Biomat I: Biologiske eksempler

Magnus Wahlberg og Meike Linnenschmidt

Mandag 30 nov kl 10-12, U28. **Vores logaritmiske sanser**

<u>Hvad er logaritmer?</u>
Hvis $y = a^x$ så er $x = log_a y$

Nogle eksempler:

$\log_{10} 100 = 2$
$\log_{10} 10 = 1$
$\log_{10} 1 = 0$
$\log_{10} 0.1 = -1$
$\log_{10} 0.01 = -2$
$\ln 1 = e$
$\log_2 8 = 3$

Logaritmeloverne:

$\log ab = \log a + \log b$
$\log a / b' = \log a - \log b$
$\log a^b = b \log a$

Bevis af den første logaritmlov: $10^{HL} = 10^{\log a + \log b} = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = ab$, $10^{VL} = 10^{\log ab} = ab$, altså er VL=HL.

Hvorfor er logaritmer nogle gange smarte at bruge?

Eks. Eksponentielle sammenhæng som skal illustreres i en figur:
Lad os sige, at en dyrepopulation starter ud med 2 individer som lever kun et år, men som får 4 stks afkomme sammen
Året efter er der 4 individer, som får 8 stks afkomme
Året efter 8, derefter 16, 32, 64, 128, 256
Populationens størrelse er en eksponentialfunktion $N = 2^Y$, der Y er antallet år.
Hvis vi plotter N mod Y for de første 10 generationer så ser det sådan ud (graf til vænster):

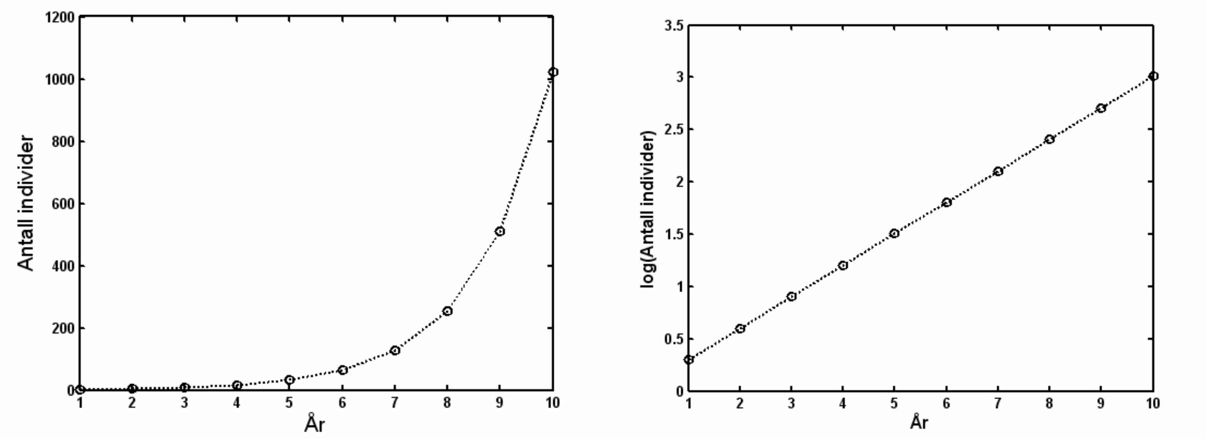


Fig.1

Hvis vi i stedet plotter logaritmerne af individerne mod åren, så bliver det meget nemmere at studere grafen både i den lave og høje ende (graf oven til højre). Nedenunder ser vi den samme effekt ved at vælge en *logaritmisk akse* i stedet for.

