

Fra konferencen:

Et eksempel på en antididaktisk inversion - gymnasiets lærebøger i matematik

Claus Michelsen, IMADA/DIG, Syddansk Universitet

Det er velkendt at lærebogen har en direkte indflydelse på indhold, planlægning og organisering af undervisningen i matematik. I gymnasieskolen er matematik for de fleste elever - og lærere - det, som står i lærebogen. Love & Pimm (1996) sætter i *International Handbook of Mathematics* fokus på lærebogen med en artikel om matematiske tekster. Lærebogen indgår i et tresidet forhold mellem eleven, læreren og den matematiske tekst. Ophavsmanden til teksten er forfatteren, og det må antages, at denne har skrevet lærebogen med eleven som den primære læser. Men det er læreren, der fungerer som mediator mellem lærebogens tekst og eleven. Det forventes at læreren er til rådighed før eller under læsning af teksten for at klarlægge og udglatte de vanskeligheder eleven møder i interaktionen med lærebogens tekst. Forfatteren, som er ansvarlig for den tekst, der indgår i interaktionen mellem læreren og eleverne, er på ingen måde ansvarlig for udfaldet af lærerens og elevernes møde med den matematiske tekst. Ved konferencen "Lærebog 2000" arrangeret af Dansk Institut for Gymnasiepædagogik blev der sat fokus på lærebogens rolle ved moderniseringen af de gymnasiale uddannelser. Arnbak (2001) beskæftigede sig i et oplæg med forfatterens formål med at skrive lærebøger og elevernes mål med at læse lærebøger. Forfatterens hensigt med at skrive en lærebog er at formidle fagets kerneområder og særlige problemstillinger gerne 'krydret' med eksempler fra hverdagen for at gøre emnet mere nærværende og relevant for eleverne. For ca. 30 år siden kom kun en mindre procentdel af en ungdomsårgang i gymnasiet. Lærebogens fremstilling af fagets elementer og begreber var dengang ment som en introduktion til fagets videnskabelige indhold for kommende studerende på en videregående uddannelse. Nu skal undervisningen i faget informere bredt og gøre de unge parate til en bred vifte af uddannelsesmuligheder på mange forskellige niveauer. Hvad angår elevernes formål med at læse lærebøgerne, så er det relativt klart for de fleste gymnasieelever. Man læser bøgerne, fordi de indgår i pensum, og fordi man får besked på det. Man læser for at få gode karakterer og klare sin eksamen. På gymnasieplan er det ikke så tit, at man finder elever, der læser lærebøger af egen lyst og drevet af interesse for faget.

Betydningen af interesseaspektet i forbindelse elevernes matematiklæring ofte overset. Spørgsmålet om hvordan en person bliver interesseret i et bestemt fag eller tema, og hvordan denne interesse påvirker læreprocessen, burde efter min mening være et centralt spørgsmål i matematikkens didaktik. I de seneste 15 år har der specielt i USA og Tyskland været en betydelig vækst i forskningen i den rolle interesse spiller for læring, og det er alment anerkendt, at der er positiv korrelation mellem interesse og læring (Krapp 2002). Set i relation til Forums konference og emnet for denne artikel, vil det interessante spørgsmål selvfølgelig være, hvilken betydning læremidler har for elevernes interesse for matematik.

Et læringssyn og to lærebøger

Ser vi nærmere på hvilken læringsopfattelse, der kan ligge bag matematikundervisning centreret omkring lærebogens tekst, er det nærliggende at se på kritikken af den *repræsentationelle opfattelse af matematiklæring*. Ifølge Cobb, Yackel & Wood (1992) er den opfattelse karakteriseret ved, at undervisningens overordnede mål er at hjælpe eleverne til at konstruere mentale repræsentationer, der med passende akkuratse afspejler matematiske relationer, som er lokaliseret i eksterne repræsentationer – fx i lærebogen. Målet søges opfyldt ved at udvikle transparente repræsentationer af matematiske strukturer, der gør det muligt for eleverne at konstruere korrekte interne repræsentationer. Her fungerer lærebogen som den primære kilde, hvorfra eleverne bygger deres matematiske viden. Elevens opgave er at indhente den information som er nedskrevet mere eller mindre som den står. I hvor stor udstrækning det sker, bliver ofte kriteriet for læring.

