INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI

SYDDANSK UNIVERSITET, ODENSE

Facitliste skriftlig eksamen BioMatI (MM503)

5. januar 2010, kl. 9:00 – 11:00

2 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, inklusive brug af lommeregner/computer.

Opgavesættet består af 5 opgaver med ialt 8 spørgsmål, som hver tæller 12.5 point.

Opgave 1

Betragt en funktion, der er givet ved forskriften

$$g(t) = t - \frac{1}{t} + 2, \quad t > 0.$$

(a) Gør rede for, at g er voksende på hele sin definitionsmængde, og bestem $g^{-1}(2)$.

SVAR: Da $g'(t) = 1 + \frac{1}{t^2}$ er positiv for alle t, er g voksende. $g^{-1}(2) = 1$.

(b) Bestem differentialkvotienten $(g^{-1})'(2)$.

SVAR: $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$.

Opgave 2

Antag, at X er en kontinuert stokastisk variabel med værdiinterval $I = [0, 1]$, og at tæthedsfunktionen for X har formen

$$f(x) = C + x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

hvor C er en konstant.

(a) Bestem C.

SVAR: $C = \frac{2}{3}$.

(b) Bestem middelværdien, variansen og spredningen for X.

SVAR: $E(X) = \frac{7}{12}, \quad Var(X) = \frac{59}{720}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{59}{720}}$.

Opgave 3

En kop med 90 grader (Celsius) varmt vand stilles (til tiden $t = 0$) ud i en gårdhave, hvor temperaturen er -10 grader. Efter 10 minutter er vandets temperatur dalet til 80 grader.

(a) Brug Newtons afkølingslov til at bestemme vandets temperatur, $T(t)$, som funktion at tiden t.

SVAR: $T(t) = 100e^{kt} - 10$, hvor $k = \frac{\ln(0,9)}{10} \approx -0.0105$

(b) Til hvilken tid når vandets temperatur ned på 50 grader?

SVAR: $t = 48,48$ minutter.

Opgavesættet fortsættes på næste side.

Opgave 4

I denne opgave antages det, at $y = f(x)$ betegner en reel funktion, som er defineret for alle reelle tal x, og som er 1-1-tydig.

(a) Gør rede for, at den funktion h, som er givet ved forskriften

$$h(x) = -f(2x - 3),$$

også er 1-1-tydig, og angiv en forskrift for den inverse funktion h^{-1}, udtrykt ved hjælp af f^{-1}.

SVAR: Antag, at $h(x_1) = h(x_2)$. Det skal da vises, at $x_1 = x_2$. Det gøres ved flg. stribe omskrivninger af ligningen

$$\begin{aligned}
h(x_1) &= h(x_2) \\
-f(2x_1 + 3) &= -f(2x_2 + 3) \quad \text{(definitionen af } h\text{)} \\
f(2x_1 + 3) &= f(2x_2 + 3) \quad \text{(multiplikation med } -1\text{)} \\
2x_1 + 3 &= 2x_2 + 3 \quad \text{(fordi } f \text{ er 1-1-tydig)} \\
2x_1 &= 2x_2 \quad \text{(træk 3 fra)} \\
x_1 &= x_2 \quad \text{(divider med 2)}
\end{aligned}$$

$h^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(f^{-1}(-x) - 3\right).$

Opgave 5

(a) Bestem uden brug af lommeregner/computer løsningen til ligningen

$$\frac{1}{3^x} = \frac{7}{9^{x+2}}.$$

SVAR: $x = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} - 4.$