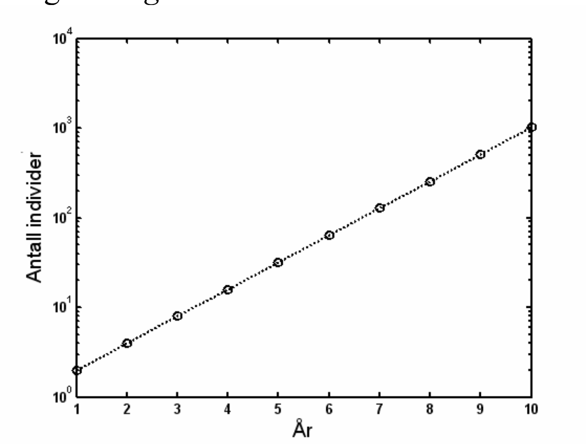


Fig. 2

Generelt kan man sige, at logaritmer er gode til at *komprimere tal serier*, så at de ikke fylder så mange størrelsesordner. Sammenligne f.eks. antallet individer i eksemplet oven:

2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024,

med logaritmen af antallet individer:

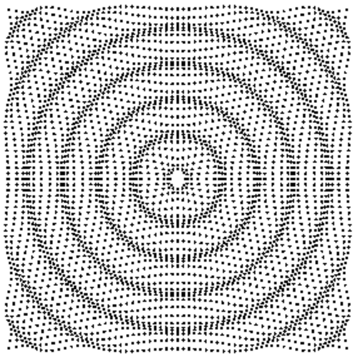
0.30
0.60
0.90
1.2
1.5
1.8
2.1
2.4
2.7
3.0

Den lineære serie spænder over næsten tre størrelsesordener, der det største tal er 500x større end det mindste tal. Den tilsvarende logaritmiske serie ligger indenfor én størrelsesorden, eller 10 ggr. fra det mindste til det største tal. Den logaritmiske serie er *komprimeret* sammenlignet med den lineære serie.

Der vil blive mere om eksponentiel tilvækst indenfor populationsbiologi i torsdagens forelæsning. I dette foredrag skal vi tage fat på et andet biologisk emne, der vi (måske til nogens forbavselse) også ret tit møder logaritmer, navnlig hvordan vi og andre dyre sanser vores omgivelser.

Mennesket har fem sanser: syn, hørelse, smag, lugt, følelse. Vi skal mest snakke lyde, men den samme diskussion kunde lige så godt handle om nogen af de andre sanser.

En *lydbølge* skabes gennem at mediets molekyler skubbes sammen eller trækkes især. Gennem mediets elastik skynder sig partiklerne at prøve at udfylde tomrummet, men kommer så at vandre lidt for langt før de stoppes og igen vender tilbage på grund af de krafter, som findes mellem dem. Under sin bevægelse påvirker de også nabopartiklerne, og får disse til at også begynde at vibrere. Derigennem dannes der en *bølge*, som vandrer med lydes hastighed ud fra kilden gennem mediet.



Figur 3. Animering af Dr. Dan Russell, Kettering University

Lydbølgen består både af partikler som vibrerer, men samtidigt også af trykfluktuationer. Tryk måles i Pascal, eller N/m^2. Det svageste lydtryk, som mennesket kan opfatte, er mindre end 20 µPa. - Det er ikke ret meget! Det kraftigste lydtryk, som mennesket kan udsættes før inden han eller hun begynder føle smerte, er ca. 20 Pa. Dvs. det *dynamiske omfang* for den menneskelige hørelse strækker sig over mere end seks størrelsesordner, der ratioen mellem det største og mindste lydtryk som kan opfattes er en million.

Derfor bruger vi logaritmer til at repræsentere lydbølgers størrelse (amplitude). Den mest almindelige form for disse logaritmer heder *decibel skalaen* og ser sådan ud:

$$dB = 20 \log_{10} (p/p_0)$$

Her er p det målte lydtryk, og p_0 er det så kaldte *reference trykket*, som normalt vælges til 20 µPa (menneskets hørelsestærskel ved 1 kHz). Hvorfor der er en faktor 20 foran logaritmen er en længere diskussion som vi ikke når at gå ind på her. Dog kan det være sjovt at vide, at tingene passer nogenlunde således sammen, at den mindste forandring i lydniveau som mennesket (og faktisk også i stort set alle andre dyre) kan opfatte, er ca. 1 dB, så faktisk giver denne skala rigtigt god biologisk mening. I lydeksemplet nedenunder spiller vi en tone på 1 kHz som hver halve sekund bliver reduceret med intensiteten 1 dB.

