

INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI
SYDDANSK UNIVERSITET

Facitliste for skriftlig eksamen

MM501 – Calculus I

tirsdag d. 5. januar 2010 kl. 9.00 - 11.00

Der lægges vægt på, at besvarelsene er klart formulerede, og at argumentationen fremtræder tydeligt.

Opgavesættet består af 6 opgaver med ialt 8 delspørgsmål. Den samlede pointsum i hele sættet er 80. De point, der opnås ved denne eksamen, lægges sammen med pointene fra det obligatoriske projekt, og summen danner udgangspunkt for fastsættelsen af det endelige resultat (B eller IB).

OPGAVE 1 (20 point)

Betragt differentiaalligningen $y''(x) + 14y'(x) + 49y(x) = 0$.

(a) Bestem samtlige løsninger.

SVAR: $y(x) = Ae^{-7x} + Bxe^{-7x}$, hvor A og B er vilkårlige konstanter.

(b) Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

SVAR: $y(x) = -6e^{7-7x} + 7xe^{7-7x}$.

OPGAVE 2 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{5x^2 - 9x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

SVAR: $R(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x}$.

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x^2)}{1 - \cos(2x)}.$$

SVAR: Værdien er $\frac{1}{2}$

OPGAVE 4 (10 point)

Antag, at $f(t)$ er løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) + \sin(t) \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Bestem fjerdegrads Maclaurinpolynomiet $P_4(t)$ for $f(t)$.

SVAR: $P_4(t) = 1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^4$.

Opgavesættet fortsættes på næste side.

Om anvendelse af decimaltal i opgaverne 5 og 6:

Anvendes der decimaltal i svaret på et spørgsmål fra denne side, kan besvarelsen af spørgsmålet højst bedømmes som en “god præstation” i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 7.

OPGAVE 5 (20 point)

I denne opgave betegner e som sædvanligt grundtallet for den naturlige logaritme.

- (a) Bestem konstanten C så funktionen

$$h(x) = \frac{C}{x}, \quad e \leq x \leq e^3,$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[e, e^3]$.

SVAR: $C = \frac{1}{2}$.

- (b) Antag nu, at X er en stokastisk variabel med den netop bestemte $h(x)$ som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ og variansen $\text{Var}(X)$.

SVAR: $E(X) = \frac{1}{2}(e^3 - e)$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{2}(e^4 - e^2)$.

OPGAVE 6 (10 point)

Lad A være det komplekse tal $A = -16\sqrt{3} + 16i$. Omskriv A til polær form, og bestem dernæst samtlige rødder i ligningen $z^5 = A$.

SVAR:

$$\begin{aligned} A &= 32e^{i\frac{5\pi}{6}}, \\ z_1 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \\ z_2 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}]}, \\ z_3 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5}]}, \\ z_4 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}]}, \\ z_5 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}]}. \end{aligned}$$