For ca. 30 år siden var der reelt kun en lærebog på markedet - Kristensen og Rindung. Kaster vi et blik på 10. udgave af dette berømte lærebogssystem, så introduceres funktionsbegrebet i et afsnit om afbildninger.

Afsnittet indledes med fire eksempler, der omhandler (i) spejling af et punkt i en linie (ii) en forskrift der til enhver trekant knytter trekantens areal (iii) forskrifter der til ethvert reelt tal x knytter henholdsvis x^2 og πx (iv) en forskrift der til ethvert positiv tal x knytter et reelt tal, som kaldes $\log x$. Herefter følger en definition på afbildninger, og der gøres efter den opmærksom på, at ordet reelle funktioner anvendes om afbildninger ind i mængden. I resten af afsnittet behandles bl.a. en funktions grafiske billede, vigtige funktioner, samt egenskaber ved funktioner (Kristensen og Rindung 1975).

I dag er udbuddet af lærebøger til gymnasiets matematikundervisning ganske omfangsrigt, når det tages i betragtning, at vi befinder os i et lille sprogområde. Lærebøgerne er bygget op omkring en kerne, der indeholder generelle formuleringer af definitioner, sætninger og procedurer. Udenom denne kerne findes en række øvelser, eksempler og forklaringer. Hvad angår kernen, så kan der ikke konstateres større forskelle i den måde, de forskellige lærebøger introducerer funktionsbegrebet. Hos et af de mest udbredte lærebogssystemer Carstensen & Frandsen (1997) indledes et afsnit om funktioner med to eksempler, der omhandler (i) sammenhæng mellem vejlængden og tid for et blylod i frit fald fra et højt tårn eller et fly (ii) en lineær sammenhæng mellem et supermarkeds daglige salg af tomater i kilogram og en fast kilogrampris i kroner. Eksemplerne efterfølges af en definition på funktionsbegrebet, og så behandles bl.a. en funktions grafiske billede, vigtige funktioner, samt egenskaber ved funktioner herunder monotoniforhold og regneregler.

Grundlæggende finder vi den samme tilgang som i Kristensen og Rindung, og jeg vil overlade det til læseren at vurdere hvilke af de nævnte eksempler, der motiverer eleverne til at arbejde med funktionsbegrebet og er passende illustrationer af funktionsbegrebets anvendelse. Selvfølgelig er indholdet i lærebøgerne ændret, men der er ikke tale om fundamentale ændringer. Sproget er ændret, der er knapt så meget tekst, men til gengæld er der flere illustrationer. Lærebøgerne er tydeligt påvirket af en undervisningstradition, der er bygget op omkring sekvensen begrebsdefinition, sætninger og beviser, eksempler og opgaver, mens det er vanskeligt at registrere nogen større påvirkning fra den matematikdidaktiske forskning. Fx findes i ingen af lærebøgerne en tilgang til funktionsbegrebet, der tager hensyn til de didaktiske konsekvenser af funktionsbegrebets proces-objekt dualitet, der af Niss (1999) betegnes som et af den matematik didaktiske forsknings centrale resultater. Jeg analyserede i forbindelse med min ph.d.-afhandling de syv mest udbredte lærebøgers præsentation af funktionsbegrebet og konkluderede, at kun i to af disse er stoffet organiseret, så eleverne får mulighed for at tilegne sig nogle operative færdigheder, om end i begrænset omfang, inden de præsenteres for de mere strukturelle aspekter af funktionsbegrebet (Michelsen 2001).

Læreproces som guidet "reinvention"

Den type af tekster, der præsenteres i lærebøgerne, stiller store krav om *kognitiv socialisation* af læseren. Det vil sige at eleven må lære sig at tænke inden for en måde at kommunikere på, der har udgangspunkt og målsætninger som hun/han kan have svært ved at identificere, formodentlig har sparsomme erfaringer med og sjældent møder i andre sammenhænge. Det er kendetegnende for lærebøgers fremstilling af matematisk viden, at begreber defineres i relation til hinanden. Lærebogens lineære fremstilling har bidraget til at fremme opfattelsen af nødvendigheden af sekventiel læring. Hele den argumentation og mange tilfælde flere hundrede års praksis er borte, når det der kaldes grundlæggende begreber præsenteres i lærebogen.

