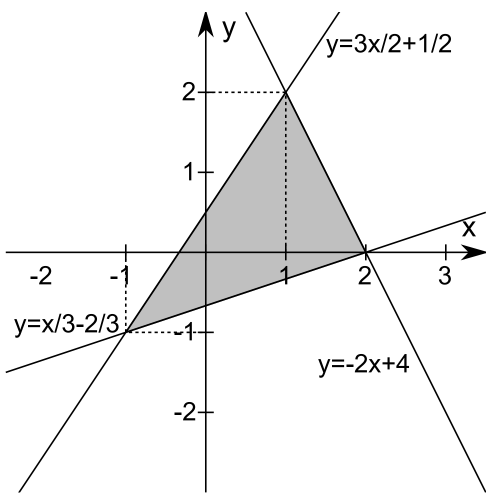


Figura 5.14: Região limitada pelas três rectas $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ e $y = -2x + 4$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) \right) \, dx + \int_{1}^{2} \left((-2x+4) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) \right) \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{7}{6}x + \frac{1}{6} \right) \, dx + \int_{1}^{2} \left(-\frac{7}{3}x + \frac{14}{3} \right) \, dx \\
&= \left[\frac{7x^2}{12} + \frac{x}{6} \right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{7x^2}{6} + \frac{14x}{3} \right]_{1}^{2} \\
&= \left(\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{6} \right) \right) + \left(\left(-\frac{14}{3} + \frac{28}{3} \right) - \left(-\frac{7}{6} + \frac{14}{3} \right) \right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{7}{6} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

3. Para concluir, vamos calcular a área da região acima de uma, mas não de ambas as parábolas $y = x^2$ e $y = (x+1)^2$ e abaixo da recta $y = 4$.

   Uma vez que as duas parábolas têm concavidade virada para cima, vão-se intersectar necessariamente. O ponto de intersecção satisfaz

$$x^2 = (x+1)^2 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2},$$

   sendo portanto o ponto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

   Os pontos de intersecção com a recta horizontal são as raízes das duas equações seguintes.

$$\begin{aligned}
x^2 = 4 &\iff x = \pm 2 \\
(x+1)^2 = 4 &\iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = -1 \pm 2 \iff x = -3 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

   Podemos então esboçar a região a integrar como na Figura 5.15.

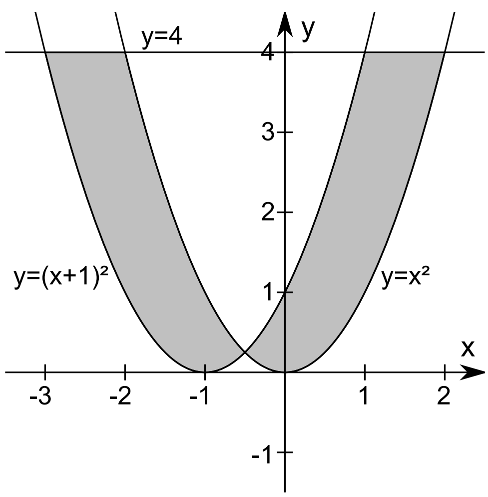


Figura 5.15: Região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = (x+1)^2$ e pela recta $y = 4$.

   Observando a figura, vemos que temos quatro regiões distintas de integração consoante o valor de x:

- em $[-3,-2]$, a região é limitada em baixo por $y=(x+1)^2$ e em cima por $y=4$;
- em $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$, a região é limitada em baixo por $y=(x+1)^2$ e em cima por $y=x^2$;
- em $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, a região é limitada em baixo por $y=x^2$ e em cima por $y=(x+1)^2$;
- em $[1,2]$, a região é limitada em baixo por $y=x^2$ e em cima por $y=4$.

Podemos então expressar a área desta região como a soma de quatro integrais.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-2} \left(4-(x+1)^2\right)\,dx + \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(x^2-(x+1)^2\right)\,dx \\
&\quad + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left((x+1)^2-x^2\right)\,dx + \int_{1}^{2} \left(4-x^2\right)\,dx \\
&= \int_{-3}^{-2} \left(-x^2-2x+3\right)\,dx + \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-2x-1)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x+1)\,dx + \int_{1}^{2} \left(4-x^2\right)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{-2} + \left[-x^2-x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left[x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} \\
&= \left(\left(\frac{8}{3}-4-6\right)-(9-9-9)\right) + \left(\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-(-4+2)\right) \\
&\quad + \left((1+1)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= \frac{5}{3}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+\frac{5}{3} = \frac{47}{6}
\end{aligned}$$

Exercício 13. Calcule a área das regiões do plano delimitadas pelas seguintes curvas.

(a) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=5x \\ x=1 \\ x=6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=8-x^2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y^2=6x \\ x^2=6y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y=\sin(x) \\ y=x\sin(x) \\ x=0 \\ x=\pi \end{cases}$

Exercício 14. Calcule a área das regiões do plano definidas pelas seguintes condições.

(a) $\begin{cases} y\geq \frac{x^2}{8} \\ y\leq x \\ y\leq \frac{1}{x} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y\geq x^2 \\ y\geq x \\ y\leq 4 \\ x\geq 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leq 1 \\ x-y-1\geq 0 \\ x\leq \frac{1}{2} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y\leq 4x-x^2 \\ y\geq x \end{cases}$

5.5.2 Comprimentos de curvas

A definição do integral como o limite de um somatório leva a que este surja de forma um pouco inesperada como solução de outro tipo de problemas. Uma das aplicações — também ela geométrica — é a determinação de comprimentos de curvas.

O comprimento dum segmento de recta horizontal ou vertical mede-se directamente. O segmento horizontal que une dois pontos (a, y) e (b, y) tem comprimento $b - a$, tal como o segmento vertical que une dois pontos (x, a) e (x, b). Para segmentos diagonais, o comprimento é calculado com base no Teorema de Pitágoras: um segmento entre $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é a hipotenusa dum triângulo rectângulo cujo terceiro vértice é (x_b, y_a), tendo portanto os catetos comprimentos $x_b - x_a$ e $y_b - y_a$. O segmento $\overline{AB}$ tem portanto comprimento

$$d\left((x_a, y_a), (x_b, y_b)\right) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

conforme ilustrado na Figura 5.16.

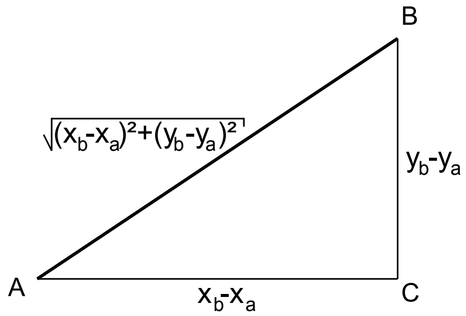
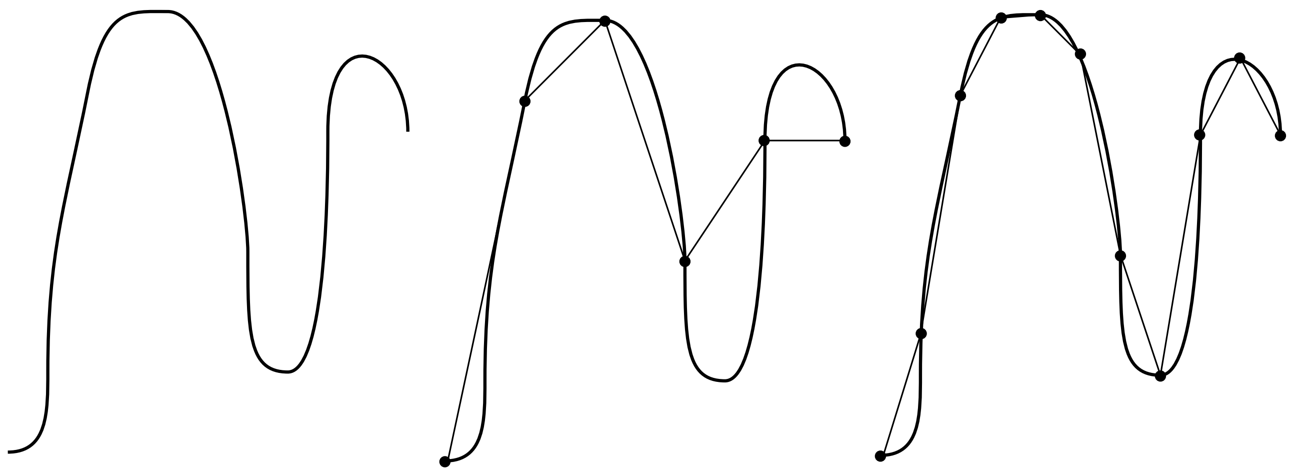


Figura 5.16: Cálculo do comprimento dum segmento de recta.

Como podemos determinar o comprimento duma curva em geral? Num curso mais avançado, podemos resolver o problema para o caso de qualquer curva; com o estudo de integrais definidos feito neste texto, vamos limitar-nos ao contexto em que a curva é, mais uma vez, o gráfico duma função contínua (ou a união de gráficos de funções contínuas).

O raciocínio é semelhante ao que usámos para calcular o valor do integral definido. Escolhendo uma curva genérica (Figura 5.17 (a)), vamos dividi-la em vários troços e aproximar cada troço pelo segmento de recta que une os seus extremos. Quanto mais pontos marcarmos, melhor (em princípio) será esta aproximação (Figura 5.17 (b) e (c)).



(a) (b) (c)

Figura 5.17: Cálculo aproximado do comprimento duma curva.

