FACITLISTE MAT. 1 JANUAR 2009

OPGAVE 1 a) $P_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) = \underline{\underline{2 + \frac{3}{4}x}}$

$f(0.08) \approx P_1(0.08) = 2 + \frac{3}{4}\cdot 0.08 = \underline{\underline{2.06}}$

OPGAVE 1 b) $f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(8x+16e^x)^{-3/4}\cdot(8+16e^x)}}$

$f''(x) = \underline{\underline{-\frac{3}{16}(8x+16e^x)^{-7/4}\cdot(8+16e^x)^2 + \frac{1}{4}(8x+16e^x)^{-3/4}\cdot 16e^x}}$

$f'(0) = \frac{1}{4}\cdot 16^{-3/4}\cdot(8+16) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot 24 = \frac{3}{4}$

$f''(0) = -\frac{3}{16}\cdot 16^{-7/4}\cdot 24^2 + \frac{1}{4}\cdot 16^{-3/4}\cdot 16 = -\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2^7}\cdot 24^2 + \frac{1}{4}\cdot 16^{\frac{1}{4}}$

$= -\frac{27}{32} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{11}{32}}} = -0.34375$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2}\cdot f''(0)\cdot x^2 = \underline{\underline{2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{64}x^2}}$

$f(0.08) \approx P_2(0.08) = 2.06 - \frac{11}{64}\cdot 0.08^2 = 2.06 - 0.0011$

$= \underline{\underline{2.0589}}$

(Lommeregner udregning giver $f(0.08) = 2.058982642\ldots$

OPGAVE 2a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \underline{\underline{-\frac{3x^2+2xy^5}{5+5x^2y^4}}}$

For $x=3$ og $y=1$ fås $\frac{dy}{dx} = -\frac{27+6}{5+45} = -\frac{33}{50} = \underline{\underline{-\frac{66}{100}}}$

OPGAVE 2b) $El_x(y) = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \underline{\underline{-\frac{3x^3+2x^2y^5}{5y+5x^2y^5}}}$

For $x=3$ og $y=1$ fås $El_x(y) = \frac{3}{1}\cdot\left(-\frac{66}{100}\right) = \underline{\underline{-1.98}}$

y's %-vise ændring er $\approx(-1.98)\cdot(-5\%) = \underline{\underline{9.9\%}}$

$x = 2.85$ svarer derfor til $y \approx 1 + 1\cdot\frac{9.9}{100} = \underline{\underline{1.099}}$

Sidste spørgsmål kunne også udregnes således:

$y(2.85) \approx y(3) + y'(3)\cdot(-0.15) = 1 + \frac{66}{100}\cdot 0.15 = 1.099$

OPGAVE 3a) $\int\left(\frac{3}{4}x^2 + 10x\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^3 + 5x^2 + c}}$

$\int_0^{10}\left(\frac{3}{4}x^2 + 10x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^3 + 5x^2\right]_0^{10} = 250 + 500 - (0+0)$

$= \underline{\underline{750}}$

$PS = 175\cdot 10 - \int_0^{10}\left(\frac{3}{4}x^2 + 10x\right)dx = 1750 - 750$

$= \underline{\underline{1000}}$

OPGAVE 3b $\int_a^{10} (100 + \frac{750}{x})\,dx = \Big[100x + 750\ln x\Big]_a^{10}$

$$= \underline{\underline{1000 + 750 \cdot \ln 10 - 100a - 750\ln a}}$$

$$CS = \lim_{a\to 0} \int_a^{10} (100 + \frac{750}{x})\,dx - 175 \cdot 10$$

$$= 1000 + 750 \cdot \ln 10 - 0 - 750(-\infty) - 1750$$

$$= 750(\ln 10 - 1) + 750 \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

Arealet CS er uendelig stort.

OPGAVE 4a $\frac{\partial X}{\partial a}$ findes ved at differentiere en brøk.

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{2a \cdot \frac{1}{2}(b^2-4ac)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4c) - (-b + (b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}) \cdot 2}{(2a)^2}$$

$$= \frac{-4ac(b^2-4ac)^{-\frac{1}{2}} + 2b - 2(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}}{4a^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{b - 2ac(b^2-4ac)^{-\frac{1}{2}} - (b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a^2}}}$$

For $a = 1$, $b = -7$ og $c = 12$ fås $X = \frac{7 + \sqrt{49-48}}{2} = \underline{\underline{4}}$

og $\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{-7 - 24 \cdot (49-48)^{-\frac{1}{2}} - (49-48)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{-7-24-1}{2} = \underline{\underline{-16}}$

OPGAVE 4b $X_{ny} = X_{gl} + \frac{\partial X}{\partial a} \cdot da = 4 - 16 \cdot 0.005$

$$= \underline{\underline{3.92}}$$

(Ved indsættelse i den sædvanlige formel fås

$$X_{ny} = \frac{-(-7) + (49 - 4 \cdot 1.005 \cdot 12)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 1.005} = 3.916308353\ldots$$

