ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

MÉTODOS NUMÉRICOS

Exercícios 2011/2012

1 Resolução de equações

Localização de raízes

1. Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados.

   (a) $x^3 + 4x^2 - 10$ em $[1, 2]$

   (b) $x^2 - 2^{-x}$ em $[0, 1]$

   (c) $e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6$ em $[1, 2]$

   (d) $e^x - x^2 + 3x - 2$ em $[0, 1]$

2. Encontre intervalos contendo cada uma das soluções das seguintes equações.

   (a) $\sin(x) = \log(x)$ (uma solução)

   (b) $e^x = 2 - x$ (uma solução)

   (c) $x^2 - 2x = \sin(x)$ (duas soluções)

   (d) $2x^3 + 3 = 2x^2 + 5x$ (três soluções)

   (e) $x^3 - x - 1 = 0$

   (f) $x^3 + x - 4 = 0$

   (g) $3x^2 - e^x = 0$

3. Escreva cada uma das seguintes constantes como solução duma equação da forma $f(x) = 0$.

   (a) $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\sqrt{3} + 1$ (c) $\log(2)$ (d) $\frac{\pi}{2}$

4. Escreva as constantes do exercício anterior como solução duma equação da forma $f(x) = x$.

5. Localize todas as raízes da função $x^2 + 10\cos(x)$.

Método da bissecção

6. Determine o número de iterações necessárias para encontrar a solução de $x^3 - x - 1 = 0$ em $[1, 2]$ com um erro inferior a 10^{-4} recorrendo ao método da bissecção.

7. Repita o exercício anterior para o problema de encontrar a solução de $x^3 + x - 4 = 0$ em $[1, 4]$ com um erro inferior a 10^{-3}.

8. Recorra ao método da bissecção para encontrar raízes das funções do Exercício 1 nos intervalos indicados com um erro inferior a 10^{-5}.

9. Aplique o método da bissecção para encontrar todas as soluções das equações do Exercício 2 com um erro absoluto inferior a 10^{-5}.

10. Recorra ao método da bissecção para determinar valores aproximados de cada uma das constantes do Exercício 3 com um erro absoluto inferior a 10^{-7}.

11. Usando o método da bissecção, encontre valores aproximados de $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{25}$ com precisão de duas casas decimais.

12. Recorrendo ao método da bissecção, encontre todos os zeros da função com expressão $x^2 + 10\cos(x)$ com quatro algarismos de precisão.

13. Implemente o método da bissecção em MatLab.

Métodos de falsa posição

14. Recorra ao método da falsa posição para encontrar raízes das funções do Exercício 1 nos intervalos indicados com um erro inferior a 10^{-5}.

15. Aplique o método da falsa posição para encontrar todas as soluções das equações do Exercício 2 com um erro absoluto inferior a 10^{-5}.

16. Recorra ao método da falsa posição para determinar valores aproximados de cada uma das constantes do Exercício 3 com um erro absoluto inferior a 10^{-7}.

17. Usando o método da falsa posição, encontre valores aproximados de $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{25}$ com precisão de duas casas decimais.

18. Recorrendo ao método da falsa posição, encontre todos os zeros da função com expressão $x^2 + 10\cos(x)$ com quatro algarismos de precisão.

19. Resolva os Exercícios 14 a 18 recorrendo ao método da falsa posição modificado. Compare o número de iterações requeridas em cada caso.

20. Implemente os métodos da falsa posição e da falsa posição modificado em MatLab.

Método do ponto fixo

21. Mostre que o método do ponto fixo converge quando aplicado à função g definida por $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ no intervalo $[0,1]$.

22. Considere o problema de resolver a equação $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ no intervalo $[1,2]$.