Qual é o comprimento de cada aproximação? Uma vez que a curva é o gráfico duma função f, cada aproximação é determinada pelos pontos x_i, ou seja, novamente por uma partição do intervalo $[a,b]$. Sendo P a partição constituída pelos pontos $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$, as coordenadas de cada ponto sobre a curva são $(x_i, f(x_i))$ e cada segmento tem comprimento

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,.$$

O comprimento da aproximação associada à partição P é então a soma de todos estes comprimentos, para $i = 1, \ldots, n$, e estamos interessados no limite deste valor (caso exista) quando o diâmetro de P se aproxima de 0.

Encontramos aqui várias semelhanças com a definição de integral, já que estamos novamente a considerar um limite duma soma quando $\delta(P) \to 0$. Para conseguir escrever o comprimento da curva como um integral, precisamos de fazer uma observação. Pelo Teorema de Lagrange, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe um ponto x_i^* tal que

$$f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})\,.$$

Podemos então reescrever a expressão do comprimento de cada segmento como

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}))^2} \\
&= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(x_i^*))^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\
&= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + (f'(x_i^*))^2\right]} \\
&= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,.
\end{aligned}$$

Porém, como $x_i - x_{i-1} \to 0$ e f é contínua, o limite desta expressão não se altera se substituirmos x_i^* por x_i^- ou x_i^+. No primeiro caso, estamos a aproximar o comprimento da curva por

$$S_{\min}\left(\sqrt{1 + (f')^2}, P\right)\,,$$

no segundo por

$$S_{\max}\left(\sqrt{1 + (f')^2}, P\right)\,.$$

Conclui-se então que o comprimento do gráfico de f entre a e b é dado pela expressão

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Como primeiro exemplo, vamos calcular o comprimento do gráfico de $f(x) = \sqrt{x^3}$ entre os pontos $(0,0)$ e $(4,8)$, desenhado na Figura 5.18.

Uma vez que f é uma potência, temos que

$$f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,,$$

donde

$$(f'(x))^2 = \frac{9x}{4}\,.$$

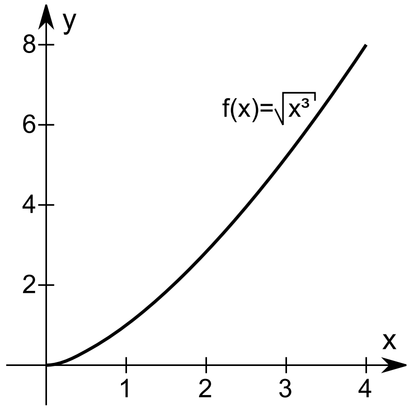


Figura 5.18: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x^3}$ entre os pontos $x = 0$ e $x = 4$.

Temos então que

$$\int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \int_0^4 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \left[\frac{\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{9}{4} \times \frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{10^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{27}{8}} = \frac{80\sqrt{10} - 8}{27} \approx 9.08\,.$$

Exemplo. Vamos usar a mesma técnica para determinar o perímetro duma circunferência de raio R. Conforme discutimos anteriormente, podemos escolher um referencial com origem no centro da circunferência; esta passa então a ser a união dos gráficos das duas funções $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ (ver Figura 5.19).

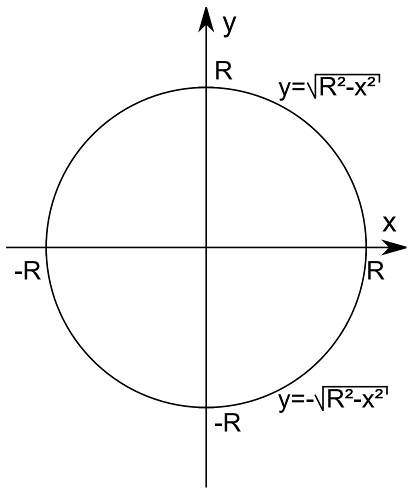


Figura 5.19: Cálculo do perímetro duma circunferência.

Sendo $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a expressão da função que define a metade superior da circunferência e $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ a que define a sua metade inferior, temos de calcular as expressões $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ e $\sqrt{1 + (g'(x))^2}$. Antes de mais, note-se que

$$\sqrt{1 + (g'(x))^2} = \sqrt{1 + (-f'(x))^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,,$$

pelo que podemos reduzir o problema ao cálculo dum integral. Temos ainda

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,,$$

donde a expressão $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ se simplifica a

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\,.$$

Uma vez que nesta expressão ocorre o termo $\sqrt{R^2 - x^2}$, vamos calcular este integral aplicando primitivação por substituição, com $x = R\sin(t)$, donde decorre novamente que $dx = R\cos(t)\,dt$ e os limites de integração passam a ser $t = -\frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx \\
&= \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} + \sqrt{1 + (g'(x))^2}\right)\,dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \\
&= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{R^2\cos^2(t)}} R\cos(t)\,dt \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{R\cos(t)} R\cos(t)\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\,dt = 2\pi R
\end{aligned}$$

Há substituições específicas para primitivar funções da forma $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, nomeadamente a substituição $x = \tan(t)$ discutida no capítulo anterior. Contudo, é importante ter em conta que, mesmo recorrendo a essas substituições, há muitos gráficos de funções cujo comprimento não conseguimos calcular usando esta técnica porque a função integranda não é elementarmente primitivável. Recorrendo mais uma vez a métodos numéricos de cálculo de integrais, a fórmula do cálculo do comprimento permite-nos obter aproximações tão boas quanto o desejado daquele valor.

Exercício 15. Calcule o comprimento das seguintes curvas.

(a) Uma elipse de equação $x^2 + 2y^2 = 3$.

(b) O gráfico de $y = x^2 - \frac{\log(x)}{8}$ com $x \in [2, 3]$.

(c) O gráfico de $y = \log(\cos(x))$ com $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

(d) O gráfico de $y = x^2$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

5.5.3 Volumes de sólidos de revolução

Outra aplicação semelhante à anterior diz respeito ao cálculo de volumes de sólidos de revolução. Estes sólidos são obtidos por rotação duma figura plana em torno dum eixo. Exemplos típicos são uma esfera (rotação dum círculo em torno do seu diâmetro), um cone (rotação de um triângulo rectângulo em torno dum dos catetos) ou um toro (rotação dum círculo em torno duma recta que lhe é exterior).

O volume destes sólidos pode ser escrito mais uma vez como um integral simples, uma vez que pode ser visto como um limite dum somatório. Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$ e consideremos o sólido obtido por rotação do gráfico de f em torno do eixo horizontal (Figura 5.20).

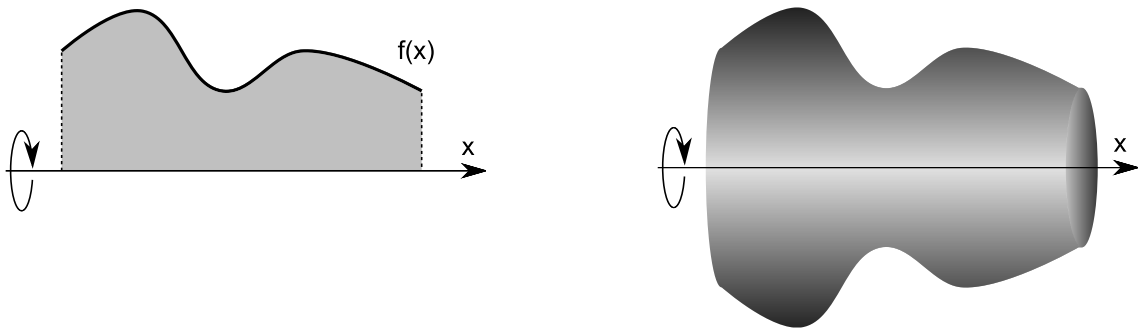


Figura 5.20: Sólido de revolução obtido por rotação do gráfico duma função em torno do eixo horizontal.

Tal como aproximámos a área sob o gráfico de f recorrendo a partições do intervalo $[a,b]$, podemos aproximar o volume deste sólido duma forma semelhante. Fixada uma partição, cada um dos rectângulos usados para aproximar a área de f gera por rotação um cilindro com eixo horizontal de altura $x_i - x_{i-1}$ e raio $f(x_i^*)$; então o volume do sólido é aproximado por

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, \pi \left(f\left(x_i^*\right)\right)^2$$

que, à medida que o diâmetro da partição tende para 0, converge para

$$\int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 \, dx\,.$$

Da mesma forma, se o sólido for obtido por rotação em torno do eixo horizontal da figura entre os gráficos de duas funções positivas f e g, com $g(x) \geq f(x)$ em $[a,b]$, o seu volume será dado pela diferença entre o sólido de revolução obtido a partir de f e o sólido de revolução obtido a partir de g, que por linearidade do integral é igual a

$$\int_a^b \pi \left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 \, dx\,.$$

Observe-se que não podemos generalizar estes resultados a funções que tomem valores negativos, já que nem é claro definir o sólido de revolução associado ao seu gráfico.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo.