Som Davis og Hersh (1990) peger på i bogen *The Mathematical Experience*, så er sekvensen definition-sætning-bevis den altdominerende tilgang, både når matematik skal præsenteres, og når der skal undervises i matematik på et rimeligt højt niveau, som fx i gymnasieskolen. Men matematikken er hverken skabt, udviklet eller forstået på denne måde på. Matematik er en menneskelig virksomhed, og ifølge Davis & Hersh er en formalistisk-logisk beretning om matematik ren fiktion. Matematikkens egentlige væsen skal findes i matematikerens aktuelle praksis, hvor der anvendes intuition, metaforer, historier eller andre former, der inden for rækkevidde, når der skal konstrueres matematisk viden. I sin kritik af den traditionelle matematikundervisning bruger Freudenthal (se fx. Streefland 1993) betegnelsen *antididaktisk inversion* om undervisningen, der som udgangspunkt har den matematiske struktur, som er det aktuelle produkt af matematisk virksomhed. Denne struktur, der typisk præsenteres på formen definition-sætning-bevis, betegner Freudenthal (1991) som en fattig struktur, der er kommet til veje via rige strukturer bl.a. gennem omfattende brug af trial-and-error metoden.

Freudenthal argumenterer for, at matematikundervisningen først og fremmest må handle om matematik som en menneskelig virksomhed og ikke færdigt system. Eleverne må også stifte bekendtskab med de rige strukturer og gives mulighed for at gennemløbe en række læreprocesser på forskellige niveauer. Der er ikke tale om at gentage det historiske forløb for eleverne, men om at skabe læringssituationer, hvor eleverne oplever, hvad der ville være sket, hvis mennesker, der levede dengang, havde vidst, hvad vi ved i dag. Det er altså en revideret og forbedret version af den historiske læreproces, som eleverne rekapitulerer. Freudenthal taler i denne forbindelse om "guidet reinvention" (genopfindelse), for at understrege læreprocessen snarere end inventionen. Kernen i den matematiske virksomhed er ifølge ham matematisering, hvor der organiseres ud fra et matematisk perspektiv. Det er ved at matematisere, at eleverne reinventerer matematiske strukturer. Freudenthals opfattelse af lærerprocessen som guidet reinvention er grundlaget for den hollandske RME-tilgang (Realistic Mathematics Education).

Som et middel til at støtte reinventionsprocessen peger Gravemeijer & Doorman (1999) på kontekstopgaver, der defineres som opgaver med problemsituationer, som af eleverne opleves som realistiske. Det understreges at relationen mellem anvendelsen af kontekstopgaver og elevernes virkelighed er refleksiv. På den ene side skal kontekstopgaverne være knyttet elevernes virkelighed, og på den anden side skal kontekstopgaverne medvirke til at udvide elevernes virkelighed. Gravemeijer & Doorman illustrerer anvendelsen af kontekstopgaver i RME med et forløb i differential- og integralregning, hvor det er forbindelsen mellem hastighed og vejlængde, der skal tilbyde eleverne midler til at ræsonnere og handle meningsfuldt. Indledningsvis vil elevernes løsninger være knyttet til den konkrete kontekst, men gradvist vil eleverne udvikle matematiske redskaber og matematisk forståelse på et mere formelt niveau. De modeller, der fremkommer ved elevernes aktivitet ved løsning af kontekstopgaverne, vil støttet af interaktionen mellem lærere og elever føre til højere niveauer af matematisk tænkning.

Guidet reinvention som undervisningsprincip

Det er af mange grunde, bl.a. kulturelle og geografiske, oplagt, at den hollandske RME tilgang kan virke som inspirationskilde til at udvikle den danske matematikundervisning på gymnasialt niveau. Det gælder ikke mindst i den nuværende situation, hvor gymnasireformen i august 2005 bl.a. sigter mod, at fagligheden skal styrkes gennem øget vægt på samspillet mellem fagene i de såkaldte studieretningsforløb. Efter min opfattelse tilbyder de hollandske erfaringer en ramme for at udvikle et frugtbart samspil mellem matematik og andre af gymnasiets fag. Jeg vil kort præsentere to tiltag med rod i det matematikdidaktiske miljø ved Syddansk Universitet, hvor RME anvendes som fundament for udvikling af undervisningsforløb, hvor målet er at eleverne skal reinventere funktionsbegrebet ud fra en brugssammenhæng, hvor det dukker frem i forbindelse med elevernes arbejde med at opstille en *model af* et konkret fænomen. Modellen vil i forbindelse med elevernes matematisering ændre karakter og blive til en *model for* en bestemt funktionsklasse (Gravemeijer & Doorman 1999).