    (a) Mostre que esta equação pode ser reescrita das cinco formas seguintes.

    i. $x = x - x^3 - 4x^2 + 10$

    ii. $x = \sqrt{\dfrac{10}{x} - 4x}$

    iii. $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

    iv. $x = \sqrt{\dfrac{10}{4+x}}$

    v. $x = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

    (b) Para quais destas versões é que pode garantir que o método do ponto fixo converge? Calcule o número de iterações necessário para obter uma solução com erro inferior a 10^{-5}.

    (c) Aplique o método do ponto fixo a cada uma das equações acima até (i) poder garantir que o erro é inferior a 10^{-5}, (ii) não ser possível prosseguir ou (iii) poder concluir que o método diverge. Compare estes resultados com os obtidos na alínea anterior.

23. Considere a equação $z - \sin(Az) - \sin(B) = 0$, onde A e B são constantes arbitrárias.
    (a) Mostre que a equação tem uma única raiz se $A \in]-1, 1[$, para qualquer valor de B.
    (b) Nas condições da alínea anterior, mostre que o método do ponto fixo converge para $z_0 = 0.1$.
    (c) Verifique experimentalmente que o método diverge para $A = 2.5$ e $B = 0$.

24. Recorrendo ao método do ponto fixo, resolva cada uma das seguintes equações com o erro indicado. Compare o número de iterações efectuado com o valor teórico previsto.
    (a) $x = 2^{-x}$ em $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ com erro inferior a 10^{-4}
    (b) $x = \pi + \frac{\sin(x)}{2}$ em $[0, 2\pi]$ com erro inferior a 10^{-2}
    (c) $x^3 - x - 1 = 0$ em $[1, 2]$ com erro inferior a 10^{-5}

25. Usando o método do ponto fixo, encontre valores aproximados de $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{25}$ com precisão de duas casas decimais.

26. Para cada uma das seguintes funções, determine um intervalo para o qual possa garantir que o método do ponto fixo converge.
    (a) $f(x) = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$
    (b) $f(x) = 4^{-x}$
    (c) $f(x) = 5^{-x}$
    (d) $f(x) = 6^{-x}$
    (e) $f(x) = 1.75 + \dfrac{4x - 7}{x - 2}$

27. Recorrendo ao método do ponto fixo, encontre todos os zeros da função com expressão $x^2 + 10\cos(x)$ com quatro algarismos de precisão.

28. Implemente o método do ponto fixo em MatLab.

Métodos de Newton–Raphson e da secante

29. Recorra ao método de Newton–Raphson para encontrar raízes das funções do Exercício 1 nos intervalos indicados com um erro inferior a 10^{-5}.

30. Aplique o método de Newton–Raphson para encontrar todas as soluções das equações do Exercício 2 com um erro absoluto inferior a 10^{-5}.

31. Recorra ao método de Newton–Raphson para determinar valores aproximados de cada uma das constantes do Exercício 3 com um erro absoluto inferior a 10^{-7}.

32. Usando o método de Newton–Raphson, encontre valores aproximados de $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{25}$ com precisão de duas casas decimais.

33. Recorrendo ao método de Newton–Raphson, encontre todos os zeros da função com expressão $x^2 + 10\cos(x)$ com quatro algarismos de precisão.

34. Resolva os Exercícios 29 a 34 recorrendo ao método da secante. Compare o número de iterações requeridas e os resultados obtidos em cada caso.

35. Resolva a equação $4\cos(x) = e^x$ com erro inferior a 10^{-4} das seguintes formas:

(a) aplicando o método de Newton–Raphson a partir do valor inicial $x_0 = 1$;

(b) aplicando o método da secante a partir dos valores iniciais $x_{-1} = \frac{\pi}{4}$ e $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

36. Aplique o método de Newton para resolver a equação

$$\left(\sin(x) - \frac{x}{2}\right)^2 = 0$$

com erro inferior a 10^{-5} a partir do ponto inicial $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Comente os resultados obtidos.

37. Calcule dez iterações da aplicação do método de Newton à resolução da equação

$$\frac{4x - 7}{x - 2} = 0$$

a partir dos pontos iniciais seguintes.