1. Vamos usar este resultado para calcular o volume duma esfera de raio R. Este sólido pode ser obtido por rotação dum semi-círculo assente no eixo horizontal em torno desse

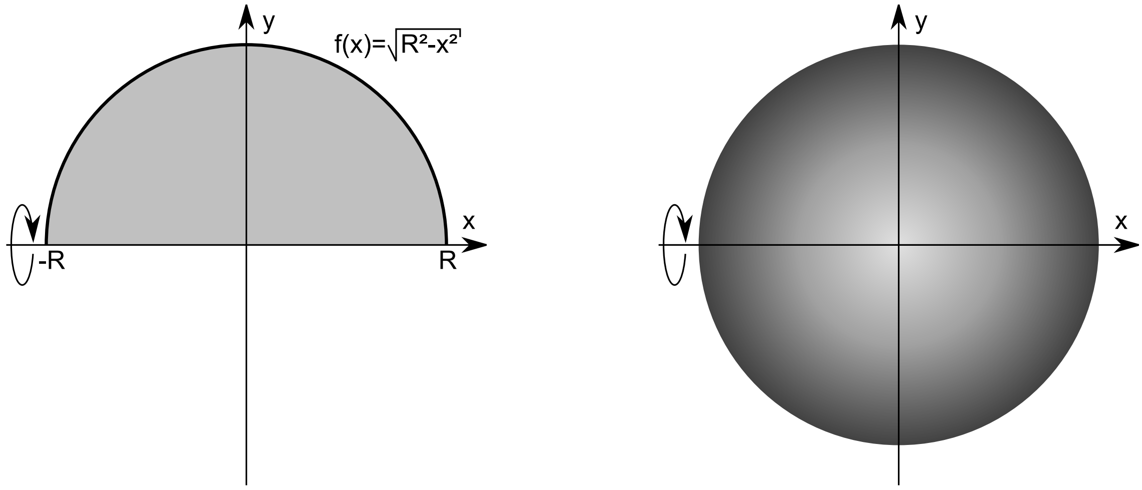


Figura 5.21: Obtenção duma esfera a partir da rotação dum semi-círculo em torno do eixo horizontal.

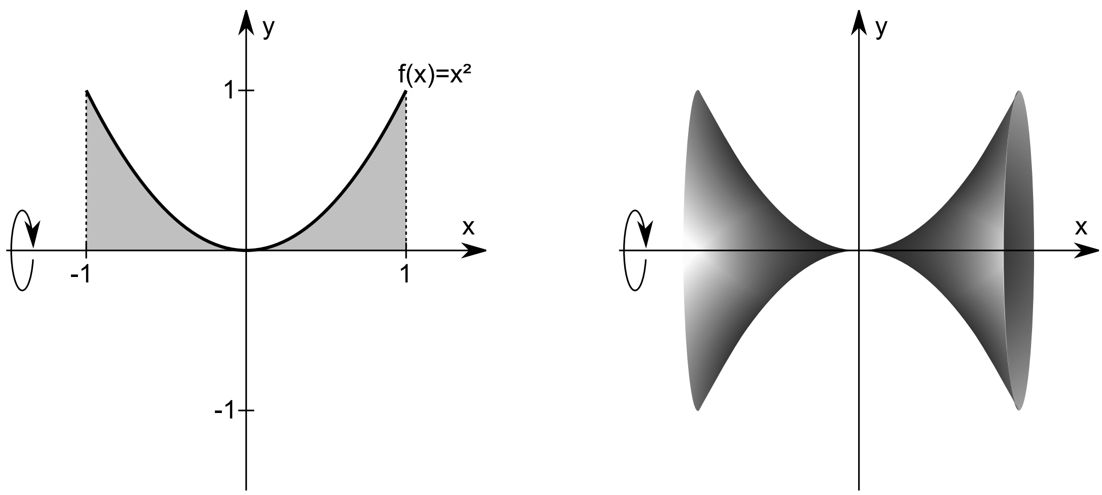
eixo; se centrarmos o semi-círculo na origem do referencial, este corresponderá novamente à área sob o gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (ver Figura 5.21).

Então o volume pretendido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi \sqrt{R^2 - x^2}^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) \, dx \\ &= \pi \int_{-R}^{R} R^2 \, dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 \, dx = 2\pi R^3 - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \,. \end{aligned}$$

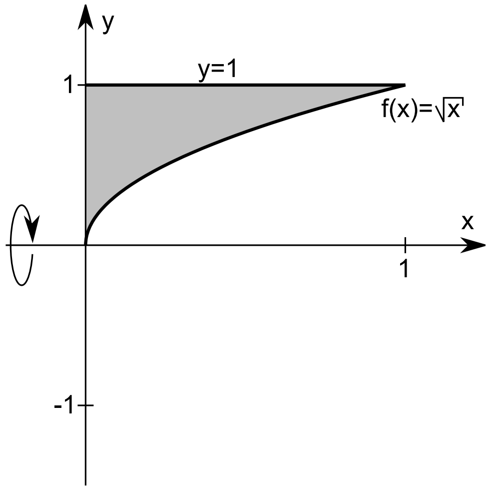
2. Fazendo rodar a parábola de equação $y = x^2$ no intervalo $[-1, 1]$ em torno do eixo horizontal, obtemos um sólido de revolução cujo volume podemos calcular.

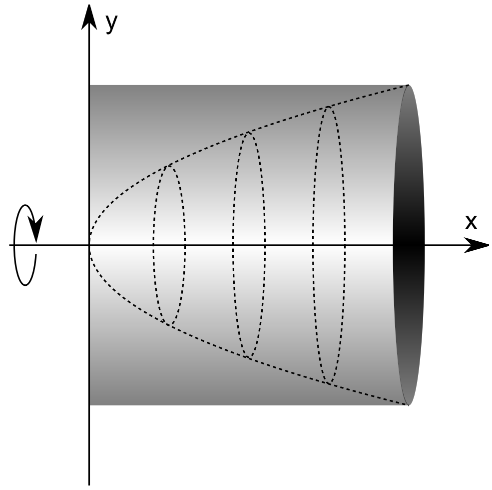
$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left(x^2\right)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\pi \,.$$



3. Consideremos agora a região do primeiro quadrante limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e a recta $y = 1$ e calculemos o volume do sólido que se obtém por rotação desta região em torno do eixo horizontal.

   Comecemos por desenhar a região para poder esboçar o sólido.





   O volume do sólido gerado é então

$$V = \int_0^1 \pi(1 - \sqrt{x}^2)\, dx = \pi \int_0^1 dx - \pi \int_0^1 x\, dx = \pi - \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercício 16. Calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada por esse eixo e pelo gráfico de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = x^2$ em $[0, 2]$

(b) $f(x) = 2\cos(x)$ em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Exercício 17. Calcule o volume dos seguintes sólidos de revolução.

(a) Um cone, obtido pela rotação em torno do eixo dos xx dum triângulo rectângulo de altura h e base r, com os catetos assentes nos eixos coordenados.

(b) Um cilindro, obtido pela rotação em torno do eixo dos xx dum rectângulo de lados h e k, com um dos lados de comprimento h assente no eixo horizontal.

A outra possibilidade é gerar um sólido de revolução por rotação do gráfico da função f em $[a, b]$ em torno do eixo vertical (ver Figura 5.22).

Agora, cada rectângulo associado a uma partição do intervalo $[a, b]$ gera um cilindro de altura $f(x^*)$. O volume de cada cilindro é obtido como a diferença entre os volumes um cilindro exterior de raio x_i e um cilindro interior de raio x_{i-1}, ou seja, $\pi\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) f(x_i^*)$, expressão que pode ser reescrita como $\pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(x_i^*)$; obtemos novamente uma soma como aproximação do volume do sólido.

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(x_i^*)$$

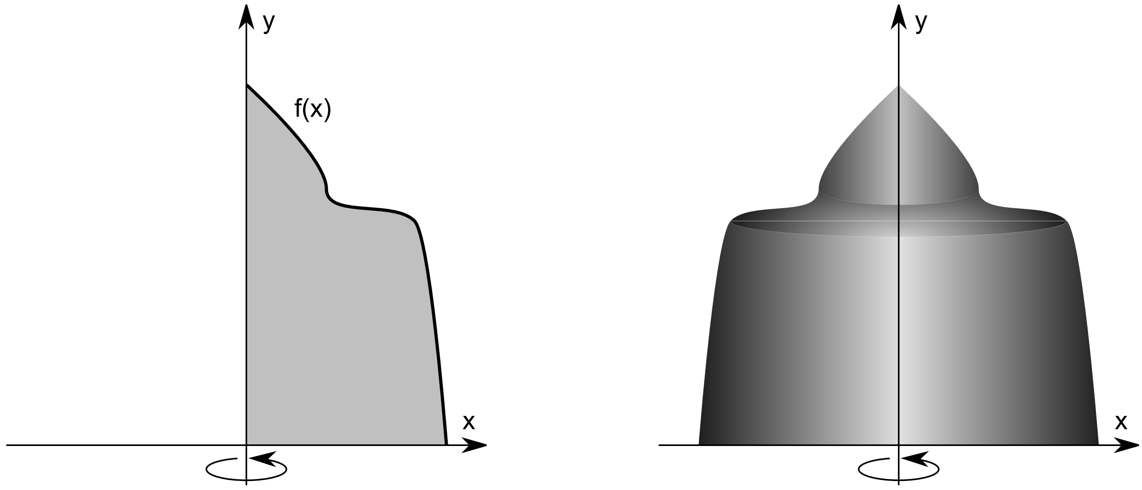


Figura 5.22: Sólido de revolução obtido por rotação do gráfico duma função em torno do eixo vertical.

À medida que o diâmetro da partição tende para 0, esta soma também converge para um integral, desta vez

$$\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx\,.$$

Mais uma vez, se a região for limitada superiormente pelo gráfico de f e inferiormente pelo gráfico de g, o seu volume é dado por

$$2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx\,.$$

Podemos usar esta fórmula para calcular novamente o volume duma esfera de raio R, obtida agora por rotação dum semi-círculo assente no eixo vertical e centrado na origem do referencial (Figura 5.23).