Som en del af mit ph.d.-projekt udviklede jeg et seks ugers integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik med tilhørende undervisningsmateriale, hvor funktioner introduceres som et modelleringsredskab til at beskrive og analysere kvantitative aspekter af omgivelserne. Den grundlæggende ide i forløbet er, at eleverne via kontekstopgaver møder en række konkrete situationer fortrinsvis fra fysik, som ved hjælp af matematiske modeller konstrueret af eleverne kan undersøges og beskrives under varierende betingelser. Disse situationer gør det muligt for eleverne at udforske variabel- og funktionsbegrebet.

Forløbet, der er centreret om radioaktive henfaldsprocesser og eksponentielle vækstfunktioner, består af sekstemaer, og kan naturligt opdeles i tre dele:

- eksponentiel vækst
- matematiske modeller og fysiske eksperimenter
- funktionsbegrebet

Første del består af temaerne Radioaktivitet og Smittespredning, hvor den eksponentielle vækstmodel introduceres. Temaerne Matematiske modeller og Eksperimenter danner anden del, hvor resultaterne af den hidtidige virksomhed med den eksponentielle vækstmodel sammenfattes samtidig med at modellen udvides gennem udforskning af transformationer af eksponentielle vækstfunktioner. Dette gøres bl.a. ved at behandle eksperimentelle situationer som matematisk situeret. Sidste del af forløbet består af temaerne Funktioner og Modellering af radioaktiv henfaldskæde. Mens tilegnelsen af praktisk og konkret viden dominerer de to

første dele af forløbet, så er den sidste del orienteret mod mere teoretiske og strukturelle aspekter af eksponentielle vækstfunktioner. Forsøgsmaterialet består af fem hæfter - et til hvert af forløbets fem første temaer. Hvert hæfte indledes med en introduktion efterfulgt af en række kontekstopgaver knyttet til temaet (Michelsen 2001).

Rasmussen (2003) præsenterer i sin Masterafhandling i Gymnasiepædagogik et tværfagligt forløb mellem matematik og fysik, hvor målet er at udvikle elevernes modelleringskompetence og give dem mulighed for reinvention af funktionsbegrebet. Udgangspunktet er at elevernes udforskning af forskellige typer af bevægelse fører til forskellige funktionstyper – cirkelbevægelsen og pendulbevægelsen giver anledning til en trigonometrisk funktion, mens frit fald kan give anledning til reinvention af 2. gradspolynomier. Forløbet indledes med at eleverne undersøger forskellige bevægelser, som de videofilmer og beskriver matematisk. Videofilmen analyseres ved hjælp af en computer, hvor et program gør det muligt at indtegne et koordinatsystem direkte på skærmen. Ved at klikke sig frem billede for billede og ved hvert klik på skærmen på den bevægelige genstand (fx et fast punkt på et cykelhjul, der bevæger sig med konstant fart) sættes der en prik i koordinatsystemet, og filmen flytter sig samtidig et billede. Ved at gentage processen vil sporet af genstandens bevægelse fremkomme på skærmen i form af en graf. Yderligere kan der oprettes et tabel med sammenhørende værdier fra koordinatsystemet. Efterfølgende undersøger eleverne hvordan ændring af parametre vil ændre grafens form. Fokus i elevernes matematisering er herved skiftet fra modellen af bevægelsen til modellen for en matematisk struktur.

Nye artefakter i undervisningen

I de ovenfor omtalte forløb spiller lærebogen ingen central rolle. Det handler først og fremmest om, at der i elevernes omgivelser er en række opgaver eller udfordringer, som er vævet sammen af artefakter, hvoraf lærebogen blot er en blandt mange. *Artefakter* anvender jeg her i den betydning begrebet har inden for den sociokulturelle tradition, hvor det er betegnelsen for kulturelle elementer, som medierer menneskelig virksomhed. Artefakter kan både have en materiel form som fysiske hjælpemidler, fx blyant og computer, men kan også have en mere abstrakt form som hjælpemidler til tænkning, fx sprog, tegn og symboler (Cole 1996).