(a) 1.625 (b) 1.5 (c) 1.875 (d) 1.95

Interprete graficamente os resultados obtidos.

38. Implemente os métodos de Newton–Raphson e da secante em MatLab.

Aceleração de Aitken e método de Steffenson

39. Melhore os resultados obtidos nos Exercícios 8, 14 e 29 recorrendo à fórmula de aceleração de Aitken.

40. Resolva novamente os Exercícios 24, 25 e 27 recorrendo ao método de Steffenson. Compare os resultados com os obtidos anteriormente.

41. Implemente em MatLab o método de Steffenson.

2 Teoria da Aproximação

Método dos Mínimos Quadrados

1. Encontre a melhor solução aproximada dos seguintes sistemas de equações lineares.

(a) $\left\{\begin{aligned} x+2y &= 0\\ x-y &= 1\\ x &= 1\\ y-x &= 0 \end{aligned}\right.$ (b) $\left\{\begin{aligned} x+2y &= 1\\ 2x-3z &= 0\\ x+y-2z &= 1\\ z+y-x &= 0 \end{aligned}\right.$ (c) $\left\{\begin{aligned} x+2y &= 1\\ z-y &= -1\\ x+z-w &= 2\\ z+w &= 0\\ x+y+z+w &= 1 \end{aligned}\right.$

2. Considere o seguinte conjunto de valores.

x	1	0.5	0.2	1.4	0.7	-0.5	1.1	-0.2	-0.1
y	2.730	1.306	1.398	4.280	1.732	2.502	3.687	1.772	1.507

(a) Supondo que a dependência de **y** em função de **x** é linear, aplique o método de regressão linear para calcular a expressão aproximada que relaciona as duas variáveis.

(b) Supondo agora que **y** e **x** estão relacionados por uma dependência quadrática, encontre a expressão aproximada dessa relação recorrendo ao método dos mínimos quadrados.

(c) Supondo que a relação entre **y** e **x** é do tipo $\mathbf{y} = A\sin(\mathbf{x}) + B$, aplique o método dos mínimos quadrados para determinar os valores de A e B.

3. A tabela seguinte apresenta os resultados de dez alunos nos dois testes duma disciplina. Sabendo que existe uma correlação linear, determine a expressão que melhor representa de forma aproximada a nota do segundo teste em função da nota do primeiro teste.

T1	10.0	11.2	9.0	8.7	13.2	15.1	14.2	8.7	9.5	11.4
T2	10.5	10.4	9.8	9.7	12.8	13.8	13.7	9.8	10.2	10.3

4. A tabela seguinte indica o peso e altura de um conjunto de indivíduos.

Altura (cm)	179	165	172	185	176	170	165	168	172	180
Peso (kg)	58	62	68	90	75	84	74	65	60	76

Altura (cm)	171	165	180	181	173
Peso (kg)	71	72	80	75	73

(a) Calcule a recta de regressão associada a este conjunto de dados.

(b) Suponha agora que a relação entre o peso e a altura é quadrática. Calcule a expressão aproximada do peso em função da altura.

5. Sabe-se que duas variáveis **x** e **y** estão relacionadas por uma dependência do tipo $\mathbf{y} = Ae^{\mathbf{x}}$. Transforme esta equação numa relação linear e recorra ao método de regressão linear para determinar os valores de A e B.

x	1	2	-1	0.5	-0.5	2.5	0
y	2.12	3.71	0.81	1.35	0.71	6.02	1.10

6. Determine a recta que minimiza a distância aos pontos $(2,2)$, $(5,4)$, $(6,6)$, $(9,9)$ e $(11,10)$.

7. Os seguintes valores têm uma dependência quadrática entre eles. Determine aproximadamente os parâmetros dessa dependência.

x	8	10	12	16	20	30	40	60	100
y	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	7.66	11.96	21.56	43.16

8. Numa determinada cidade, registou-se a hora do pôr-do-Sol, aproximada ao minuto, entre os dias 1 e 28 de Dezembro. A tabela seguinte apresenta essas horas.