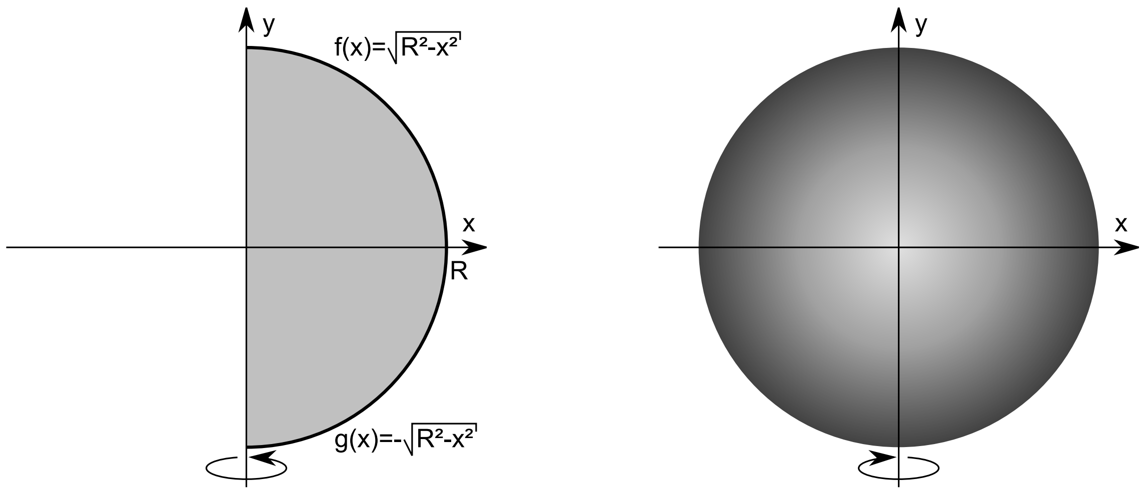


Figura 5.23: Obtenção duma esfera a partir da rotação dum semi-círculo em torno do eixo vertical.

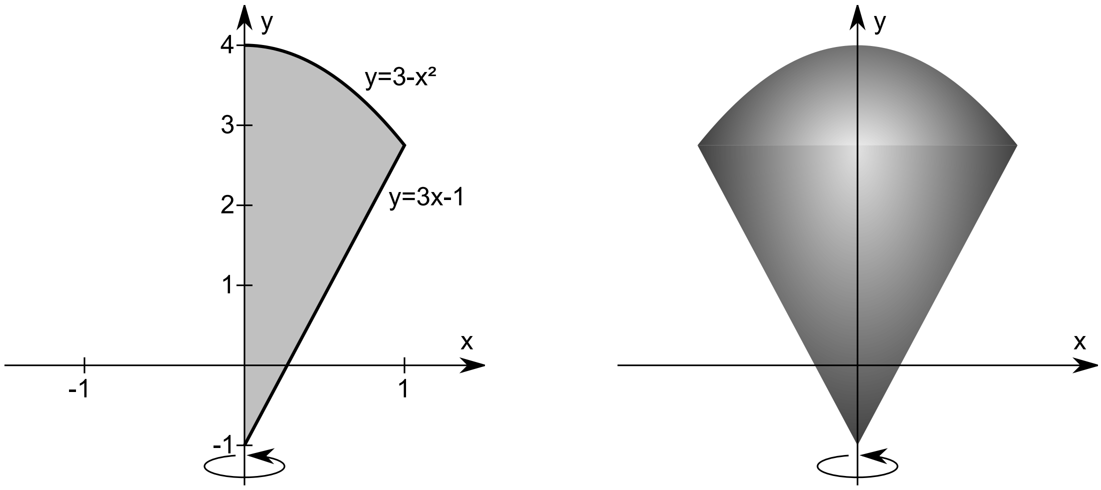
Este semi-círculo é limitado superiormente pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e inferiormente pelo de $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, mas agora estas funções estão definidas apenas entre 0 e R. O volume pretendido é então dado por

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^R x\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x^2}\right)\, dx = 4\pi \int_0^R x\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\, dx \\ &= 4\pi \left[\frac{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{-2 \times \frac{3}{2}}\right]_0^R = 4\pi \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \,. \end{aligned}$$

Exemplo.

1. Consideremos o sólido obtido por rotação em torno do eixo dos yy da região limitada por $y = 3 - x^2$ e $y = 3x - 1$, com $x > 0$. Estas curvas intersectam-se em $x = 1$, como se pode verificar.

   Para calcular o volume deste sólido, temos de começar por desenhar a região que o gera.



   O volume pretendido é então

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x\left(3 - x^2 - (3x - 1)\right)\, dx = 2\pi \int_0^1 \left(-x^3 - 3x^2 + 4x\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2\right]_0^1 = 2\pi \left(-\frac{1}{4} - 1 + 2\right) = \frac{3\pi}{2} \,. \end{aligned}$$

2. A rotação dum círculo em torno dum eixo exterior gera um toro. Se posicionarmos o círculo por forma a que o seu diâmetro assente no eixo horizontal, obtemos um sólido como o ilustrado na Figura 5.24.

   Supondo que o raio deste círculo é 1 e que o seu centro é o ponto $(2, 0)$, as funções que o delimitam são $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ (superiormente) e $g(x) = -\sqrt{1 - (x-2)^2}$ (inferiormente), donde obtemos o seguinte valor para o seu volume.

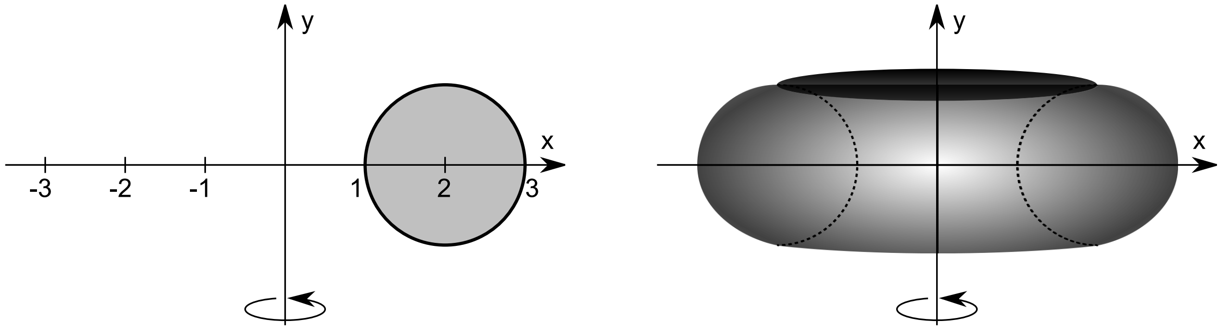


Figura 5.24: Obtenção dum toro a partir da rotação dum círculo em torno dum eixo exterior.

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^3 x2\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx = 4\pi \int_1^3 (x-2+2)\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx \\
&= 4\pi \int_1^3 (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx + 4\pi \int_1^3 2\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx \\
&= 4\pi \underbrace{\left[\frac{(1-(x-2)^2)^{\frac{3}{2}}}{-2\times\frac{3}{2}}\right]_1^3}_{0} + \underbrace{8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt}_{x-2=\sin(t)} \\
&= 8\pi\frac{\pi}{2} = 4\pi^2
\end{aligned}
$$

Exercício 18. Calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação em torno do eixo dos yy da região limitada pelo gráfico das seguintes funções.

(a) $\begin{cases} f(x) = 3-x^2 \\ g(x) = 3x-1 \end{cases}$ em $[0,1]$

(b) $\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ em $[1,3]$

5.6 Integrais impróprios

Até agora, tratámos sempre de integrais de funções limitadas. De facto, para o integral definido de f entre a e b estar definido, requeremos inicialmente que f fosse contínua em $[a,b]$ e posteriormente (no caso das funções contínuas por troços) que o seu domínio fosse divisível em intervalos fechados onde f fosse contínua. Assim, não temos maneira de dar sentido a expressões como por exemplo $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$, uma vez que neste no intervalo $[-1,2]$ a função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é contínua por troços — já que não é limitada em nenhuma vizinhança da origem.

Nesta secção, vamos discutir extensões do conceito de integral que nos vão permitir calcular áreas de regiões ilimitadas do plano. Embora possa parecer contra-intuitivo a princípio, na realidade este estudo apresenta bastantes semelhanças com o estudo de séries: em ambos os casos estamos a tratar de somar um número infinito de quantidades pequenas, podendo obter um resultado finito. No final desta secção veremos um resultado que relaciona directamente este tipo de integrais com a convergência de séries.

Os chamados integrais impróprios classificam-se em três categorias, consoante a restrição que estamos a retirar. Nos *integrais impróprios de primeira espécie*, estamos a integrar uma função limitada num intervalo ilimitado; nos *integrais impróprios de segunda espécie*, o intervalo de integração é limitado, mas a função assume valores arbitrariamente grandes. Finalmente, nos *integrais impróprios de terceira espécie* ou *integrais impróprios mistos* temos uma combinação dos dois casos anteriores.

5.6.1 Integrais impróprios de 1ª espécie

O primeiro tipo de integral impróprio é talvez o mais importante para as aplicações práticas desta matéria: integrais cujo domínio de integração é ilimitado. O tratamento deste tipo de integrais é muito semelhante ao das séries: vamos considerar integrais cujo extremo superior de integração é $+\infty$, ou cujo extremo inferior é $-\infty$. Uma das áreas em que mais se usam este tipo de integrais é a Teoria das Probabilidades — e, por consequência, todas as aplicações desta a outras disciplinas, como a Física ou a Economia.