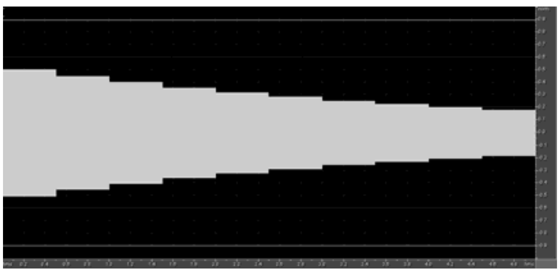
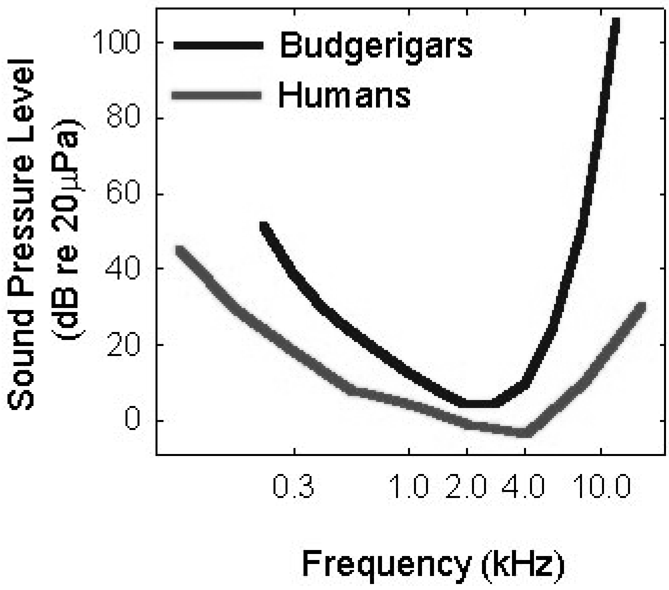


Fig. 4

Gennem at logaritmere hørelses dynamiske område så får vi tal mellem 0 dB og 120 dB, som er meget nemmer at håndtere end den faktor en million, som vi ville have på den lineær skala.



Figur 5. Menneskets audiogram sammenlignet med en undulat.

Hvis man skal være helt korrekt når man bruger decibel, så bør man altid angive lydtrykket med en indikation af hvilket referencetryk man har brugt: f.eks. 20 dB re 20 μPa. Decibellerne kommer jo være afhængige af, hvad der er for reference, og den er ikke altid ens: under vand bruger man tit 1 μPa, og i den ældre litteratur kan man finde mange andre enheder og størrelser for referencetrykket.

En anden god sideeffekt af decibel skalaen er, at praktisk taget alle regnstykker indenfor lydmålinger forvandles til subtraktion og addition, i stedet for multiplikation og division på den lineære skala. Dette illustreres i en regneøvelse nedenunder.

Før vi går i gang med regneøvelser så er der godt at huske nogle gode huskeregler:

$$20 \log 2 = 6$$
$$20 \log 10 = 20$$
$$20 \log 0.1 = -20$$
$$20 \log 3 = 10$$
$$20 \log (1/3) = -10$$
$$20 \log (1/2) = -6$$

<u>*Øvelser (brug ikke lommeregner!):*</u>

1) *Bevis logaritmloverne oven!*

2) *Beregn hvor mange decibel der er i en lydbølge som har trykket*
   a) 2 μPa, b) 2 Pa, c) 1 Pa, d) 50 Pa, e) 25 Pa, f) 200 Pa.

3) *Hvor mange Pascal er der i en lydbølge som er a) 100 dB, b) 40 dB, c) 26 dB, d) 0 dB,*
   e) -26 dB, f) 143 dB), g) 15 dB re 20 μPa?