Dia	1	2	3	4–5	6–7	8–9	10–18	19–21
Hora	15h38	15h37	15h36	15h35	15h34	15h33	15h32	15h33

Dia	22–23	24	25	26–27	28
Hora	15h34	15h35	15h36	15h37	15h38

Sabendo que a relação entre o dia e a hora do pôr-do-Sol é quadrática, determine a expressão da melhor aproximação de mínimos quadrados entre estas variáveis. Use esta aproximação para determinar qual o dia em que o Sol se pôs mais cedo e qual a hora (em minutos e segundos) a que tal sucedeu.

9. A relação entre a radiação emitida por uma substância radioactiva em função do tempo é da forma $I(t) = I_0 e^{-At}$. Com base nos dados seguintes, estime os valores de I_0 e A recorrendo ao método dos mínimos quadrados logarítmico.

t	1	2	3	4	5	6
I(t)	6.32	4.76	3.51	2.67	2.01	1.48

Interpolação polinomial

10. Para cada um dos seguintes conjuntos de três pontos, aplique a fórmula de Lagrange para calcular o único polinómio de grau 2 que passa por eles.

(a) $(-3,-1)$, $(0,-1)$ e $(1,-5)$
(b) $(2,-5)$, $(-2,3)$ e $(-3,5)$
(c) $(-2,2)$, $(-1,3)$ e $(1,-1)$
(d) $(0,3)$, $(-1,6)$ e $(3,6)$
(e) $(0,4)$, $(-1,6)$ e $(1,-2)$
(f) $(-1,-1)$, $(1,3)$ e $(2,-7)$
(g) $(1,5)$, $(-2,5)$ e $(0,-1)$
(h) $(-1,8)$, $(1,6)$ e $(0,4)$
(i) $(-1,-6)$, $(0,1)$ e $(1,-2)$
(j) $(1,9)$, $(0,1)$ e $(-1,1)$

11. Para cada um dos seguintes conjuntos de quatro pontos, aplique a fórmula de Lagrange para calcular o único polinómio de grau 3 que passa por eles.

(a) $(-2,-3)$, $(-1,-2)$, $(0,-5)$ e $(1,-6)$
(b) $(2,-5)$, $(-1,1)$, $(0,-5)$ e $(1,-5)$
(c) $(0,-4)$, $(1,-2)$, $(2,-8)$ e $(-1,-8)$
(d) $(-1,-4)$, $(0,-2)$, $(2,8)$ e $(3,4)$
(e) $(1,2)$, $(2,-8)$, $(-1,-2)$ e $(0,-2)$
(f) $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(2,-1)$ e $(-2,-1)$
(g) $(-3,-3)$, $(2,2)$, $(-2,6)$ e $(1,-3)$
(h) $(0,0)$, $(-1,3)$, $(1,1)$ e $(2,-6)$
(i) $(2,-6)$, $(-1,-3)$, $(1,3)$ e $(-3,-1)$
(j) $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(0,3)$ e $(-2,-7)$

12. Resolva novamente os Exercícios 10 e 11 recorrendo ao método de Newton. Compare os resultados obtidos.

13. Seja f uma função tomando os seguintes valores.

x	7	8	9	10
f(x)	3	1	1	9

Use um polinómio interpolador de f para calcular um valor aproximado de $f(9.5)$.

14. Seja f uma função satisfazendo as condições da tabela seguinte.

x	**f(x)**	**f'(x)**
0.4	1.554284	0.243031
0.5	1.561136	-0.089618

Determine aproximadamente a abcissa do ponto máximo de f no intervalo $[0.4, 0.5]$.