Definição. Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função. A expressão

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

diz-se um *integral impróprio (definido) de primeira espécie.*

Tal como nos integrais anteriores, por vezes ditos próprios, interessa saber quando é que faz sentido atribuir um valor ao integral de f entre a e b. Pensando mais uma vez em termos de aproximações, podemos pensar em aproximar o valor de $\int_a^b f(x)\, dx$ por integrais (próprios), sendo a aproximação tanto melhor quanto maior for o valor de b. Dizemos então que o integral impróprio *converge* se essa aproximação tender para um limite finito quando $b \to +\infty$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Vamos ver alguns exemplos. Comecemos por pensar na função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e tentemos calcular o seu integral entre 1 e $+\infty$. Temos que

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}\,,$$

que tende para 1 quando $b \to +\infty$. Então este integral converge e o seu valor é 1.

Uma vez que a primitiva de qualquer função é uma função contínua (porque é um integral impróprio), é comum usar a notação abreviada para limites e escrever directamente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1 - 0 = 1\,.$$

Note-se que o uso do símbolo de infinito deixa bem claro desde o início que estamos a trabalhar com limites.

O integral impróprio de primeira espécie tem um significado muito directo: corresponde ao valor acumulado *total* duma função. Por outras palavras, se conhecermos a derivada f' duma função f e o valor $f(a)$ de f num ponto a, então $f(a) + \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ dá-nos o limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$. Em problemas concretos, este valor corresponde ao comportamento assimptótico (ou a longo prazo) dum sistema que seja modelado pela função f.

Exemplo.

1. O integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente. Recorrendo à definição, tem-se que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1\,.$$

2. O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ não é convergente. De facto, tem-se que
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\log(x)]_1^{+\infty} = +\infty\,,$$
que não é um valor finito.

3. Podemos fazer o estudo dos integrais da forma $\int_a^{+\infty} x^\alpha$, com $a > 0$, de forma sistemática. Se $\alpha < 0$, a primitiva de x^α é $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ se $\alpha \neq -1$, e $\log(x)$ caso contrário. Neste último caso, vimos já que o integral é divergente; para $\alpha \neq -1$, temos
$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} x^\alpha\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^\alpha\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\\ &= \begin{cases}-\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{se } \alpha < -1\\ +\infty & \text{se } \alpha > -1\end{cases}\end{aligned}$$
Concluimos assim que estes integrais convergem precisamente se $\alpha < -1$.

4. Finalmente, consideremos o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Uma vez que a função integranda é a derivada do arco de tangente, temos que
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$
e concluimos portanto que este integral é convergente.

Exercício 19. Estude a natureza dos seguintes integrais e, no caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\int_0^{+\infty} \cos(t)\,dt$ (b) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$, com $a > 0$ (c) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

Existem outros dois tipos de integrais impróprios de primeira espécie, que se reduzem ao caso apresentado. O primeiro diz respeito a intervalos de integração ilimitados *inferiormente*, ou seja, da forma $]-\infty, b]$; neste caso, definimos de forma análoga
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,,$$
sendo o integral convergente quando aquele limite for finito. Assim, temos por exemplo que
$$\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{2}$$

e portanto este integral é convergente, enquanto que

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\log|x|} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{\frac{1}{x}}{\log|x|}\,dx = \left[\log|\log|x||\right]_{-\infty}^{-2} = +\infty$$

e portanto este integral é divergente.

O segundo tipo de integral diz respeito a integrais sobre toda a recta real, denotados por $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx$ ou $\int_{\mathbb{R}} f$. Neste caso, usamos a aditividade do integral para escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\ dx$$

para um ponto arbitrário c (tipicamente usa-se 0, mas não é obrigatório) e o integral em $\mathbb{R}$ converge se *ambos* os integrais impróprios do lado direito da equação convergirem.

Por exemplo, suponhamos que queríamos calcular $\int_{\mathbb{R}} x\sin\left(x^2\right)\ dx$. Dividindo este integral em dois, temos

$$\int_{\mathbb{R}} x\sin\left(x^2\right)\ dx = \int_{-\infty}^{0} x\sin\left(x^2\right)\ dx + \int_{0}^{+\infty} x\sin\left(x^2\right)\ dx\,.$$

Uma vez que uma primitiva de $x\sin\left(x^2\right)$ é $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)$, o primeiro integral reduz-se a

$$\int_{-\infty}^{0} x\sin\left(x^2\right)\ dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x\sin\left(x^2\right)\ dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)\ dx\right]_a^0 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a^2\right)-1\right)$$

e este limite não existe. Logo este integral é divergente, e portanto $\int_{\mathbb{R}} x\sin\left(x^2\right)\ dx$ também é divergente.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\\ &= \left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{0} + \left[\arctan(x)\right]_{0}^{+\infty} = \left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \pi\,.\end{aligned}$$

Observe-se que neste último caso poderíamos ter escrito simplesmente

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi\,.$$

Embora esta notação seja aceitável, só faz sentido usá-la em caso de convergência do integral; assim, a menos que esta seja clara desde o início, é recomendável seguir sempre pela via anterior.

Exercício 20. Estude a natureza dos seguintes integrais e, no caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-5)^2}$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e_{-ax}\,dx$, com $a>0$ (c) $\int_{\mathbb{R}} x\sin\left(x^2\right)\ dx$

5.6.2 Critérios de convergência

Tal como vem sendo hábito, na prática há muitos integrais impróprios de primeira espécie que não se conseguem calcular exactamente, pelo que interessa recorrer a métodos numéricos para obter aproximações do seu valor. Contudo, há uma questão a que é preciso responder antes de aplicar métodos numéricos: será que o integral é sequer convergente? Repare-se que, se não for este o caso, qualquer aproximação obtida será desprovida de sentido.

Existem vários critérios de convergência de integrais impróprios. Todos eles têm uma justificação geométrica bastante simples e todos eles têm semelhanças com alguns critérios de convergência de séries.

A ideia de base em todos os critérios de comparação é a seguinte: se uma figura geométrica está incluída dentro de outra, então a área da primeira é menor do que a área da segunda. Um caso particular é o caso em que o gráfico duma função f positiva está acima do doutra função g; então o gráfico de f limita uma área maior do que a de g, pelo que se o integral impróprio de f convergir então o de g também converge (Figura 5.25) e, reciprocamente, se o integral impróprio de g divergir, então o de f também diverge.

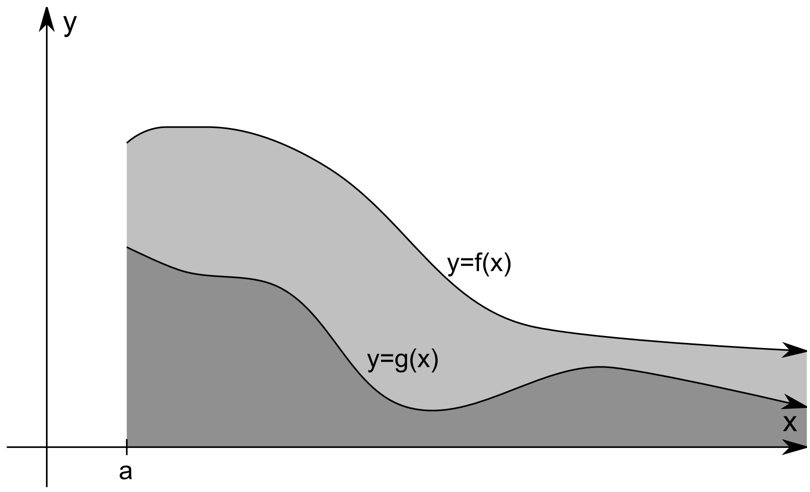


Figura 5.25: Critério geral de comparação para integrais impróprios de 1ª espécie. Se a área sob o gráfico de f (toda a área sombreada) for finita, então a área sob o gráfico de g (sombreado claro) também é; se a área sob o gráfico de g for infinita, então a área total também o será.

Proposição (Critério geral de comparação)**.** Sejam f, g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo o $x \in [a, +\infty[$.

1. Se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f$ convergir, então $\int_a^{+\infty} g$ converge e $\int_a^{+\infty} g \leq \int_a^{+\infty} f$.
2. Se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} g$ divergir, então $\int_a^{+\infty} f$ diverge.

O critério geral de comparação permite determinar a convergência/divergência de muitos integrais impróprios envolvendo funções que não são elementarmente primitiváveis, recorrendo nomeadamente à comparação com funções da forma x^α.

Exemplo.

1. O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{|\sin(x)|}$ é divergente. De facto, para $x \in [1, +\infty[$ tem-se a relação $0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \leq x$, donde $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{|\sin(x)|}$. Uma vez que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, conclui-se que o integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{|\sin(x)|}$ é também ele divergente.

2. Já o integral impróprio $\int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,dx$ converge. Uma vez que $0 \le |\sin(x)| \le 1$, tem-se também $0 \le \frac{|\sin(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$; ora $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, logo $\int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,dx$ também converge.

3. O integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente. Escrevendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,,$$

   temos que o primeiro integral é um integral definido (próprio), enquanto que em $[1,+\infty[$ se tem $x \le x^2$ e portanto $-x^2 \le -x$, donde $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Uma vez que $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente, deduz-se que os integrais $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ e $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ também o são.