4) *Hvor meget kraftigere lydtryk får man, i dB, hvis man blander en 1 Pa lydbølge med en anden bølge, som er i fase og som har lydtrykket a) 1 Pa, b) 10 µPa, c) 100 Pa og d) 0.1 Pa?*

5) *Hvor meget kraftigere lydtryk får man, i dB, hvis man blander et lydsignal med lydtrykket 40 dB re20 µPa med en anden signal i fase, som har lydtrykket a) 40 dB, b) 20 dB, c) 100 dB, d) -20 dB re 20µPa?*

6) *Forstærkning angives tit i det antal dB, som signalet forstørres med. Hvor kraftigt er et signal efter forstærkning (både i dB re 1 µPa og Pa) om forstærkningen er 20 dB og det oprindeligt havde et lydtryk af a) 1 Pa, b) 20 dB re 20µPa, c) -40 dB re 1 µPa?*

Nu får vi nogle 'smagsprøver' på lyde. I det første eksempel spiller vi en række toner, som hele tiden øger i lydstyrke med 6 dB mellem hvert trappetrin:

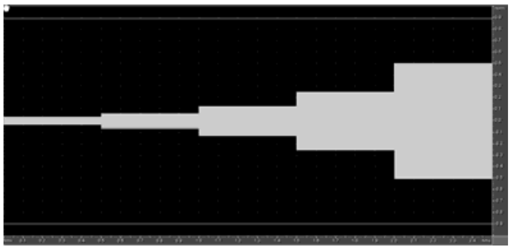


Fig. 6

Du kan se i figuren, at trinnerne følger en eksponentiel serie, men hvis vi nu angive amplituden i logaritmer, ville den lige pludseligt se lineær ud (se populations eksemplet oven i figur 1).

Når vi lytter til det kan i måske fornemme, at disse trin mellem intensiteterne lyder helt ens, det vil sige de lyder ikke *eksponentielt* stigende. Det lyder omtrent som om der er et lige så stort trin mellem den første og den anden tone, som det er mellem den næst sidste og den sidste.

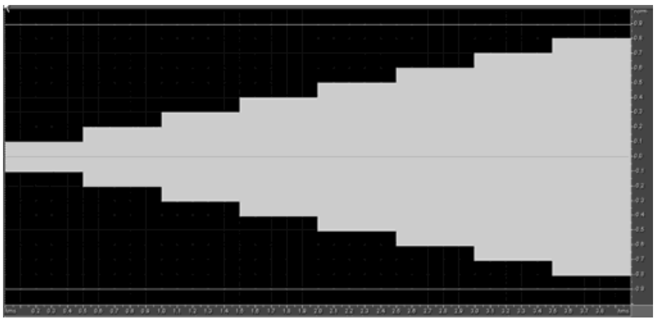


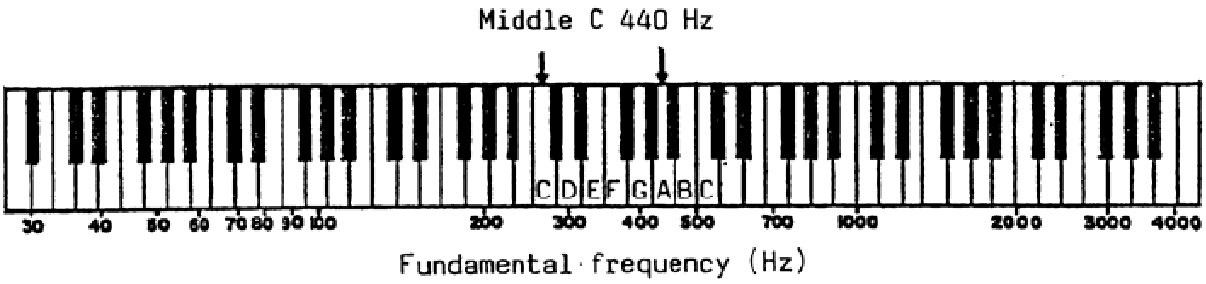
Fig. 7

Hvis vi i stedet før lytter til en lineær stigning i intensitet som i figuren oven, så opfatter vi det som om intensitetsforskellen hele tiden bliver *mindre*.

