SEMINÁRIO DIAGONAL

Habilidades com Somatórios

Luís Cruz-Filipe
5º ano da LMAC — Ciência da Computação
lcf@math.ist.utl.pt

24 de Outubro de 2000*

Palavras Chave

somatório, característica, notação de Iverson.

Resumo

Alguns quebra-cabeças relativamente simples criam por vezes a necessidade de calcular somas pouco atraentes. Neste apontamento introduzem-se técnicas elegantes que permitem resolver alguns somatórios sem esforço recorrendo, nomeadamente, à introdução de uma notação diferente da habitual.

1 Introdução

É bem conhecida a lenda daquele soberano da Índia que, enfadado e sem nada com que se entreter, ordenou aos seus conselheiros que inventassem algo para ele se divertir. Dias depois, um desses sábios apareceu com um novo jogo: o xadrez. O soberano, maravilhado com a grandiosidade dessa invenção, disse ao inventor que pedisse a recompensa que quisesse, ao que o sábio respondeu que se contentaria com

> um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira, e assim por diante até à sexagésima-quarta casa.

Reza a tradição que o soberano manifestou o seu desagrado por o sábio pedir uma tão singela recompensa, pensando que um saco de trigo chegaria para a satisfazer, e ordenou que esta fosse providenciada; mas quando se fizeram as contas à quantidade de trigo necessária concluiu-se que esta seria suficiente para cobrir toda a Terra com uma camada de trigo com um metro de altura.

*Seminário apresentado no Instituto Superior Técnico a 24 de Outubro de 2000.

A quantidade de trigo pedida pelo sábio (em grãos) pode ser escrita simplesmente como

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1}, \tag{1}$$

mas qual o valor exacto desta soma? Todo o aluno dos últimos anos do liceu sabe (ou devia saber!) que se trata de somar os primeiros 64 termos de uma progressão geométrica de razão 2, pelo que o valor daquela expressão é

$$2^{64} - 1.$$

Outra lenda da comunidade matemática passa-se no século XIX, quando o pequeno Gauss estudava na escola primária. Um dia, o professor resolveu entreter os seus alunos durante algum tempo mandando-os somar os cem primeiros números naturais; ele esperava decerto ter algum tempo de sossego enquanto eles se entretinham, mas Gauss chegou rapidamente à resposta. Como? É fácil: ele agrupou os termos pedidos aos pares e concluiu que obtinha 50 pares que somavam, cada um deles, 101; multiplicando estes dois números obteve o resultado pretendido.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & + & 100 & \to & 101 \\ 2 & + & 99 & \to & 101 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 50 & + & 51 & \to & 101 \end{array}$$

Este método é, aliás, o método normalmente utilizado no Secundário para deduzir o valor da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética. No caso de Gauss, o que ele tinha de calcular era

$$\sum_{k=1}^{100} k. \tag{2}$$

Podemos generalizar ambas as equações (1) e (2), somando um número de termos arbitrário, e não será muito difícil convencermo-nos de que se tem

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{k+1} - 1. \tag{4}$$

Cada uma destas expressões corresponde à soma dos primeiros $(n+1)$ termos duma sucessão; no primeiro caso, esta sucessão é definida simplesmente por

$$u_n = n;$$

no segundo caso, trata-se de

$$v_n = 2^n.$$

Olhando para a complexidade aparente da segunda sucessão o leitor desprevenido será talvez tentado a pensar que calcular somas de n termos de uma sucessão conhecendo o seu termo geral não é afinal assim tão difícil. Mas desengane-se: calcular uma coisa tão simples como

$$\square_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \tag{5}$$

já não é trivial. Na sequência vamos descrever métodos para calcular somatórios bastante mais complicados que nos permitirão, em particular, determinar o valor de $\square_n$ e perceber a importância duma boa notação. Estes métodos permitirão alargar muito o nosso espectro de somas calculáveis, mas, como seria de esperar, não são universais.

2 Notação de Iverson

Antes de prosseguirmos no cálculo de somatórios, vamos introduzir notação. Iverson, em [2], observou que quando se trabalha com funções que não estão sempre definidas é muitas vezes penoso indicar explicitamente as condições em que o estão, e utilizou no seu livro uma convenção para evitar fazê-lo. Esta notação passou quase despercebida, até Knuth a ter apresentado em [1] frisando as suas vantagens.