Para integrais do tipo $\int_{-\infty}^b f$ ou $\int_{\mathbb{R}} f$, o critério geral de comparação mantém-se válido com as adaptações previsíveis.

Exercício 21. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2}\,dx$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{|\sin(2x+1)|}{x^3}\,dx$

Uma generalização deste critério consiste em calcular o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Se este limite for 0, então existe um ponto a a partir do qual $f(x) < g(x)$ e podemos aplicar o critério geral de comparação; se o limite for $+\infty$, então existe um ponto a a partir do qual $g(x) < f(x)$ e podemos novamente aplicar o critério geral de comparação. Mais interessante é o caso em que o limite é um valor finito k. Neste caso, existe um ponto a a partir do qual $\frac{k}{2}f(x) < g(x) < 2kf(x)$; mas os integrais de $\frac{k}{2}f$ e $2kf$ têm a mesma natureza do integral de f (são ambos convergentes ou ambos divergentes), devido à linearidade do integral, pelo que o critério geral de comparação se aplica mais uma vez para permitir concluir que o integral de g também é da mesma natureza que aqueles dois.

Proposição (Critério da razão)**.** Sejam f, g duas funções definidas em $[a,+\infty[$ com valores positivos e suponha-se que existe $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ com valor k.

1. Se $k = 0$, então:
   (a) se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} g$ convergir, então $\int_a^{+\infty} f$ converge;
   (b) se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f$ divergir, então $\int_a^{+\infty} g$ diverge.
2. Se $k = +\infty$, então:
   (a) se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f$ convergir, então $\int_a^{+\infty} g$ converge;
   (b) se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} g$ divergir, então $\int_a^{+\infty} f$ diverge.
3. Se $0 < k < +\infty$ então os integrais $\int_a^{+\infty} f$ e $\int_a^{+\infty} g$ têm a mesma natureza.

Tal como atrás, este critério também é aplicável aos integrais da forma $\int_{-\infty}^{b} f$ ou $\int_{\mathbb{R}} f$, com as adaptações óbvias. Na prática, este critério é muito mais simples de usar do que o critério geral de comparação.

Exemplo.

1. Vejamos que $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^4-x^3+1}\,dx$ converge aplicando este critério. Intuitivamente, a função integranda é da ordem de grandeza de $\frac{1}{x^2}$, portanto vamos comparar com esta.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+2x-3}{x^4-x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^4-x^3+1} = 1$$

   Então os integrais $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^4-x^3+1}\,dx$ e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ são da mesma natureza. Uma vez que o segundo é um integral convergente, concluimos que $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^4-x^3+1}\,dx$ converge.

2. Estudemos agora o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$. Intuitivamente, o comportamento dominante é o da exponencial; porém, se compararmos este integral com o de e^{-x^2} vamos obter um limite infinito, que não nos permite concluir nada.

   Mas x^2 é dominado por *qualquer* exponencial, pelo que podemos majorar esse termo por $e^{\frac{x^2}{2}}$ e comparar a função integranda com $e^{-\frac{x^2}{2}}$. De facto, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0\,.$$

   Uma vez que já estabelecemos atrás a convergência de $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, concluimos que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}$ também é um integral convergente.

3. Vejamos o caso de $\int_{-\infty}^{\frac{2}{\pi}} \tan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$. Uma vez que não é nada claro que a função integranda seja primitivável, a melhor opção é usar o critério geral de comparação.

   Se comparamos esta função com $\frac{1}{x}$, obtemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0^-} \frac{\tan(y)}{y} = 1\,,$$

   donde o integral considerado é da mesma natureza de $\int_{-\infty}^{\frac{2}{\pi}} \frac{dx}{x}$, e portanto diverge.

Exercício 22. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-\sin^2(x)}$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$

Até agora, todos os critérios de convergência que considerámos assumiam que a função integranda era positiva. Obviamente que podemos obter critérios semelhantes para integrais de funções positivas, já que por linearidade do integral temos $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$; porém, em muitas situações estamos interessados em integrar funções que mudam infinitas vezes de sinal. Em particular, integrais impróprios de primeira espécie envolvendo senos e cosenos ocorrem sistematicamente em Teoria de Sinais.

O tratamento destes integrais é em geral mais complexo, e não é fácil provar a sua convergência. O único critério simples de utilizar, semelhante a um dos critérios de convergência de séries, é relativamente fraco.

Proposição (Critério do módulo)**.** Seja $f : [a \to +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função real. Se $\int_a^{+\infty} |f|$ converge, então $\int_a^{+\infty} f$ também converge e tem-se a relação

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx\,.$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação deste critério.

Exemplo.

1. Vimos num dos exemplos anteriores que o integral impróprio $\int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,dx$ converge. Uma vez que x^2 é sempre positivo, podemos concluir que $\int_5^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ também é convergente, pois $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| = \frac{|\sin(x)|}{x^2}$.

2. O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{|\sin(x)|}$ é divergente. Assim, não podemos concluir nada acerca da convergência ou divergência de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sin(x)}$: o critério do módulo só pode ser aplicado para concluir convergência dum integral.

Exercício 23. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ (c) $\int_1^{+\infty} \sin(x)e^{-ax}$, se $a > 0$

5.6.3 Relação com as séries

Os integrais impróprios de primeira espécie têm uma relação muito próxima com as séries, expressa através do seguinte resultado.

Teorema (Critério do Integral)**.** Sejam $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função positiva e decrescente e a a sucessão cujo termo geral é $a_n = f(n)$ para todo o $n \geq 1$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é da mesma natureza do integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Este critério tanto pode ser usado para provar convergência de séries a partir da convergência de integrais como ao contrário. Podemos usá-lo, por exemplo, para mostrar o resultado que enunciámos sobre séries de Dirichlet: a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge precisamente se $\alpha > 1$. De facto, a função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é uma função positiva e decrescente que satisfaz $f(n) = \frac{1}{n^\alpha} = a_n$; uma vez que

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge precisamente quando $\alpha > 1$ (como verificámos directamente por primitivação, concluimos o resultado análogo para séries.

A validade deste critério é muito simples de verificar: nas condições do teorema, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

corresponde a uma área que envolve o gráfico de f (Figura 5.26 (a)), enquanto que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

corresponde a uma área completamente sob o gráfico de f (Figura 5.26 (b)). Então

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

donde o integral e a série são necessariamente ambos convergentes ou ambos divergentes.

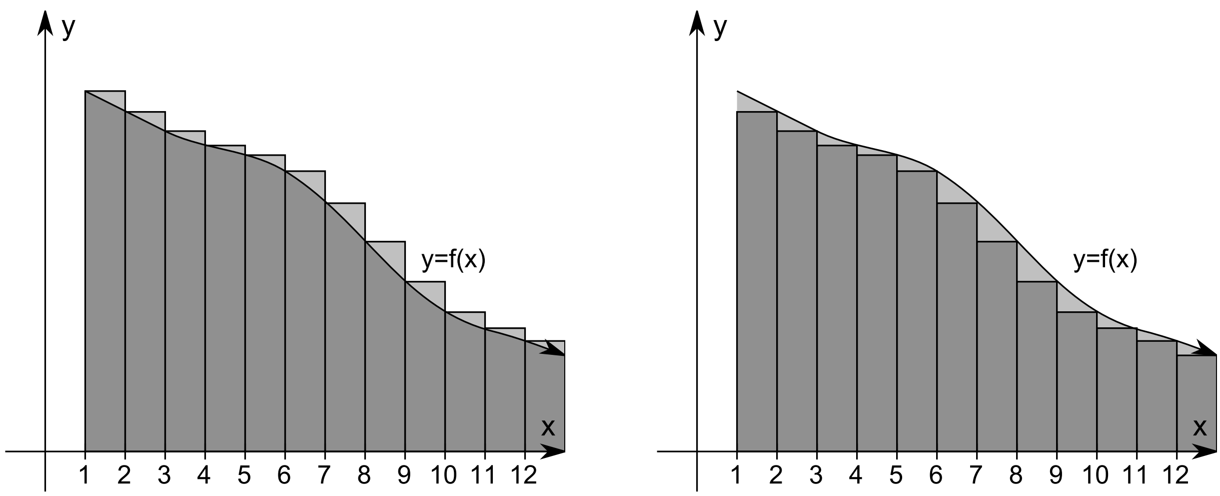


Figura 5.26: Relação entre séries e integrais impróprios de 1ª espécie. Em (a), cada rectângulo tem base 1 e altura a_n, com $n \geq 1$; em b, cada rectângulo tem as mesmas dimensões, mas agora com $n \geq 2$.

Exemplo.

1. No Capítulo 1, estabelecemos a convergência das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{3n^2+1}\right)^{2n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{3^n-2}$$

e a divergência das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right).$$

Uma vez que em todas elas o termo geral é positivo e decrescente, o critério do integral diz-nos que os integrais

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^2+3}{3x^2+1}\right)^{2x+3} dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2^x+3}{3^x-2}\, dx$$

são convergentes e os integrais

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{x}\right) dx\,.$$

são divergentes.

2. Vimos atrás que os integrais

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^4-x^3+1}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

são convergentes e os integrais

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log|x|} \qquad \int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\log|x|}$$

são divergentes. Uma vez que em todos eles a função integranda é positiva e decrescente, o critério do integral diz-nos que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2n-3}{n^4-n^3+1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

convergem e as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log|n|} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log|n|}$$

divergem.

Exercício 24. Recorrendo ao critério do integral, estude a convergência das seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$

Exercício 25. Recorrendo ao critério do integral, estude a convergência dos seguintes integrais.

