$A_{TM} = \{\langle M\rangle\langle w\rangle \mid M$ er en TM og $w \in L(M)\}$

$HALT = \{\langle M\rangle\langle w\rangle \mid M$ er en TM og M stopper på $w\}$

<u>Husk</u> $L(M) = \{w \mid M$ stopper i $q_{acc.}$ når den køres på $w\}$

Ex på TM med

$$L(M) = \emptyset$$

M 1. Stop aldrig

M 2. stop altid men i q_{reject}.

NB For TM M

kan vi algoritmisk (dvs uha TM) lave M'

som stopper på precis L(M)

M' simulerer M på input og hvis M går i $q_{rej.}$ går M' i specialtilstand q^* og bevæger hovedet mod højre på alle $a \in \Gamma$.

Klart at $L(M') = L(M)$

og $\langle M' \rangle \langle w \rangle \in HALT$

$\Updownarrow$

$\langle M \rangle \langle w \rangle \in A_{TM}$

M' er ækvivalent med M mht sproget for disse.

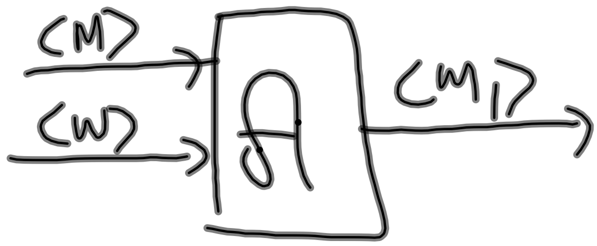
$E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ er en TM og } L(M) = \emptyset\}$

<u>Thm</u> E_{TM} er uafgørligt

<u>P:</u> antag $\exists$ TM R som afgør E_{TM}

<u>Ide</u> vis at A_{TM} så også er afgørligt

$\rightarrow\leftarrow$



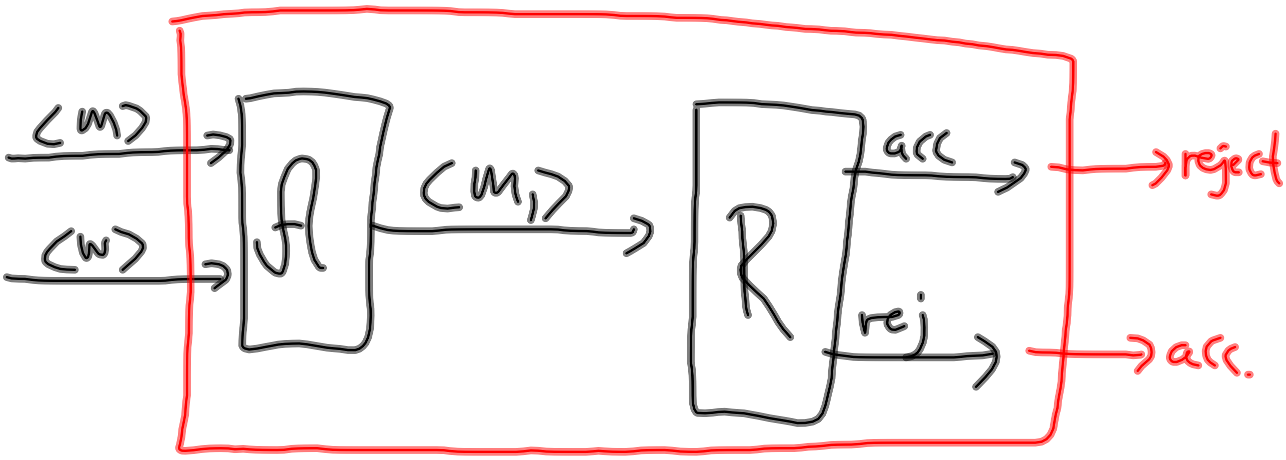
M_1: on input x

Hvis $x \neq w$ reject

ellers simuler M på w

og reject/accept som M

$$L(M_1) = \begin{cases} \emptyset & \text{hvis } M \text{ ej acc } w \text{ eller } \langle M\rangle \text{ ikke TM} \\ \{w\} & \text{hvis } M \text{ acc } w. \end{cases}$$



Denne TM afgør A_{TM} $\rightarrow\leftarrow$

Hvad nu hvis $\langle M \rangle$ ikke var en TM?

