Lineære andenordens differentialligninger.

Projekt for MM501, stillet af Hans J. Munkholm

November-december 2009

Praktiske oplysninger

Projektet indgår med vægt 20% i eksamen i MM501 efter 2. kvartal 2009. Det kan hentes på kursushjemmesiden fra fredag d. 27. november, kl. 15:00.

Besvarelsen afleveres på IMADAs sekretariat[1] senest kl. 9:00 mandag d. 7. december, klart mærket med
— navn,
— eksaminatoriehold
— første seks cifre af CPRnummer.

Hvis du ønsker en kvittering for afleveringen, skal du selv udfylde og medbringe den formular, der findes på sidste side af projektbeskrivelsen.

Projektet omfatter ialt 5 delopgaver, som er er "nummereret" med A, B, C, D, E.[2]

Hver delopgave bedømmes til et sted mellem 0 og 5 point. Det giver mulighed for en sum på 25 point. Da projektet alt i alt højst kan vurderes til 20 point, er der altså syndsforladelse for et par småfejl undervejs. Eller du kan springe helt over en delopgave og stadig få 20 point, hvis alt andet er i orden.

I besvarelsen **behøver du ikke** citere teksten fra de enkelte delopgaver, men du **skal** lave en klar opdeling af besvarelsen i fem afsnit med overskrifterne A, B, C, D, E. Du må meget gerne starte hvert afsnit på en ny side.

Halvdelen af eksaminatorietimerne i uge 49 er reserveret til at arbejde med projektet. Herudover har instruktorerne ikke pligt til at hjælpe. Instruktorernes hjælp må ikke omfatte direkte besvarelse af konkrete delopgaver fra projektet. I stedet opfordres de til at hjælpe ved at vise, hvordan en beslægtet problemstilling kan løses. Jeg indrømmer dog, at det er vanskeligt at trække en meget præcis grænse for såvel hjælpens omfang som dens art.

Du må gerne diskutere projektet med en eller flere kammerater, men den endelige formulering af besvarelsen er dit individuelle job. Eventuelle tilfælde, hvor to eller flere besvarelser indeholder påfaldende mange sammenfaldende passager, kan medføre sanktioner for alle de implicerede personer. Der henvises i denne henseende til universitetets generelle regler om eksamenssnyd:

`http://www.sdu.dk/Information_til/Studerende_ved_SDU/Eksamen/snyd.aspx`

Den ideelle besvarelse er kort og præcis. Man får ikke ekstra mange point for at anføre mange mellemregninger. Min egen besvarelse fylder netto mindre end 4 sider. Den er trykt i samme stil som delopgaverne, og den omfatter alle 5 delopgaver PLUS den delvis aborterede delopgave F. Længere eller kortere besvarelser accepteres naturligvis. Aflevering i **pæn, læselig og ordentlig** håndskrift er OK, men her er det naturligvis svært at angive et normalt antal sider.

[1] Koordinater: Ø13-601b-2. Alternativ afleveringssted: HJMs kontor, med koordinater Ø13-603a-2.

[2] Oprindelig var der også en opgave F, men jeg fandt, at sættet måske var blevet lidt langt. Udeladelsen af opgave F efterlader en interessant problemstilling hængende sært i den frie luft. Derfor er opgaven stadig med i teksten, og evt. interesserede er velkomne til at aflevere den. Tyve point er dog stadig det højest opnåelige.

Homogene og inhomogene lineære differentialligninger - et par definitioner.

Startpunktet er en differentialligning af formen

$$y''(t) + b(t) \cdot y'(t) + c(t) \cdot y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

hvor $b(t)$, $c(t)$ og $f(t)$ er reelle funktioner, som anses for kendte. Den ubekendte funktion er altså $y(t)$, som i dette projekt altid har reelle værdier.