A ideia é muito simples. Seja P um predicado;[1] então $[P(x)]$ denota a função característica de P no ponto x, ou seja,

$$[P(x)] = \begin{cases} 1 & \text{se } P(x) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Alguns casos particulares desta notação são muito utilizados; por exemplo, se A for um conjunto então $[x \in A]$ é simplesmente a função característica de A; se i e j forem números naturais então $[i = j]$ é simplesmente δ_{ij}, o tão utilizado delta de Kronecker. A vantagem da notação de Iverson (na versão

[1] Ou seja, uma função total que devolve verdadeiro ou falso.

melhorada de Knuth, aqui apresentada) é permitir representar estes conceitos de forma uniforme.

Note-se que o valor 0 em $[P(x)]$ é um zero computacionalmente forte, no sentido em que se $[P(x)] = 0$ então $[P(x)]f(x) = 0$, independentemente do valor de $f(x)$ (que pode ser infinito ou não estar sequer definido). A aplicação imediata é podermos escrever, por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i} [1 \leq i \leq n] f(i),$$

sendo o somatório à direita uma série em que só um número finito de parcelas não são nulas.

Qual o interesse desta notação? Como toda a notação, não permite fazer nada que não conseguíssemos fazer antes; porém, muitas coisas passam a poder ser feitas de uma forma muito mais simples. Ilustraremos isto com um exemplo: seja $f = f(i, j)$ uma função definida em $\mathbb{N}^2$; vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} f(i, j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} f(i, j).$$

Este resultado é conhecido, mas a sua prova exige normalmente alguma atenção às possíveis maneiras de escolher pares de naturais nos limites dos somatórios considerados. Com a notação de Iverson temos simplesmente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} f(i, j) &= \sum_{i,j} [1 \leq i \leq n][i \leq j \leq n] f(i, j) \\
&= \sum_{i,j} [1 \leq i \leq j \leq n] f(i, j) \\
&= \sum_{i,j} [1 \leq i \leq j][1 \leq j \leq n] f(i, j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} f(i, j)
\end{aligned}$$

e tudo o que se utilizou foi manipulação de desigualdades e expressões equivalentes.

Recorrendo somente a esta notação é já espantosa a quantidade de somas que se conseguem calcular. Apresentamos em seguida dois exemplos.

Exemplo 1. Calcular $\sum_{k=1}^{n} k \times 2^k$.

Comecemos por observar que $k \times 2^k = \sum_{j=1}^{k} 2^k$; com isso em mente, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \times 2^k &= \sum_{j,k} [1 \le k \le n][1 \le j \le k] 2^k \\
&= \sum_{j,k} [1 \le j \le k \le n] 2^k \\
&= \sum_{j,k} [1 \le j \le n][j \le k \le n] 2^k \\
&= \sum_{j} [1 \le j \le n] \left(2^{n+1} - 2^j\right) \\
&= n \times 2^{n+1} - \left(2^{n+1} - 2\right) \\
&= (n-1) 2^{n+1} + 2,
\end{aligned}$$

onde tudo o que utilizámos foi o resultado (4) e a linearidade dos somatórios.

3 Métodos Formais

O exemplo anterior ilustra uma aplicação *naïve* dum método de cálculo de somatórios semelhante ao uso do Teorema de Fubini para cálculo de integrais múltiplos: dado um somatório em duas variáveis, trocar a ordem pela qual as somas são feitas, tentando obter uma expressão mais simples de somar. O recurso à notação de Iverson, no entanto, torna o método tão transparente que nos dispensamos de o apresentar mais formalmente, incluindo apenas um exemplo de uma situação concreta em que nos permite calcular uma soma com bastante mau aspecto.

Exemplo 2. Suponhamos que dispomos de um algoritmo que calcula o valor de $f(k)$ num tempo que é o valor aproximado por defeito de $\sqrt{k}$. Quanto tempo demorará esse algoritmo a tabelar os valores de f entre 1 e n?