15. Para cada uma das alíneas seguintes, determine o único polinómio p de grau 3 que satisfaz as condições pretendidas usando a interpolação de Hermite.

(a) $p(-2) = -1$, $p'(-2) = 12$, $p(1) = -1$ e $p'(1) = 3$

(b) $p(2) = -5$, $p'(2) = -4$, $p(1) = -5$ e $p'(1) = 1$

(c) $p(0) = -4$, $p'(0) = 0$, $p(-1) = -8$ e $p'(-1) = -5$

(d) $p(-1) = -4$, $p'(-1) = -9$, $p(3) = -8$ e $p'(3) = -9$

(e) $p(1) = 2$, $p'(1) = 0$, $p(0) = -2$ e $p'(0) = 0$

(f) $p(1) = 0$, $p'(1) = 2$, $p(-2) = 3$ e $p'(-2) = -4$

(g) $p(-3) = 9$, $p'(-3) = 18$, $p(1) = 1$ e $p'(1) = 6$

(h) $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$, $p(2) = 2$ e $p'(2) = -6$

(i) $p(1) = 5$, $p'(1) = -4$, $p(-1) = 1$ e $p'(-1) = -2$

(j) $p(1) = 2$, $p'(1) = -6$, $p(-2) = -7$ e $p'(-2) = -6$

16. Seja f a função com expressão $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(a) Recorra à interpolação de Lagrange para determinar o polinómio de grau 3 que coincide com f nos pontos 0, 1, 3 e 5.

(b) A partir do polinómio determinado na alínea anterior, obtenha um valor aproximado de $f(4)$. Compare este valor com o valor exacto.

(c) Recorrendo à interpolação de Hermite, determine o polinómio de grau 3 que coincide com f nos pontos 0 e 5 e cuja derivada coincide com f' nos mesmos pontos.

(d) Calcule um valor aproximado de $f(4)$ a partir do polinómio determinado na alínea anterior. Compare o resultado com os obtidos na alínea (b).

17.

(a) Implemente em MatLab a fórmula de interpolação de Newton.

(b) Use esta implementação para calcular os polinómios de graus 5, 10 e 20 que interpolam e^{-x^2} em pontos igualmente espaçados do intervalo $[-5, 5]$. Compare os gráficos destes polinómios com o da função original.

(c) Repita a alínea anterior para a função $\frac{1}{1+x^2}$.

(d) Repita a alínea anterior usando como pontos de interpolação os nós de Chebyshev do intervalo $[-5, 5]$.

Integração numérica

18. Considere novamente os polinómios do Exercício 10. Para cada um deles, calcule o valor do seu integral no intervalo contendo os três pontos indicados de cada uma das seguintes formas:

    (a) usando a regra dos trapézios composta, considerando dois subintervalos;

    (b) usando a regra de Simpson com os três pontos fornecidos;

    (c) por integração directa do polinómio interpolador calculado anteriormente.

    Comente os resultados obtidos.

19. Considere agora os polinómios do Exercício 11. Para cada um deles, calcule o valor do seu integral no intervalo contendo os quatro pontos indicados de cada uma das seguintes formas:

    (a) usando a regra dos trapézios composta, considerando três subintervalos;

    (b) usando a regra dos três oitavos com os quatro pontos fornecidos;

    (c) por integração directa do polinómio interpolador calculado anteriormente.

    Comente os resultados obtidos.

20. Calcule duas aproximações do integral da função do Exercício 13. Comente os resultados obtidos.

21. Calcule o valor exacto de $\int_0^5 p(x)\, dx$, sendo p:

    (a) o único polinómio de grau 2 tal que $p(0) = 0$, $p(2) = 2$ e $p(5) = -1$;

    (b) o único polinómio de grau 3 tal que $p(0) = 1$, $p(2) = -1$, $p(3) = 2$ e $p(5) = 0$

    (c) o único polinómio de grau 4 tal que $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 1$, $p(3) = 1$ e $p(5) = 0$