Hvis $f(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, kaldes differentialligningen *homogen.* Hvis derimod $f(t) \neq 0$ for mindst én t-værdi, kaldes ligningen *inhomogen.*

Hvis (1) er inhomogen, kan man få en homogen differentialligning

$$y''(t) + b(t) \cdot y'(t) + c(t) \cdot y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

ved at erstatte funktionen $f(t)$ med nul. Den kaldes *den til* (1) *hørende homogene differentialligning.*

Første del

Den første del handler om sammenhængen mellem løsningerne til (1) og løsningerne til (2).

Delopgave A

Antag, at funktionen $z_0(t)$ er en løsning til den inhomogene ligning (1), og at $z(t)$, $w(t)$, er to funktioner, som opfylder ligningen

$$z(t) = z_0(t) + w(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vis, at

1. Hvis $w(t)$ er en løsning til den homogene ligning (2), så er $z(t)$ en løsning til den inhomogene ligning (1).

2. Hvis omvendt $z(t)$ er en løsning til den inhomogene ligning (1), så er $w(t)$ en løsning til den til den homogene ligning (2).

Delopgave B

Forestil dig, at du kender alle løsninger til den homogene ligning (2), og desuden en enkelt løsning, $z_0(t)$, til den inhomogene ligning (1). Beskriv i ord eller i formelsprog (eller en blanding), hvordan du da kan opskrive samtlige løsninger til den inhomogene ligning (1).

Anden del

Her forudsættes funktionerne $b(t)$ og $c(t)$ at være konstante, lig med henholdsvis b og c.

Den homogene ligning (2) er da af den type, som er behandlet i uge 47. Alle dens løsninger er derfor kendte i den forstand, at de kan skrives op, når tallene b og c kendes. Ifølge resultatet i delopgave B kan man altså også opskrive samtlige løsninger til den inhomogene ligning (1), **hvis** det lykkes at finde bare en enkelt af dem.

Til det formål findes der for visse typer af funktionen $f(t)$ en systematisk gættemetode[3]. De følgende fire opgaver er faktisk eksempler på gættemetoden i brug i nogle simple tilfælde, hvor $f(t) = \delta \cos(2t)$ med forskellige konstanter δ, der i hvert tilfælde er valgt så regnerierne bliver overkommelige.

Delopgave C

Opskriv samtlige løsninger til den inhomogene differentialligning

$$y''(t) - 7y'(t) + 12y(t) = 130 \cos(2t). \tag{3}$$

VINK: Man gætter/håber på, at konstanterne α og β kan vælges så

$$z_0(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t) \tag{4}$$

er en løsning. Man indsætter så sit gæt i differentialligningen og bestemmer værdier for α og β så “pengene passer”.

Delopgave D

Opskriv samtlige løsninger til den inhomogene differentialligning

$$y''(t) + 9y(t) = 10 \cos(2t). \tag{5}$$

VINK: Gæt igen på en enkelt løsning af formen (4).

Delopgave E

Her betragtes den inhomogene differentialligning

$$y''(t) + 4y(t) = 8 \cos(2t). \tag{6}$$

Opskriv samtlige løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Gør herefter rede for, at ingen funktion af formen (4) kan være løsning til (6).

Delopgave/oplysning F (jvf fodnote 2 på forsiden)

Opskriv samtlige løsninger til den inhomogene ligning (6).
VINK: Erstat gættet (4) med et gæt af formen

$$z_1(t) = t z_0(t). \tag{7}$$

[3]som faktisk omtales i kapitel 17.6 af Adams, Calculus, under navnet “method of undetermined coefficients.”

Kvitteringsformular

Vil du have en kvittering for din aflevering, skal du medbringe denne formular til IMADAs kontor i udfyldt stand.

Navn: ____

CPRnr. (første 6 cifre): ______________________________

Eksaminatoriehold: __________________________________

Afleveringsdato: ____________________________________

har ovennævnte dato afleveret en projektrapport for kurset MM501 til IMADA.

For IMADA: Lone S. Petterson eller Hans J. Munkholm eller Svend Kiilerich.

Underskrift: ____