Så skal svaret være nej

da $\langle M \rangle \langle w \rangle$ så ikke $\in A_{TM}$

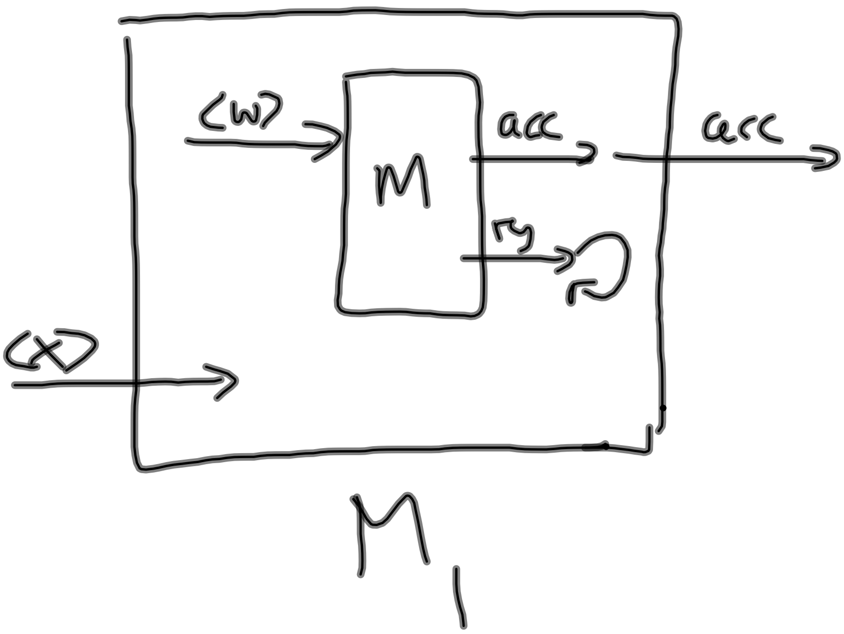
I det tilfælde laver A blot en TM M_1 med $L(M_1) = \emptyset$

vilkårlig

Vi kunne også have lavet en M_1 med

$$L(M_1) = \begin{cases} \emptyset & \text{hvis } M \text{ ej accw} \\ \Sigma^* & \text{hvis } M \text{ accw} \end{cases}$$

eneste vigtige: $\neq \emptyset$


<w>
M
acc
rej
acc
<x>
M1

Def $L \leq_m L'$

"L er mapping reducable til L'"

Hvis $\exists f$ Turing beregnelig funktion computable

$x \longrightarrow f(x)$

vha TM. i endelig tid.

Så $x \in L \iff f(x) \in L'$

Sml med pol. reduktioner i DM508!

Bemærk at $\mathcal{A}$ fra før beregner

$$\begin{tikzcd} \langle M,w\rangle \arrow[r, bend left, "\mathcal{A}"] \arrow[d, equal] & \langle M_1\rangle \arrow[d, equal] \\ x & f(x) \end{tikzcd}$$

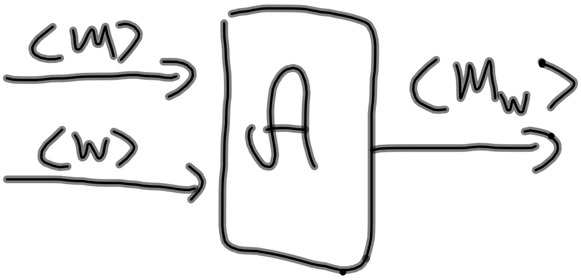
som er en red. fra A_{TM} til $\overline{E_{TM}}$!

$$x \in A_{TM} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{E_{TM}}$$

$$H_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ er en TM og } \varepsilon \in L(M) \}$$

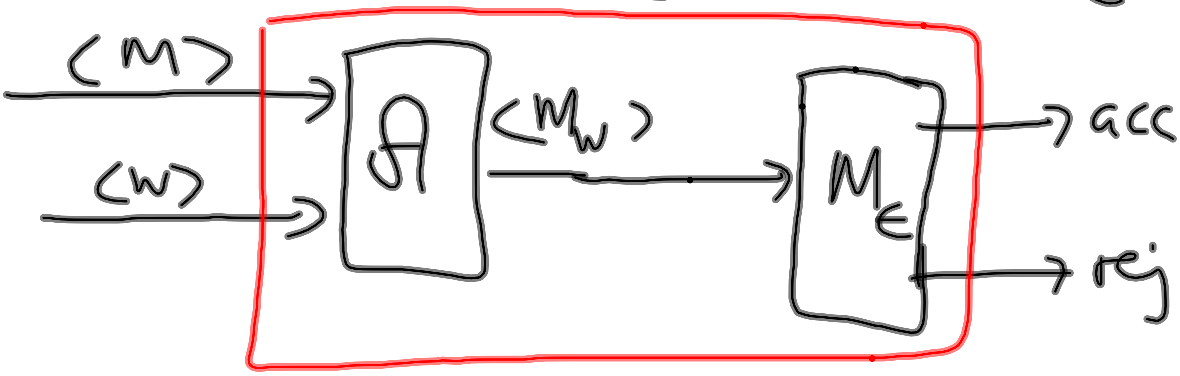
__Thm__ H_ε er uafg. (note)