Det indgår som et centralt element i en læreproces at kunne udnytte de forskellige medieringsformer, der findes i kulturen, og det er derfor nødvendigt at inddrage sociale og kulturelle aspekter som integrerede elementer af det fænomen, der studeres for at forstå elevernes læring. I et sådant perspektiv må læring og udvikling forstås ud fra spørgsmål om hvordan eleverne kommer i kontakt med og tilegner sig – *approprierer* – sociokulturelle kundskaber, færdigheder og erfaringer. Blikket må rettes mod, hvordan eleverne lærer sig at beherske medierende redskaber og anvende dem som ressourcer i sociokulturelle praktikker (Säljö 2000). Ifølge Säljö vil den traditionelle, lærercentrerede og tekstbundne form for undervisning miste sin position som model for hvordan kundskab udvikles på en fremgangsrig måde. Uddannelsessystemet vil på sin egen langsomme og ofte modvillige måde ændre sin måde at arbejde på.

Den formelle undervisning og dens kommunikative tradition blev skabt da skoler og universiteter havde nærmest fuldstændig kontrol over den information som mennesker havde adgang til. I en praktisk pædagogisk sammenhæng er det vigtigt at være opmærksom på hvordan bestemte anvendelser af medierende redskaber kan hjælpe til at fremme elevernes evne til at ræsonnere og deres muligheder for at udvide forståelsen af et matematisk begreb. De seneste års teknologiske udvikling har betydet, at der er en række nye kulturelle hjælpemidler til rådighed, som kan åbne for nye muligheder for læring, fx nye former for interaktivitet eller simuleringer og visualiseringer knyttet til problemløsning. Informationsteknologien vil øge omfanget og naturen af de erfaringer, som er til elevernes rådighed i forbindelse med læring af matematik. Det bliver interessant at se, om den kommende gymnasireform blot vil betyde en mindre omskrivning af de eksisterende lærebøger i matematik, eller om der vil ske en udvikling af læremidler baseret på pædagogisk og matematikdidaktisk forskning med det mål at udnytte alle tilgængelige ressourcer i læringsmiljøet. For matematikfagets og elevernes skyld håber jeg, at det sidste bliver tilfældet.

Referencer

- Arnbak, E. (2001) Læseforudsætninger og lærebogens formidling af fagets elementer. *GYMNASIEPÆDAGOGIK* 17, 47-63
- Carstensen, J. & Frandsen, J. (1997) *MAT 1*. Systime

- Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992) A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal of Research in Mathematics Education*, 23, 2-33.
- Cole, M. (1996) *Cultural Psychology*. Harvard University Press
- Davis, P.J. & Hersh, R. (1990) *The Mathematical Experience*. Penguin Books
- Freudenthal, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers
- Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999) Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129
- Krapp, A. (2002) Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective. *Learning and Instruction*, 12, 383-409
- Kristensen, E. & Rindung, O. (1981) *Matematik 1 for 1.g.* G.E.C. Gads Forlag
- Lesh, R. A. (ed.) & Doerr, H. M. (red.) (2003) *Beyond Constructivism*. Lawrence Erlbaum Associates
- Love, E. & Pimm, D. (1996) 'This is so': a text on texts. I Bishop et al. (red.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 371-409
- Michelsen, C. (2001). *Begrebsdannelse ved domæneudvidelse. Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet*
- Niss, M. (1999) Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 40, 1-24.
- Rasmussen, P.V. (2003) *Cinematografi i matematikundervisningen. Matematisk kompetenceudvikling og begrebsdannelse i et virtuelt og tværfagligt forløb mellem matematik og fysik*. Masterafhandling ved DIG, Syddansk Universitet (se også <http://www.haslev-gym.dk/pr/media/master1.ppt>)
- Streefland, L. (ed.) (1993) *The Legacy of Hans Freudenthal*. Kluwer Academic Publishers
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken – ett sociokulturellt perspektiv*. Prisma