(a) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right) dx$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{2^x}\, dx$ (c) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\log(x)}$

5.6.4 Integrais impróprios de 2ª espécie

O segundo tipo de integrais impróprios é um pouco diferente: trata-se de integrais num intervalo $[a, b]$, mas em que a função integranda não é limitada.

Definição. Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. A expressão

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

diz-se um *integral impróprio (definido) de segunda espécie.*

O tratamento deste tipo de integrais é muito semelhante ao dos integrais impróprios de 1ª espécie.

Novamente, o primeiro passo é perceber quando é que este integral impróprio tem um valor finito (converge). Mais uma vez, vamos raciocinar em termos de áreas: a área sob o gráfico de f pode ser aproximada por um integral definido (próprio) em que o extremo inferior de integração é substituído por um ponto próximo de a mas superior. Se o valor do integral convergir para um limite quando esse ponto se aproxima de a, dizemos que o integral impróprio *converge* e o seu valor é esse limite.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e calculemos o seu integral impróprio entre 0 e 1. Uma vez que a função é ilimitada numa vizinhança de 0, vamos substituir este ponto por pontos arbitrariamente próximos. Sendo $\varepsilon > 0$, temos que

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Quando $\varepsilon \to 0$, este valor tende para 2. Então o integral de f entre 0 e 1 converge, e tem-se

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,.$$

Também aqui é comum abreviar a notação omitindo o sinal de limite, pelo que a igualdade acima se poderia escrever como

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2\,.$$

É preciso ter cuidado com esta notação, uma vez que não deixamos de estar a trabalhar com limites — embora este facto deixe de ser óbvio, contrariamente ao que sucedia atrás.

O integral impróprio de 2ª espécie tem um significado geométrico muito concreto: a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre $x = 0$ e $x = 1$ é ilimitada, mas é finita. Na prática, surgem problemas concretos que conduzem ao cálculo dum integral definido mas impróprio, não deixando o problema por isso de ser resolúvel — desde que o integral convirja.

Exemplo.

1. O integral impróprio $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ não é convergente. De facto, tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2} = +\infty\,.$$

2. Mais uma vez, podemos fazer o estudo de todos os integrais da forma $\int_0^b x^\alpha\,dx$ de forma sistemática. Observe-se que se $\alpha \geq 0$ estamos perante um integral próprio, pelo que não há qualquer problema em calcular o seu valor. Se $\alpha < 0$, a primitiva de x^α é $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ se $\alpha \neq -1$, e $\log(x)$ caso contrário. Neste último caso, temos que

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = [\log(x)]_0^b = \log(b) - \log(0) = +\infty\,,$$

logo o integral é divergente; para $\alpha \neq -1$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{se } \alpha > -1\\ +\infty & \text{se } \alpha < -1\end{cases}\end{aligned}$$

Concluimos assim que estes integrais convergem precisamente se $\alpha > -1$.

3. Vamos agora estudar o integral impróprio $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan(x)\,dx$; note-se que $\tan(x)$ é ilimitada quando x se aproxima de $-\frac{\pi}{2}$.

Temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan(x)\,dx = [\log|\cos(x)|]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 0-(-\infty) = +\infty\,,$$

donde este integral impróprio é divergente.

4. Finalmente, consideremos o integral impróprio $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, cuja função integranda é ilimitada na vizinhança de -1. Uma vez que a primitiva de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é $\arcsin(x)$, podemos concluir que

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin(x)]_{-1}^0 = \arcsin(0) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}\,,$$

donde este integral impróprio converge.

Exercício 26. Estude a natureza dos seguintes integrais e, no caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\int_0^2 \frac{\log(x)}{x}\,dx$ (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan(x)\,dx$ (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$

Também nos integrais impróprios de segunda espécie há dois outros casos a considerar, que se reduzem todos ao caso apresentado. Quando a função integranda é ilimitada numa vizinhança do extremo *superior* do intervalo de integração, definimos de forma semelhante

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,.$$

Assim, temos por exemplo que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\,dx = \frac{1}{2}\left[\log|x+1|-\log|x-1|\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}(\log(2)-\log(0)-\log(1)+\log(1)) = +\infty\end{aligned}$$

e portanto este integral é divergente.

O outro caso é mais perigoso e alerta para a conveniência de esboçar graficamente a função integranda no intervalo a integrar: diz respeito ao caso em que f é ilimitada numa vizinhança de $c\in]a,b[$. Neste caso, usamos a aditividade do integral para escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

e o integral entre a e b converge se *ambos* os integrais impróprios do lado direito da equação convergirem. Note-se que, contrariamente aos integrais impróprios de primeira espécie, aqui a escolha do ponto c não é arbitrária: tem de ser necessariamente o ponto onde a função é ilimitada.

Suponhamos que queríamos calcular $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1}$. Uma vez que a função integranda é ilimitada em torno do ponto 1, vamos escrever este integral como

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}\,.$$

Ora vimos atrás que o primeiro destes integrais diverge, logo o integral $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1}$ é divergente.

Por outro lado, se pretendessemos calcular $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$, teríamos de decompor este integral pelo ponto 0, obtendo

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

e o segundo destes integrais é convergente (vimos acima); quanto ao primeiro, corresponde à área duma figura que é simétrica da primeira (a função $\sqrt{|x|}$ é par), pelo que terá o mesmo valor. Temos então que $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é convergente e tem o valor $2+2=4$.

Exercício 27. Estude a natureza dos seguintes integrais e, no caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ (c) $\int_0^\pi \tan(x)\,dx$

Novamente, em muitos casos os valores dos integrais impróprios de segunda espécie vão ser determinados por aproximação, pelo que importa conseguir determinar previamente se um dado integral é ou não convergente. Temos mais uma vez um conjunto de critérios de convergência, bastante semelhantes aos critérios existentes para integrais impróprios de primeira espécie, com as mesmas justificações geométricas.

Proposição (Critério geral de comparação)**.** Sejam f, g duas funções definidas em $]a, b]$ e ilimitadas numa vizinhança de a tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo o $x \in]a, b]$.

1. Se o integral impróprio $\int_a^b f$ convergir, então $\int_a^b g$ converge e $\int_a^b g \leq \int_a^b f$.
2. Se o integral impróprio $\int_a^b g$ divergir, então $\int_a^b f$ diverge.

Tal como atrás, o critério geral de comparação permite determinar a convergência ou divergência de muitos integrais impróprios recorrendo à comparação em particular com integrais da forma x^α.

Exemplo.

1. O integral impróprio $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$ é divergente. De facto, para $x \in [0, 1]$ tem-se $0 \leq \sin(x) < x$ (consequência do desenvolvimento de $\sin(x)$ em série de Taylor), donde

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}\,.$$

Uma vez que $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge, conclui-se que o integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$ é também ele divergente.

2. Já o integral impróprio $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$ converge. Uma vez que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

existe um intervalo $[0, a]$ onde $\frac{x}{2} < \sin(x)$; nesse intervalo,

$$0 \leq \frac{x}{2} < \sin(x) \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{x}{2}} < \sqrt{\sin(x)} \Longrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} < \frac{4}{\sqrt{x}}\,,$$

e uma vez que $\int_0^a \frac{4\,dx}{\sqrt{x}}$ converge temos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}} + \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$$

também é convergente.

Exercício 28. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\int_0^1 \frac{1+2x}{1-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\int_0^1 \frac{dx}{x+x(\log(x))^2}$

Podemos mais uma vez generalizar este critério em termos do limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no ponto a onde f e g são ilimitadas.

Proposição (Critério da razão)**.** Sejam f, g duas funções definidas em $]a, b]$, com valores positivos nesse intervalo e ilimitadas numa vizinhança de a, e suponha-se que existe $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ com valor k.

1. Se $k = 0$, então:
   (a) se o integral impróprio $\int_a^b g$ convergir, então $\int_a^b f$ converge;
   (b) se o integral impróprio $\int_a^b f$ divergir, então $\int_a^b g$ diverge.
2. Se $k = +\infty$, então:
   (a) se o integral impróprio $\int_a^b f$ convergir, então $\int_a^b g$ converge;
   (b) se o integral impróprio $\int_a^b g$ divergir, então $\int_a^b f$ diverge.
3. Se $0 < k < +\infty$ então os integrais $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ têm a mesma natureza.

Exemplo.

1. Vejamos novamente que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$ converge aplicando este critério.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x}{\sin(x)}} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)}} = 1$$

   Então os integrais $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ são da mesma natureza. Uma vez que o segundo é um integral convergente, concluimos que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$ converge.

2. Estudemos agora o integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2(x)}$. A função integranda tem problemas numa vizinhança de 0, pelo que interessa separar este integral em

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2(x)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{x\,dx}{\sin^2(x)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2(x)},$$

   sendo o integral do lado esquerdo desta igualdade convergente apenas se os dois integrais impróprios do lado direito o forem também.

   Convém começar por perceber qual o comportamento esperado deste integral e com que função convém comparar. Uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, sabemos que as funções x e $\sin(x)$ têm um comportamento semelhante próximo da origem. Então, é de esperar que $\frac{x}{\sin^2(x)}$ seja semelhante a $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; vamos então tentar aplicar o critério da razão com essa função.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = 1$$

   Concluimos portanto que os integrais de $\frac{1}{x}$ e $\frac{x}{\sin^2(x)}$ se comportam da mesma forma próximo da origem. Uma vez que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dx}{x}$ diverge, concluimos que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{x\,dx}{\sin^2(x)}$ é divergente, e portanto também o é $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2(x)}$.

