Hans J. Munkholm: En besvarelse af

Projekt for MM501, Lineære differentialligninger

November-december 2009

Nummererede formler fra opgaveformuleringen

Her samles alle opgavens differentialligninger og de gæt, der foretages, med den oprindelige nummerering.

$$y''(t) + b(t) \cdot y'(t) + c(t) \cdot y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$y''(t) + b(t) \cdot y'(t) + c(t) \cdot y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$y''(t) - 7y'(t) + 12y(t) = 130\cos(2t). \tag{3}$$

$$z_0(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t) \tag{4}$$

$$y''(t) + 9y(t) = 10\cos(2t). \tag{5}$$

$$y''(t) + 4y(t) = 8\cos(2t). \tag{6}$$

$$z_1(t) = tz_0(t). \tag{7}$$

Delopgave A

Da $z_0(t)$ er givet at være en løsning til (1), har man

$$z_0''(t) + b(t) \cdot z_0'(t) + c(t) \cdot z_0(t) = f(t). \tag{8}$$

Bevis for første påstand: Når $w(t)$ løser (2), har man

$$w''(t) + b(t) \cdot w'(t) + c(t) \cdot w(t) = 0. \tag{9}$$

Man adderer nu ligningerne (8) og (9). Så omskriver man resultatet ved først at omordne summandernes rækkefølge, og dernæst at sætte faktoren $b(t)$ uden for en parentes, og faktoren $c(t)$ uden for en anden parentes. Dette giver ligningen

$$(z_0''(t) + w''(t)) + b(t) \cdot (z_0'(t) + w'(t)) + c(t) \cdot (z_0(t) + w(t)) = f(t). \tag{10}$$

Da $z(t) = z_0(t) + w(t)$, gælder også $z'(t) = z_0'(t) + w'(t)$ og $z''(t) = z_0''(t) + w''(t)$. Disse tre ligninger kan benyttes til at omskrive (10) til

$$z''(t) + b(t) \cdot z'(t) + c(t) \cdot z(t) = f(t), \tag{11}$$

og det er hermed påvist, at $z(t)$ løser (1).

Bevis for anden påstand: Når $z(t)$ løser (1), har man

$$z''(t) + b(t) \cdot z'(t) + c(t) \cdot z(t) = 0. \tag{12}$$

Man trækker nu ligningen (8) fra (12). Så omskriver man resultatet ved først at omordne leddenes rækkefølge, og dernæst at sætte faktoren $b(t)$ uden for en parentes, og faktoren $c(t)$ uden for en anden parentes. Dette giver ligningen

$$(z''(t) - z_0''(t)) + b(t) \cdot (z'(t) - z_0'(t)) + c(t) \cdot (z(t) + z_0(t)) = 0. \tag{13}$$

Da $z(t) = z_0(t) + w(t)$, er $w(t) = z(t) - z_0(t)$, $w'(t) = z'(t) - z_0'(t)$ og $w''(t) = z''(t) - z_0''(t)$. De tre sidste ligninger kan benyttes til at omskrive (13) til

$$w''(t) + b(t) \cdot w'(t) + c(t) \cdot w(t) = 0, \tag{14}$$

og det er hermed påvist, at $w(t)$ løser (2)

Delopgave B

Lad L_0 betegne mængden af løsninger til (2). Lad L_f betegne mængden af samtlige løsninger til (1). Da gælder formlen:

$$L_f = \{z_0(t) + w(t) \mid w(t) \in L_0\}.$$

Udtrykt i ord: Man får samtlige løsninger til den inhomogene ligning (1) ved at starte med en enkelt af dem, og lægge samtlige løsninger til den homogene ligning (2) til.

Bevis: Det første resultat i delopgave A viser at alle funktioner af formen $z_0(t) + w(t)$ med $w(t) \in L_0$ er med i L_f. Det skal omvendt vises, at når $z(t) \in L_f$, så findes der en funktion $w(t) \in L_0$ med $z(t) = z_0(t) + w(t)$. Ligningen kan selvfølgelig løses (tag $w(t) = z(t) - z_0(t)$), og det andet resultat fra delopgave A sikrer, at $w(t)$ ligger i L_0.

Delopgave C

Den til (3) hørende homogene ligning er

$$y''(t) - 7y'(t) + 12y(t) = 0. \tag{15}$$

Til den svarer andengradsligningen $r^2 - 7r + 12 = 0$ med diskriminant $D = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1$. Rødderne er altså $r_1 = \frac{7+1}{2} = 4$ og $r_2 = \frac{7-1}{2} = 3$. Opskriften fra slides for uge 47 (Tilfælde I) fortæller derfor, at den fuldstændige løsning til den homogene ligning (15) er givet ved formlen

$$w(t) = Ae^{4t} + Be^{3t}, \quad \text{hvor } A \text{ og } B \text{ er vilkårlige konstanter.} \tag{16}$$

Gættefunktionen (4) har $z_0(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)$, $z_0'(t) = 2\alpha \cos(2t) - 2\beta \sin(2t)$, og $z_0''(t) = -4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t)$. Når man indsætter $y = z_0$ i (3) og samler leddene efter om de indeholder faktoren $\cos(2t)$ eller faktoren $\sin(2t)$ får man ligningen

$$(8\alpha + 14\beta)\sin(2t) + (-14\alpha + 8\beta)\cos(2t) = 130\cos(2t). \tag{17}$$