Forklaringen på dette er, at vores hørelse analyserer lydstyrke som om det vore logaritmer. Som tidligere nævnt så er den mindste forskellen i intensitet vi kan opfatte omtrent 1 dB, uanset om vi lytter til et lydtryk svarende til 10 eller 100 dB re 20 µPa.

<u>Diskussion</u>
Hvorfor er det smart at øret opfatter lydernes instensitet logaritmisk? Prøv at fundere over dette selv, efter de øvelser vi har lavet oven.

Et andet sjovt ting med vores måde at opfatte lyde er, at om vi nu kikker på lydets *frekvensindhold*, så er vores opfattelse atter logaritmisk. Prøv at lyt til følgende eksempel, som består af en række toner der frekvensen hele tiden bliver fordobblet. Sammenlign dette med eksemplet efterpå, der tonernes frekvens øges lineært. Det føles mere naturligt at sige, at det er den første (eksponentielle) serie som lyder til at der er faste trin mellem tonerne. Øret har komprimeret frekvenserne til en logaritmisk skala. For jer som er interesseret i musik, så ved i at en af de mest naturlige enheder for ton højde (frekvens) er en oktav. Uanset hvor man står hen på en hvid tast på pianoet, så er der altid 7 hvide taster op til at man er kommet en oktav højere. En oktav svarer til en fordobling af frekvensen. Dvs. uanset hvor du befinder dig på pianoet, så er der et konstant lineært afstand til en dobbelt så høj (eller halvdelen så mørk) tone.



Pianoets lineære skala svarer til en eksponentiel frekvensakse, eller med andre ord, pianoets taster er en logaritmisk skala af tonhøjde.

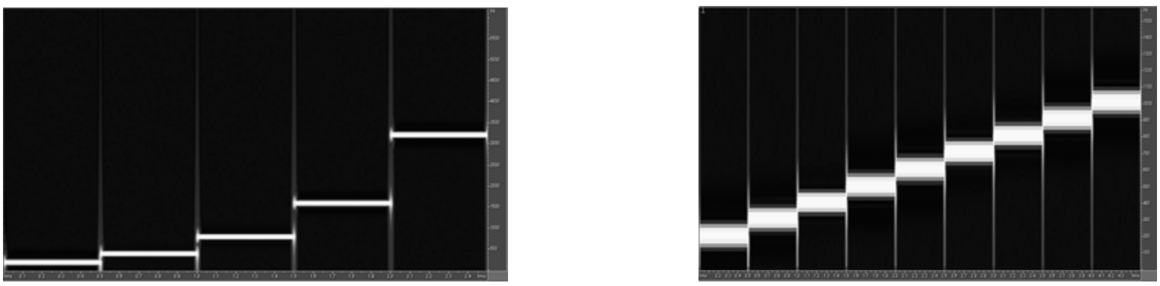


Fig. 8

<u>Diskussion</u>
Hvorfor er det smart at vi opfatter lydenes tonhøjde logaritmisk? Kan vi opfatte forskellen mellem to toner ved 500 og 600 Hz nemmere end mellem 5000 og 5100 Hz? Hvad med 5000 og 6000 Hz?