Este problema é o exemplo típico dos problemas encontrados em Teoria da Complexidade. Neste contexto, tal como em Matemática Discreta em geral, é muito utilizada a notação $\lfloor x \rfloor$ para denotar "o valor aproximado por defeito de x". Um pouco de reflexão permite concluir que se tem a relação $\lfloor k \rfloor = \sum_j [1 \le j \le k]$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le k \le n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{k} [1 \le k \le n] \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\
&= \sum_{j,k} [1 \le k \le n][1 \le j \le \sqrt{k}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,k} [1 \le j \le \sqrt{k} \le \sqrt{n}] \\
&= \sum_{j,k} [1 \le j \le \sqrt{n}][j^2 \le k \le n] \\
&= \sum_{j} [1 \le j \le \sqrt{n}](n - j^2 + 1) \\
&= n\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \Box_{\sqrt{n}} + \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\
&= (n+1)\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \Box_{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

(relembre-se a definição de $\Box_n$ em (5)).

Coloca-se naturalmente a questão seguinte: determinámos o valor de $\sum_{1 \le k \le n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ em função do de $\Box_{\sqrt{n}}$; será que só recorrendo a esta notação conseguimos determinar o valor de $\Box_n$?

A resposta é sim, mas de uma forma muito trabalhosa. Deixa-se aqui o desafio ao leitor mais interessado;[2] calcularemos mais à frente o valor de $\Box_n$ por outro método.

Repare-se que nos dois exemplos apresentados foi necessário reescrever um somatório em k por forma a obter um somatório em duas variáveis. Esta ideia de reescrita está também subjacente a um outro método, conhecido como o **método da perturbação**, que descrevemos de seguida.

A ideia por trás deste método é a seguinte: tentar obter duas expressões diferentes que tenham o mesmo valor, "perturbando" levemente a soma a calcular. Um exemplo ilustra o funcionamento deste método:

Exemplo 3. Suponhamos que pretendemos calcular o valor de $\Box_n$. Vamos perturbar levemente a sua definição e tentar escrever $\sum_{k=1}^{n+1} k$ de duas formas diferentes.

Obviamente, tem-se a relação

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \Box_n. \tag{6}$$

[2] A técnica é análoga à utilizada nos dois exemplos apresentados; a dada altura é possível determinar uma equação de primeiro grau em $\Box_n$, donde se retira facilmente o valor pretendido.

Por outro lado, uma mudança de variável permite escrever

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k^2+2k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1,\end{aligned}$$

o que nos permite concluir directamente

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \square_n + 2\sum_{k=1}^{n} k + (n+1). \tag{7}$$

Chegados a este ponto, parece que não fizemos muitos progressos. Se juntarmos as equações (6) e (7), os termos em $\square_n$ cancelam-se… *mas conseguimos calcular o valor de* $\sum_{k=1}^{n} k$ *a partir dessa mesma equação!!!*

Sugere-se naturalmente um caminho a tentar. Se aplicando o método da perturbação a $\square_n$ conseguimos uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k$, que tal aplicar o método da perturbação a $\sum_{k=1}^{n} k^3$?

Temos por um lado a relação óbvia

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

e por outro

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\square_n + \tfrac{3}{2}n(n+1) + (n+1).\end{aligned}$$

Igualando ambas as expressões, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + 3\square_n + \tfrac{3}{2}n(n+1) + (n+1).$$

Esta última equação pode ser resolvida em relação a $\Box_n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 + (n+1)^3 &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + 3\Box_n + \tfrac{3}{2}n(n+1) + (n+1) \\
\Leftrightarrow (n+1)^3 &= 3\Box_n + \tfrac{3}{2}n(n+1) + (n+1) \\
\Leftrightarrow 3\Box_n &= (n+1)\big[(n+1)^2 - \tfrac{3}{2}n - 1\big] \\
\Leftrightarrow \Box_n &= \tfrac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+1-\tfrac{3}{2}n-1) \\
\Leftrightarrow \Box_n &= \tfrac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n-3n) \\
\Leftrightarrow \Box_n &= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Estes exemplos parecem sugerir que se pode obter uma fórmula genérica para $\sum_{k=1}^{n} k^m$ aplicando o método de perturbação a $\sum_{k=1}^{n} k^{m+1}$; de facto assim é, desde que sejam conhecidos os coeficientes binomiais de ordem $m+1$ bem como todas as expressões para $\sum_{k=1}^{n} k^j$, para $j < m$. Ainda assim, é um método recursivo facilmente implementável para determinação destes valores.

4 Outros Exemplos

Para terminar, apresentamos aqui dois exemplos de como utilizar estas técnicas. O primeiro é um pequeno quebra-cabeças, que confesso me pareceria impossível sem conhecer o conteúdo deste artigo; o segundo é um exemplo que vale por si.