Betingelsen for at $z_0(t)$ løser (3) bliver altså udtrykt ved to ligninger til bestemmelse af α og β, nemlig

$$\begin{aligned} 8\alpha + 14\beta &= 0 \\ -14\alpha + 8\beta &= 130 \end{aligned}$$

Dette system har løsningen $(\alpha, \beta) = (-7, 4)$, så den løsning til (3), vi når frem til, er

$$z_0(t) = -7\sin(2t) + 4\cos(2t) \tag{18}$$

Den endelige formel for samtlige løsninger til (3) er så

$$z(t) = -7\sin(2t) + 4\cos(2t) + Ae^{4t} + Be^{3t}, \quad \text{hvor } A \text{ og } B \text{ er vilkårlige konstanter.} \tag{19}$$

Delopgave D

Den homogene ligning, der svarer til (5). er

$$y''(t) + 9y(t) = 0. \tag{20}$$

Til den svarer andengradsligningen $r^2 + 9 = 0$ med diskriminant $D = 0^2 - 4 \cdot 9 = -36$. Rødderne er altså komplekse tal $k \pm i\omega$, hvor $k = 0$, $\omega = 3$. Opskriften fra slides for uge 47 (Tilfælde III) fortæller derfor, at den fuldstændige løsning til den homogene ligning (20) er givet ved formlen

$$w(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t), \quad \text{hvor } A \text{ og } B \text{ er vilkårlige konstanter.} \tag{21}$$

Gættefunktion $z_0(t)$ er den samme som i delopgave C, hvor vi allerede har udregnet $z_0'(t)$ og $z_0''(t)$. Når man indsætter $y = z_0$ i (5) og samler leddene efter om de indeholder faktoren $\cos(2t)$ eller faktoren $\sin(2t)$ får man ligningen

$$5\alpha\sin(2t) + 5\beta\cos(2t) = 10\cos(2t). \tag{22}$$

Betingelsen for at $z_0(t)$ løser (5) bliver altså udtrykt ved to ligninger til bestemmelse af α og β, nemlig

$$\begin{aligned} 5\alpha &= 0 \\ 5\beta &= 10 \end{aligned}$$

Dette system har løsningen $(\alpha, \beta) = (0, 2)$, så den løsning til (5), vi når frem til, er

$$z_0(t) = 2\cos(2t) \tag{23}$$

Den endelige formel for samtlige løsninger til (5) er så

$$z(t) = 2\cos(2t) + A\cos(3t) + B\sin(3t), \quad \text{hvor } A \text{ og } B \text{ er vilkårlige konstanter.} \tag{24}$$

Delopgave E

Den homogene ligning, der svarer til (6). er

$$y''(t) + 4y(t) = 0. \tag{25}$$

Til den svarer andengradsligningen $r^2 + 4 = 0$ med diskriminant $D = 0^2 - 4 \cdot 4 = -16$. Rødderne er altså komplekse tal $k \pm i\omega$, hvor $k = 0$, $\omega = 2$. Opskriften fra slides for uge 47 (Tilfælde III) fortæller derfor, at den fuldstændige løsning til den homogene ligning (25) er givet ved formlen

$$w(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t), \quad \text{hvor } A \text{ og } B \text{ er vilkårlige konstanter.} \tag{26}$$

Det ses, at gættefunktionen (uanset, hvordan α og β vælges) er losning til den homogene ligning (25). Og så kan den ikke være løsning til den inhomogene ligning (6).

Delopgave/oplysning F[1]

I delopgave E har vi allerede opskrevet og løst den homogene ligning svarende til (6). Vi altså bare se at/om vi kan finde konstanter α og β så funktionen

$$z_1(t) = tz_0(t) = \alpha t \sin(2t) + \beta t \cos(2t), \tag{27}$$

løser (6). Man differentierer to gange og får $z_1'(t) = z_0(t) + tz_0'(t)$ og $z_1''(t) = 2z_0'(t) + tz_0''(t)$. Derfor er

$$\begin{aligned} z_1''(t) + 4z_1(t) &= 2z_0'(t) + tz_0''(t) + 4tz_0(t) \\ &= 2z_0'(t) + t(z_0''(t) + 4z_0(t)) \\ &= 2z_0'(t), \end{aligned}$$

hvor vi til allersidst har benyttet, at $z_0(t)$ (som set i delopgave E) løser den homogene ligning (25). Betingelsen for at $z_1(t)$ løser den inhomogene ligning (6) er altså, at $2z_0'(t) = 8\cos(2t)$, dvs

$$z_0'(t) = 2\alpha \cos(2t) - 2\beta \sin(2t) = 4\cos(2t).$$

Her er løsningen $(\alpha, \beta) = (2, 0)$. Vi får hermed $z_1(t) = 2t\sin(2t)$. For at få samtlige løsninger ud fra denne ene, skal vi lægge løsningerne til den homogene (25) til. De kendes fra delopggave E, og vort endelige svar på denne delopgave/oplysning bliver så følgende: Samtlige løsninger til (6) er givet ved formlen

$$z(t) = 2t\sin(2t) + A\cos(2t) + B\sin(2t), \quad \text{hvor } A \text{ og } B \text{ er vilkårlige konstanter.}$$

[1] Oprindelig var der også en opgave F, men jeg fandt, at sættet måske var blevet lidt langt. Udeladelsen af opgave F efterlader en interessant problemstilling hængende sært i den frie luft. Derfor er opgaven stadig med i teksten, og evt. interesserede er velkomne til at aflevere den. Tyve point er dog stadig det højest opnåelige.