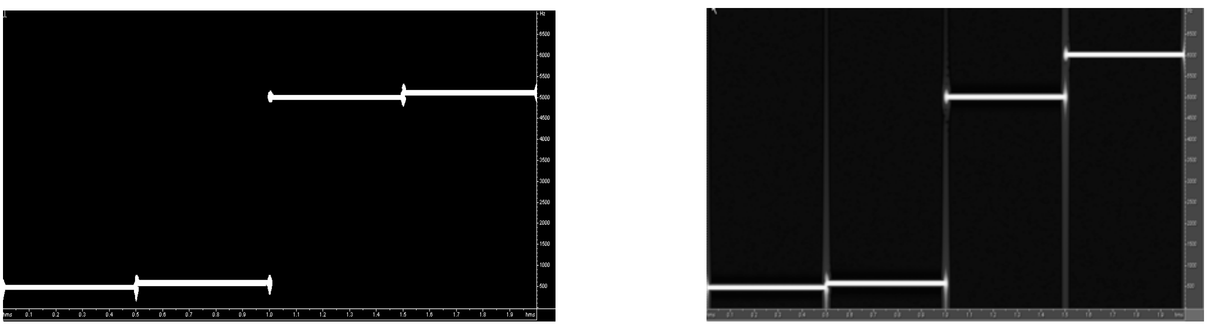


Fig. 9

Som en parentes kan nævnes, at vores musik sans også bygger på en logaritmisk opfattelse af komplekse toner (en *grundtone* og en serie *overtoner*). Følgende eksempel er et akkord med grundtone a0 (220 Hz) og samme akkord med grundtone en oktav op, ved 440 Hz. Akkorden lyder ens i sin klangfarve, fordi at det logaritmiske afstand mellem grund- og overtoner er de samme for de to akkord.

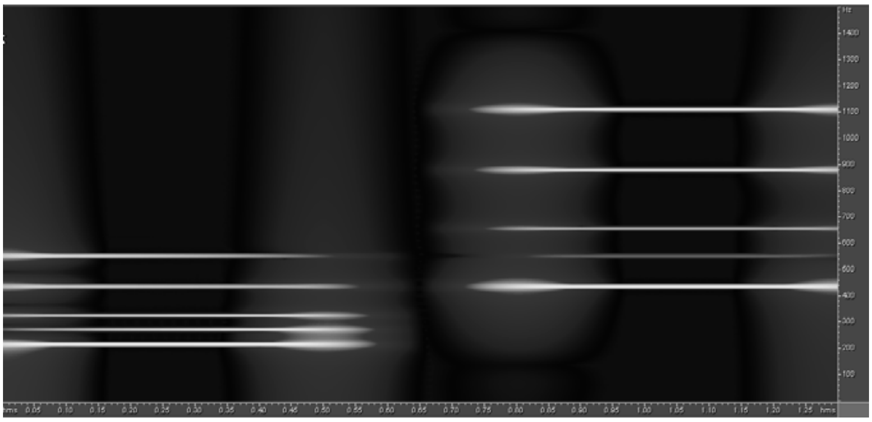


Fig. 10.

For at beskrive et lyd matematisk så er det smartest at bruge de så kaldte harmoniske funktioner. Lydtrykket for en ren sinustone svinger som funktion af tiden med udtrykket:

$$p = \sin(\omega t) = \sin(2\pi\ f\ t),$$

der $\omega = 2\pi\ f$ er den så kaldte *vinkelfrekvens*, og f er *tonens frekvens* (antal svingninger per sekund).

De fleste pattedyr registrerer *trykket* i en lydbølge, men der findes eksempler på mange dyr, som i stedet for registrerer *bevægelsen* i mediets partikler. F.eks. så kan en fisk uden svømmeblære ikke detektere lydtryk, men kun partikelbevægelsen. Derfor er det nogle gange meget vigtigt at kunne regne sig frem og tilbage mellem lydtryk og partikelbevægelse for at forstå, hvad det er for stimulus som dyret egentlig reagerer på. Hvis man er langt væk fra lydkilden, så kan dette gøres meget simpelt gennem formelen

$$v = p\ /\ (\rho c),$$

der ρ er mediets densitet, ca. 1.3 kg/m^3 , c er lydhastigheden, ca. 330 m/s i luft. En yderligere komplikation er, at for lave frekvenser så er det ikke partikelhastigheden, uden *partikel accelerationen*, som fisken reagerer på. Accelerationen gives som du sikkert ved af formeln:

$$a = dv\ /\ dt.$$

<u>*Forstatte øvelser (brug ikke lommeregner!):*</u>

7) *Hvor stor er partikelhastigheden hos en lydbølge med en trykkomponent på 1) 20 µPa, 2) 1 Pa, 3) 20 Pa?*
8) *Hvor stor er partikelaccelerationen hos en harmonisk lydbølge som har en lydintensitet af 60 dB re 1 µPa og som har en frekvens af a) 100 Hz, b) 1 kHz, c) 10 kHz ?*
9) *Hvor stor er partikelforflytningen hos lydbølgerne i Øvelse 8?*

Afleveringsopgaver til uge 50.

10) *En laks har følgende detektions tærskel for accelerationskomponenten i lydbølgen ved forskellige frekvenser. Decibellerne på y akselen er angivne ifølge formelen dB = 20 log (a/a_0), der a_0 er referenceaccelerationen 10^{-5} m/s^2. Hvis man spiller en tone ved 10 Hz og lydtrykket 100 dB re 1µPa, kan laksen så høre den? N.b. under vand bruger vi referencetrykket 1 µPa, og vandets densitet er 1000 kg/m^3 og lydhastigheden i vand er 1450 m/s.*

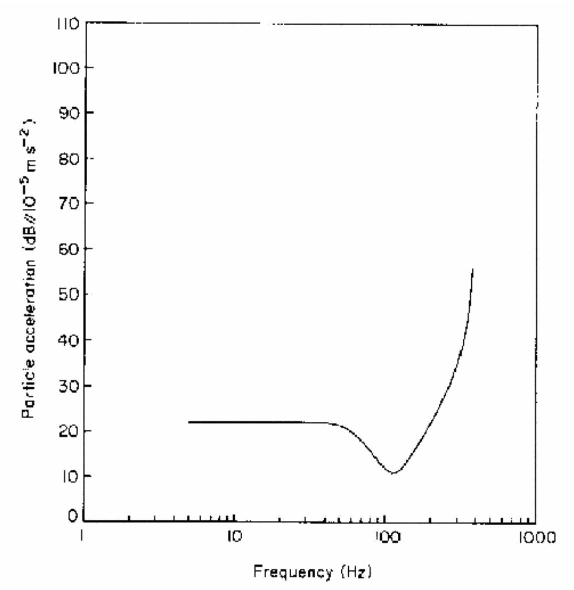


Fig. 11

11) *Lydets intensitet bliver spredt som en funktion af afstanden fra en lyd kilden ifølge formelen:*

Spredningstab i decibel = 20 $\log_{10} r + \alpha r$,

der α er den så kaldte frekvensafhængige absorbtion (Fig. 12 th.), og r er afstanden i meter fra lydkilden..

En flagermus udsender kraftige ultralyde (typisk frekvensindhold 30-50 kHz) og lytter efter de ekkoer, som kommer tilbage fra genstande i rummet. Denne ekkolokaliserings sans gører flagermus til suveræne jæger. Et flagermusskrig kan være enormt kraftigt, over 100 dB re 20 µPa på 1 m afstand.

En del insekter har udviklet ører for at kunne detektere og undgå den ankommende flagermus.

Et insektøre har typisk en følsomhed omkring 50 dB re 20 µPa, det vil sige den reagerer kun hvis lydintensiteten er kraftigere end dette.

På cirka hvilket afstand kan insektet detektere en ankommende flagermus?

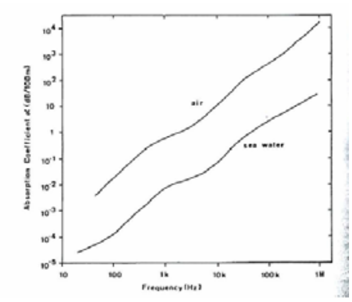


Fig. 12