

DM515 – Spring 09 – Weekly Note 8

Spørgetime

Denne afholdes den 19/6 kl 14.15 til 15.30 i lokale U9. Hvis I har konkrete spørgsmål til opgaver, beviser eller lignende, bedes I sende dem til mig per email senest den 17/6.

Endeligt pensum

- Matousek and Gaertner: Understanding and using linear programming, Springer Verlag, Berlin, 2006. Siderne 1-48, 53-89 (der kommer ikke opgaver i 5.8, 5.9) og 142-156, 204 (complementary slackness).
- J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs: Theory algorithms and applications, Springer Verlag, London 2001. Siderne 95-116, 127-143.
- G. Gutin, Computational Optimisation, Notes from Department of Computer Science, Royal Holloway, University of London. Siderne 1-15, 22-24 og 32-55.
- J. Clausen og J. Larsen, Supplementary notes to networks and integer programming, DTU 2009. Siderne 5-18, 69-92 og 143-162.
- W.J. Cook, W. H. Cunningham, W.R. Pulleyblank og A. Schrijver, Combinatorial optimization, Wiley 1998. Siderne 261-265. Dette er afsnittet om cutting planes for TSP og Comb-inequalities. Disse sider (side 252-271) er udleveret til forelæsningsne. Skulle I ikke have fået en kopi, da henvend jer snarest til mig for at få en sådan.
- Alle ugesedler og materiale på disse. Specielt skal I kunne bruge de metoder der er beskrevet på disse.

Hvis nogen mangler noget af det udleverede og ikke kan downloade det fra hjemmesiden, så kom forbi mit kontor og hent det i god tid inden eksamen!

Eksamen den 23/6 9-13:

Alle hjælpemidler bortset fra computer er tilladte. Husk at medbringe alle ugesedler, noter, bog og anden info fra hjemmesiden!

Ved eksamen skal I kunne formulere simple IP og LP problemer ud fra beskrivelser i ord. I skal kunne bruge de udledte metoder (Gomory cuts, Branch and Bound, tilføje lovlige uligheder (valid inequalities), comb inequalities, reducere til og eller løse et strømningssystem

etc). Der lægges ikke stor vægt på beviser, men I skal kunne bruge f.eks. maxflow-mincut sætningen og de konsekvenser af denne som vi har gennemgået. I skal kunne bruge de forskellige metoder (strømning, branch and bound, osv.), men ikke bevise deres korrekthed. I skal kunne bruge relaksationsbegrebet (f.eks IP til LP eller TSP til assignment problemet) og I skal kunne udlede det duale problem af et LP problem og kunne anvende dualitetssætningen. Ovenstående er ikke en udtømmende liste over hvad I skal kunne (se kompetencebeskrivelsen), men giver forhåbentligt et billede af hvad der forventes af jer. **Alle der har arbejdet med kurset og kan anvende metoderne vil kunne bestå eksamen.**

Information vedrørende forelæsningen den 27/5:

Jeg gennemgik blandt andet den alternative formulering af mindste udspændende træproblemet hvor vi søger en billigste kantmængde der kan orienteres som et ud-træ fra punkt 1, dvs et udspændende træ hvor alle punkter bortset fra punkt 1 har præcis en kant ind i sig. (punkterne i $G = (V, E)$ betegnes $V = \{1, 2, \dots, n\}$). Formuleringen (hvor y variabelen vælger kanter fra G medens x variabelen angiver orientering af de valgte kanter og $[i, j]$ er en ikke orienteret kant mellem punkt i og punkt j) er som følger:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{[i,j] \in E} c_{[i,j]} y_{[i,j]} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\{ij:[i,j] \in E\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V - \{1\} \quad (2)$$

$$x_{ij} + x_{ji} = y_{[i,j]} \quad \forall [i, j] \in E \quad (3)$$

$$\sum_{\{ij:i \in S, j \notin S\}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \neq V, 1 \in S. \quad (4)$$

$$x_{ij}, x_{ji}, y_{[i,j]} \in \{0, 1\} \quad \forall [i, j] \in E \quad (5)$$

Ideen er så, som ved alle andre cutting plane metoder, at man udelader den svære betingelse (4) og løser LP-relaksationen af det resterende problem. Hvis den optimale løsning x^* overholder (4) har vi en optimal løsning til LP-relaksationen af det oprindelige problem. Vi kan checke vha flows om den gør dette ved at se på det netværk N^* vi får ved at tage V og alle kanter hvor $x^* > 0$ (bemærk at vi godt kan have $x_{ij}^* > 0$ og $x_{ji}^* > 0$). Kapaciteten af en kant ij i D^* sætter vi til $u_{ij} = x_{ij}^*$ og alle nedre grænser er nul. Der gælder nu (check selv, vi har gennemgået det ved forelæsningerne) at (4) holder for x^* hvis og kun hvis punkterne i N^* ikke kan opdeles i to dele S, \bar{S} så $1 \in S$ og $\sum_{i \in S, j \in \bar{S}} u_{ij} < 1$. Dette kan checkes ved hjælp af flows, thi max-flow-min-cut sætningen siger at hvis der findes et sådant snit (S, \bar{S}) hvor $1 \in S$ og $\sum_{i \in S, j \in \bar{S}} u_{ij} = \alpha < 1$, så kan vi vælge $s = 1$ og $t \in \bar{S}$ så værdien af et maximum (s, t) -flow i N^* er lig med α . Bemærk at dette ikke nødvendigvis gælder for alle valg af $t \in \bar{S}$, men for alle sådanne t har vi at maxflow værdien fra 1 til t er højest α . Hvis vi derfor beregner værdien af et maxflow fra punkt 1 til alle andre punkter (dvs. $n - 1$ maxflow beregninger), så vil vi finde et par hvor denne værdi er mindre end 1 hvis og kun hvis (4) ikke holder.

Magnus spurgte om man kan løse heltalsudgaven af (1)-(3),(5) i polynomiel tid. Svaret er

ja, men det ligger uden for pensum at formulere dette her. [Den mest oplagte måde er at formulere problemet som et snit af to matroider og så bruge en algoritme til at finde en optimal mængde der er uafhængig i begge disse].