OPGAVE 5a $\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{3x^2 + 2axy + by^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{ax^2 + 2bxy + 3y^2}$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3 + 2ax^2y + bxy^2 + ax^2y + 2bxy^2 + 3y^3$$

$$= 3x^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + 3y^3$$

$$= \underline{\underline{3 \cdot f(x,y)}}, \text{ dvs } \underline{\underline{k = 3}}$$

OPGAVE 5b)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{\underline{6x+2ay}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{\underline{2ax+2by}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{\underline{2bx+6y}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ for alle (x,y)

$\Updownarrow$ $6x+2ay+2bx+6y=0$ " " "

$\Updownarrow$ $(6+2b)x+(2a+6)y=0$ " " "

$\Updownarrow$ $6+2b=0$ og $2a+6=0$

$\Updownarrow$ $\underline{\underline{a=b=-3}}$

OPGAVE 6a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{\underline{6x^2-6y+6x}}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{\underline{-6x+2y}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{\underline{12x+6}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{\underline{-6}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{\underline{2}}$

OPGAVE 6b) (x,y) stationært $\Leftrightarrow$

$6x^2-6y+6x=0$ og $-6x+2y=0$ $\Leftrightarrow$

$6x=2y$ og $6x^2-18x+6x=0$ $\Leftrightarrow$

$6x=2y$ og $6x(x-2)=0$ $\Leftrightarrow$

$6x=2y$ og $(x=0$ eller $x=2)$ $\Leftrightarrow$

$(x,y) = \underline{\underline{(0,0)}}$ eller $(x,y) = \underline{\underline{(2,6)}}$

$(0,0)$: $AC-B^2 = 6\cdot 2-(-6)^2 = 12-36 = -24$ <u>sadelpkt.</u>

$(2,6)$: $AC-B^2 = 30\cdot 2-(-6)^2 = 60-36 = +24 > 0$ og $A = 30 > 0$

<u>lokalt min</u>

OPGAVE 7c) **Indre:** stat.pkt. $(2,6)$. $f(2,6) = 16-72+12+36+12 = 4$

Rand: $x=1$. $f(1,y) = 2-6y+3+y^2+12 = y^2-6y+17 = g(y)$

min for $g'(y) = 2y-6=0$, dvs $y=3$.

$f(1,3) = 3^2-6\cdot 3+17 = 8$

min $f(x,y)$ u.f.a. $x \geq 1$ er dermed $f(2,6) = \underline{\underline{4}}$

[idet $A\cdot C-B^2 = (12x+6)\cdot 2-36 = 24x-24 \geq 0$ for $x \geq 1$ og $A = 12x+6 \geq 0$ for $x \geq 1$ er området $\{(x,y) \mid x \geq 1\}$ er konvekst, har f globalt minimum i det stationære pkt. iflg. sætning. Randundersøgelsen kan derved undgås].

OPGAVE 7 d) Da der ikke er stat. pkt. i det indre forekommer minimum på randen, dvs. for $x=3$.

$f(3,y) = 54 - 18y + 27 + y^2 + 12 = y^2 - 18y + 93 = h(y)$

Minimum forekommer for $h'(y) = 2y - 18 = 0$, dvs $y = 9$.

Min. $f(x,y)$ u.f.a. $x \geq 3$ $= f(3,9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 93 = \underline{\underline{12}}$

OPGAVE 8a) $\mathcal{L}(L,K) = 16L + K - \lambda(5L^{2/3}K^{1/3} - 100)$

$$\boxed{\begin{array}{lll} 16 & -\frac{10}{3}\lambda L^{-1/3}K^{1/3} & = 0 \\ 1 & -\frac{5}{3}\lambda L^{2/3} \cdot K^{-2/3} & = 0 \\ 5 \cdot L^{2/3} \cdot K^{1/3} & & = 100 \end{array}}$$

3 lign. m. 3 ubek. opnået ved Lagrange metoden

Lign. 1 : $\lambda = \frac{16 \cdot 3}{10} \cdot \frac{1}{L^{-1/3}} \cdot \frac{1}{K^{1/3}} = \frac{24}{5} \cdot \frac{L^{1/3}}{K^{1/3}}$

Lign. 2 : $\lambda = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{L^{2/3}} \cdot \frac{1}{K^{-2/3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{K^{2/3}}{L^{2/3}}$

Sættes de to lig hinanden fås $\frac{24}{5} \cdot \frac{L^{1/3}}{K^{1/3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{K^{2/3}}{L^{2/3}}$

Ganges med $5K^{1/3}L^{2/3}$ på begge sider fås $24L = 3K$, dvs. $\underline{\underline{8L = K}}$. Lign. 3 giver så $5L^{2/3} \cdot (8L)^{1/3} = 100$, dvs. $5 \cdot L^{2/3} \cdot 2 \cdot L^{1/3} = 100$, dvs. $10L = 100$, dvs $\underline{\underline{L = 10}}$

$K = 8L$, dvs. $\underline{\underline{K = 80}}$.