Observe-se que a função do último exemplo é uma função primitivável (por partes, primitivando $\frac{1}{\sin^2(x)}$ como $\cot(x)$); contudo, a regra de Barrow não pode ser aplicada para calcular o seu valor, uma vez que a função integranda não é contínua em todos os pontos do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercício 29. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\int_0^1 \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3}\,dx$

Finalmente, temos também o critério do módulo.

Proposição (Critério do módulo)**.** Seja $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ uma função real ilimitada numa vizinhança de a. Se o integral impróprio $\int_a^b |f|$ converge, então $\int_a^b f$ também converge e tem-se a relação

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Na prática este critério não é tão importante como o critério análogo para integrais impróprios de primeira espécie, uma vez que as funções mais comuns não têm infinitas alternâncias de sinal em intervalos limitados. Porém, há alguns casos assim; um exemplo de integral cuja convergência pode ser provada por este critério é $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$. Este integral é convergente, uma vez que no intervalo $[0,1]$

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge.

Exercício 30. Estude a convergência dos seguintes integrais impróprios.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)\,dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}\,dx}{\sqrt{x}}$

5.6.5 Integrais impróprios mistos

Nalguns casos, encontramos integrais que misturam uma componente imprópria de 1ª espécie com uma componente imprópria de 2ª espécie. Por exemplo: para determinar a convergência de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-1}$$

temos de dividir este integral nos quatro pontos onde há problemas: $-\infty$, -1, 1 e $+\infty$. No primeiro e último, temos um integral impróprio de primeira espécie; nos dois intermédios temos um integral impróprio de segunda espécie.

Neste caso, poderíamos escrever por exemplo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \\ + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}\,.$$

O segundo destes integrais é divergente (de acordo com a aplicação do critério da razão, comparando com o integral divergente de $\frac{1}{x+1}$), logo $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-1}$ também o será.

Exercício 31. Estude a natureza dos seguintes integrais e, no caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ (c) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

Exercício 32. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x-1}}$ (b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{t+1}{\sqrt{t^3}}\,dt$

5.6.6 Valor principal de Cauchy

No caso dos integrais divergentes do tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, podemos considerar uma aproximação diferente: em vez de estudar independentemente os integrais $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, podemos calcular directamente o limite

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Quando este limite existir e for finito, diz-se que é o *valor principal de Cauchy* do integral impróprio; nesta situação, diz-se que o integral é *convergente em valor principal*.

Obviamente que no caso dos integrais impróprios convergentes o seu valor coincide com o seu valor principal de Cauchy. O interesse deste conceito é permitir atribuir um valor a integrais que são divergentes — valor esse que em determinadas aplicações faz sentido considerar.

Vejamos alguns exemplos. Se calcularmos $\int_{-\infty}^{0} \sin(x)\,dx$, concluimos que este integral é divergente, já que

$$\int_{-\infty}^{0} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_{-\infty}^{0}$$

não tem limite. Porém, se calcularmos o seu valor principal de Cauchy obtemos

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \sin(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \underbrace{[-\cos(x)]_{-a}^{a}}_{0} = 0$$

Em geral, qualquer função f que seja ímpar tem valor principal de Cauchy 0, desde que os integrais $\int_{-a}^{a} f$ convirjam para qualquer valor de a. De facto, a primitiva de qualquer função ímpar é sempre uma função par, pelo que somada entre $-a$ e a dará 0. Assim, temos que

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} x^3\, dx = 0 \qquad \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0 \qquad \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x^2+1} = 0$$

entre outros.

Em geral, claro está, a única forma de calcular o valor principal de Cauchy dum integral impróprio é recorrendo à definição.

Exercício 33. Calcule o valor principal de Cauchy dos seguintes integrais.

(a) v.p. $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ (b) v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ (c) v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^2}\, dt$

5.7 Exercícios

34. Calcule o valor dos seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{2-e^x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int_3^{8} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \left|x^2-1\right|\, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2}\, dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4x^3}{1+x^4}\, dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}\, dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(y)}{6-5\sin(y)}\, dy$

(k) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{y^2}{y+2}\, dy$

(l) $\displaystyle\int_0^{1} xe^{-x}\, dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^4(x)\, dx$

(n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\, dx$

(o) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx$

(p) $\displaystyle\int_0^{1} \left(e^x-1\right)^4 e^x\, dx$

(q) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

(r) $\displaystyle\int_0^{e-1} \log(x+1)\, dx$

(s) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x}{1+x^4}\, dx$

(t) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x^3-2x^2+3}{\sqrt{x}}\, dx$

(u) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{2x+1}{x}\, dx$

(v) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\sin^5(x)+\cos^3(x)\right)\, dx$

(w) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan(x)+\cot^3(x)\right)\, dx$

35. Calcule a área sob os gráficos das seguintes funções.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ com $x \in [-2,-3]$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\log(x)}}$ com $x \in [1, e^3]$

(c) $h(x) = \dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$ com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(d) $f(x) = x^3+4x-1$ com $x \in [0,3]$

(e) $f(x) = x\cos^2(x)$ com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(f) $h(x) = |\sin(4x)|$ com $x \in [0, \pi]$

(g) $f(x) = x^2 e^{x^3}$ com $x \in [0, 1]$

(h) $f(x) = \sin(2x)\sin(x)$ com $x \in [0, \pi]$

(i) $f(x) = \tan(x)$ com $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

36. Calcule $\int_0^3 f$, onde f é a função definida da seguinte forma.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x + 1 & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

37.

(a) Use a substituição $1 - x = t$ para calcular $\int_0^1 x^2(1-x)^7\, dx$.

(b) Mostre que $\int_0^1 x^p(1-x)^q\, dx = \int_0^1 x^q(1-x)^p\, dx$.

38. O *valor médio* duma função f num intervalo $[a, b]$ em que f seja contínua é o valor

$$\overline{f} = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}.$$

Determine o valor médio de:

(a) $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ em $[0, 2]$;

(b) $f(x) = \sin^2(x)$ em $[0, \pi]$.

39. Mostre que as seguintes relações são válidas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \geq \int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$

(b) $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x + 1}\, dx\right| \leq \log 2$

40. Resolva a equação seguinte.

$$\int_0^x \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \frac{\pi^2}{32}$$

41. Sendo f uma função positiva com derivada contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a) = 5$ e $f(b) = 1$, calcule os seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_a^b f^2(x) f'(x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$

42. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\displaystyle\int_0^1 f = 1$. Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{f(\log(x))}{2x}\, dx$.

43. Calcule a área das regiões do plano delimitadas pelas seguintes curvas.

(a) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y^2 = x \\ y = |x - 2| \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = \sin(\pi x) \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x + 6 \\ y = 0 \end{cases}$

44. Calcule a área das regiões do plano definidas pelas seguintes condições.

(a) $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq \frac{x^2}{2} \\ y \leq 2x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y \geq -x^2 \\ y \leq -3x^2 + 4 \end{cases}$

45. Calcule a área das regiões do plano definidas pelas seguintes condições integrando em relação à variável y.

(a) $\begin{cases} x \geq y^2 \\ y \geq 1 \\ y \geq x - 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y \geq 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ x \geq y^2 \end{cases}$

46. Calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação em torno do eixo dos xx da região do plano definida pelas seguintes condições.

(a) $\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x^2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y \geq 3x \\ y^2 \leq 9x \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x \geq y^2 \\ y \geq x - 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y \geq \sqrt{x} \\ y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y \geq \frac{x^2}{8} \\ y \leq x \\ y \leq \frac{1}{x} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x \geq y^2 \\ y \geq 1 \\ y \geq x - 2 \end{cases}$

47. Considere a região D definida pelas seguintes condições.

$$\begin{cases} y \leq \frac{x^2}{2} \\ y \geq -x \\ x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Determine a área da região D.
(b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de D em torno do eixo vertical.
(c) Determine o perímetro de D.

48. Estude a natureza dos seguintes integrais e, no caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-5)^{\frac{2}{3}}}$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_3^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$ (h) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\log(x)}$ (i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$

49. Estude a natureza dos seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dt}{t^2-9}$ (g) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{16-x^4}}$ (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3(1-x)^p\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \log(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{\sin(2x+1)}{x^3}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$

50. Calcule a área das seguintes regiões do plano.

(a) A região entre os gráficos de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$ com $x \geq 1$.

(b) A região entre o gráfico de $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e a sua assímptota.

(c) A região entre o gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ e a sua assímptota.

Bibliografia

[1] H. Anton, I. Bivens e S. Davis, *Calculus*. John Wiley & Sons, 8ª edição. ISBN 0-471-48273-0.

[2] M. Arnalda, *Análise Matemática I*. Escola Náutica Infante D. Henrique, 2004.

[3] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, 6ª edição, 1995. ISBN 972-31-0179-3.

[4] B. Demidovitch, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*. Escolar Editora, 1ª edição, 2010. ISBN 9789725922835.

[5] R. Harshbarger e J. Reynolds. *Matemática Aplicada: Administração, Economia e Ciências Sociais e Biológicas*. Tradução de A. Griesi e O.K. Asakura. McGraw–Hill, São Paulo, 7ª edição. ISBN 85-86804-84-3.

[6] M. Spivak, *Calculus*. Cambridge University Press, 3ª edição. ISBN 978-0-521-86744-3.

[7] J. Stewart, *Cálculo*, vol. 1. Tradução de A.C. Moretti e A.C.G. Martins. Cengage Learning, Austrália, 5ª edição. ISBN 85-221-0479-4.