Exemplo 4. Para quantos números naturais n entre 1 e 1000 se tem que n é múltiplo de $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$?

Designemos por N o valor que pretendemos calcular; então temos

$$N = \sum_{n=1}^{1000} [\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor | n],$$

onde $x|y$ denota, como habitualmente, a proposição 'x divide y'.

Podemos reescrever esta equação como

$$N = \sum_{n,k} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor][k|n][1 \le n \le 1000]$$

ou, equivalentemente, como

$$N = \sum_{n,k} [k \le \sqrt[3]{n} < k+1][k|n][1 \le n \le 1000].$$

Vamos agora introduzir uma nova variável com base no seguinte raciocínio: k divide n se e somente se existir m tal que $n = km$; então $[k|n] = \sum_m [n = km]$. Assim, obtemos

$$N = \sum_{n,k,m} [k^3 \leq n < (k+1)^3][n = km][1 \leq n \leq 1000],$$

ou ainda, uma vez que só não são nulos os termos em que $n = km$,

$$N = \sum_{n,k,m} [k^3 \leq km < (k+1)^3][n = km][1 \leq km \leq 1000].$$

Ora nesta soma só há um termo não nulo — quando $n = km$ —, pelo que podemos escrever ainda

$$N = \sum_{k,m} [k^3 \leq km < (k+1)^3][1 \leq km \leq 1000].$$

Dividindo por k na primeira parcela obtemos ainda

$$N = \sum_{k,m} \left[k^2 \leq m < \frac{(k+1)^3}{k}\right] [1 \leq km \leq 1000].$$

No caso $km = 1000$ é fácil verificar que só $k = 10$ e $m = 100$ satisfazem ambas as condições; nos restantes casos, necessariamente $k \leq 9$, donde podemos simplificar a última equação e obter

$$N = \sum_{k,m} \left[k^2 \leq m < \frac{(k+1)^3}{k}\right] [1 \leq k \leq 9] + 1.$$

Desenvolvendo a fracção obtemos

$$N = \sum_{k,m} \left[k^2 \leq m < k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k}\right] [1 \leq k \leq 9] + 1.$$

É fácil verificar que existem exactamente $3k+4$ valores em cada intervalo $\left[k^2, k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k}\right)$, pelo que obtemos simplesmente

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{9} (3k+4) + 1 \\ &= \frac{3 \times 9 \times 10}{2} + 36 + 1 \\ &= 172. \end{aligned}$$

Ao leitor mais céptico recomenda-se que faça uma tabela e verifique a validade do resultado.

O exemplo final é retirado de [1], e não resisti a apresentá-lo por ser totalmente inesperado. As passagens são imediatas, pelo que o apresento sem comentários. Note-se que $\lg k$ denota o logaritmo de base 2 de k ($\log_2 k$).

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1}\binom{n}{\lfloor \lg k \rfloor} &= \sum_{k\geq 1}\binom{n}{m}[m=\lfloor \lg k\rfloor] \\
&= \sum_{k,m}\binom{n}{m}[m=\lfloor \lg k\rfloor][k\geq 1] \\
&= \sum_{k,m}\binom{n}{m}[m\leq \lg k < m+1][k\geq 1] \\
&= \sum_{k,m}\binom{n}{m}[2^m\leq k < 2^{m+1}][k\geq 1] \\
&= \sum_{m}\binom{n}{m}(2^{m+1}-2^m)[m\geq 0] \\
&= \sum_{m}\binom{n}{m}2^m 1^{n-m} \\
&= 3^m.
\end{aligned}$$

Se alguém conhecer uma forma alternativa de calcular esta última expressão teria curiosidade em conhecê-la.

5 Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente ao professor José Luís Fachada por me ter introduzido à arte da Combinatória e por me ter facilitado o material que serviu de base ao seminário que este texto sintetiza, bem como pelas sugestões quanto à elaboração do mesmo. Também à professora Ana Cannas da Silva gostaria de deixar o meu agradecimento por todas as sugestões que permitiram simplificar em muito algumas das passagens.

Referências

[1] Knuth, Donald E., Two notes on notation, *American Mathematical Monthly*, Vol. 99, No. 5, May 1992, pp. 403–422.

[2] Iverson, Kenneth E., *A Programming Language*, Wiley, 1962.