Dermed minimum $= f(10,80) = 160 + 80 = \underline{\underline{240}}$

OPGAVE 8b) $\lambda = \min'(c)$. Her er $\lambda = \frac{24}{5} \cdot \frac{L^{1/3}}{K^{1/3}} = \frac{24}{5} \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1/3} = \frac{24}{5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \frac{12}{5}$

Med $c = 105$, dvs. $dc = 5$, fås at minimum vokser med cirka $\lambda \cdot dc$, dvs med cirka $\frac{12}{5} \cdot 5 = 12$

Det nye minimum $\approx \underline{\underline{252}}$

[Udregnes det præcise minimum fås $f(10.5, 84) = 16 \cdot 10.5 + 84 = 252$].

Matematik 1 - Eksamen Januar 2009

Eksamen er en 4 timers skr. prøve med alle sædvanlige hjælpemidler (bøger, noter, regnede opgaver, lommeregnere, incl. programmerbare symbolregnere, f.eks. af typen TI-89). Bærbare computere er ~~ikke~~ tilladt. Udstyr, som kan kommunikere med andet udstyr i eller udenfor eksamenslokalet, er naturligvis ~~også~~ forbudt! Mobiltelefoner (slukkede!) afleveres til eksamensvagterne ved eksamens begyndelse.

Eksamen finder sted mandag den 12. januar kl. 9-13, med mulighed for reeksamination i februar 2009. Der afholdes **ikke** eksamen i Matematik 1 separat i juni 2009.

For **oecon** er der først eksamen i juni 2009 sammen med Matematik 2 (Matematik 1+2 fælles 4 timers skr. eksamen for oecon.). For **HA valgfag Matematik 2** holdes en separat 4 timers skr. eksamen i Matematik 2 samtidig med eksamen i Matematik 1+2.

PENSUM i Matematik 1 (for dem som går til eksamen i januar 2009-eksamen afholdes mandag den 12.01.2009)
[S&H 1. ed] 6.6-6.11 Differentiation. 7.1 and 7.3- 7.6 Derivatives in use. 9.1-9.7 Integration. 11.1- 11.7 Functions of several variables. 12.1-12.3 and 12.7-12.8 Tools for comparative statics. 13.1-13.5 Multivariable optimization. 14.1-14.3 Constrained optimization. 185 pages.
[S&H 2. ed.] 6.6-6.11 Differentiation. 7.1-7.2 and 7.4-7.7 Derivatives in use. 9.1-9.7 Integration. 11.1-11.7 Functions of several variables. 12.1-12.4 and 12.8-12.9 Tools for comparative statics. 13.1-13.5 Multivariable optimization. 14.1-14.3 Constrained optimization. 185 pages.
[S&H 3. ed] 6.6-6.11 Differentiation. 7.1-7.2 and 7.4-7.7 Derivatives in use. 9.1-9.7 Integration. 11.1-11.7 Functions of several variables. 12.1-12.4 and 12.8-12.9 Tools for comparative statics. 13.1-13.5 Multivariable optimization. 14.1-14.2 and 14.4 Constrained optimization. 185 pages.

Eksamenssættet januar 2009 vil bestå af 8 opgaver, hver med 2 spørgsmål. Alle 16 spørgsmål har samme vægt. **Opgave 1** omhandler lineær og kvadratisk approximation for en funktion af én variabel, **Opgave 2** omhandler implicit differentiation og elasticitet, **Opgave 3** omhandler integration, **Opgave 4** er en ikke type opgave om funktioner af én variabel, **Opgave 5** er en ikke type opgave om funktioner af flere variable, **Opgave 6** omhandler stationære punkter og deres art, **Opgave 7** er en største- mindste-værdi opgave, og **Opgave 8** omhandler Lagranges metode. De seneste eksamensæt fra Matematik 1 (januar 2007, januar 2008) kan tages som standard med hensyn til sværhedsgrad og formulering.

http://imada.sdu.dk/~btoft/Mat1/

Bedømmelsen er intern, og de enkelte undervisere (i Odense, Kolding, Esbjerg, Sønderborg og Slagelse) bedømmer selv deres egne studerende. Der tages hensyn til specielle forhold og den givne undervisning på hver enkelt campus. Som vejledende skema ved bedømmelsen kan skalaen nedenfor benyttes. **Korrekt besvarelse af mindst halvdelen af sættet sikrer beståelse.**

Der gives ved bedømmelsen 0-10 points pr spørgsmål, dvs. 0-160 points i alt for de 16 spørgsmål.
Vejledende skema:

00-30	**points**	**giver -3.**
30-80	**points**	**giver 00.**
80-90	**points**	**giver 02.**
90-105	**points**	**giver 4.**
105-130	**points**	**giver 7.**
130-150	**points**	**giver 10.**
150-160	**points**	**giver 12.**

Resultater beregnet med lommeregner giver fuldt points hvis ellers resultatet er korrekt. Men det giver ikke noget hvis resultatet er forkert. Overvej derfor altid om lommeregnerresultater ser rimelige ud (gør evt. prøve om muligt og få points ved det). Skriv også gerne at resultatet er fundet ved hjælp af lommeregner (men skriv ikke detaljeret hvilke knapper der er trykket på!). I opgaver hvor facit er givet er det ikke nok at skrive: Ja, facit er korrekt for det gav min lommeregner også! (Det kan man jo skrive også uden at have en lommeregner med).