$$\mathrm{HALT} \leq_m H_\varepsilon$$



$$L(M_w) = \begin{cases} \emptyset & \text{hvis } M \text{ ej acc } w \\ \Sigma^* \text{ (indholder } \varepsilon\text{)} & \text{hvis } M \text{ acc } w \end{cases}$$

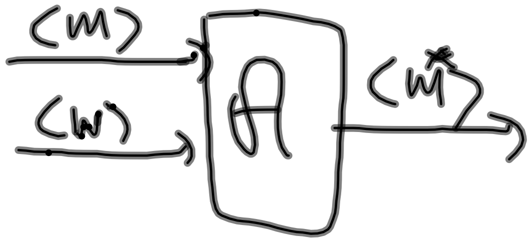
antag at M_ε afgør H_ε



afgør HALT
hvis M_ε findes!

$$\text{Regular}_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ er en TM og } L(M) \text{ er regulært}\}$$

<u>Thm</u> Regular_{TM} er uafg.



$$L(M^*) = \begin{cases} \{a^n b^n \mid n \geq 0\} & \text{hvis } M \text{ ej acc } w \\ \Sigma^* & \text{hvis } M \text{ acc } w \end{cases}$$

M^* på input x:

hvis $x \in \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ så acc

ellers kør M på w og acc x hvis M acc w

Så $L(M^*)$ er regulært

$\Updownarrow$

M acc w

dvs $\langle M^* \rangle \in \text{Regular}_{TM}$

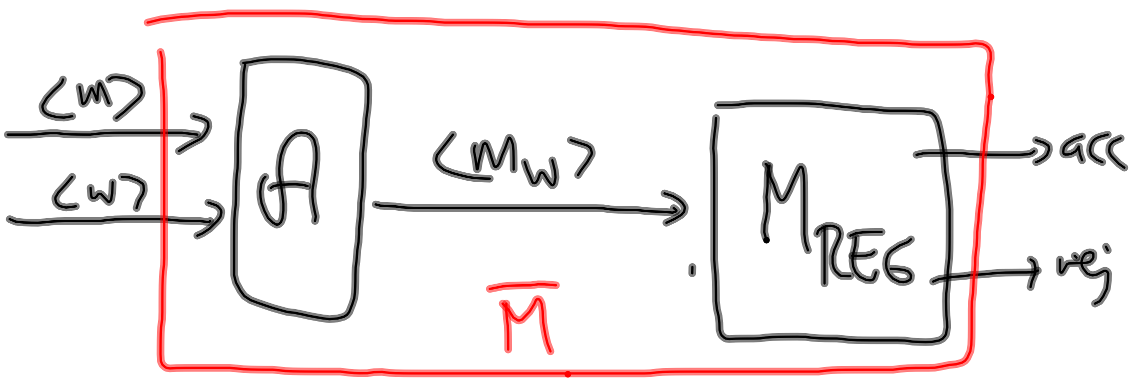
$\Updownarrow$

$\langle M, w \rangle \in A_{TM}$

Så $A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

$\uparrow$ $\Uparrow$

uafg $\Rightarrow$ uafg



$\overline{M}$ afgør A_{TM} → ←

Rice's sætning

Enhver ikke triviel egenskab ved sprog for Turingmaskiner er uafgørlig.

Handler og egenskab ved $L(M)$ for $\langle M \rangle$

ex. · $L(M)$ er regulært

· $L(M)$ indeholder ϵ

· $L(M) = \emptyset$

· $L(M)$ indeholder højst 10 strenge

En egenskab P ved $L(M)$
er ikke triviel:
Hvis $\exists M$ så $L(M)$ har P
og M' så $L(M')$ ikke har P

ex $L(M)$ er reguleret er
en ikke triviel eg. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} = L(M_1)$
$\Sigma^* = L(M_2)$

Bevis for Rice's sætn.

"Identisk" med de foregående beviser

Lad P være ikke triviel egensk.
og <u>antager</u> at M_P afgør

$\{\langle M\rangle \mid M$ TM så $L(M)$ har egenskab $P\}$

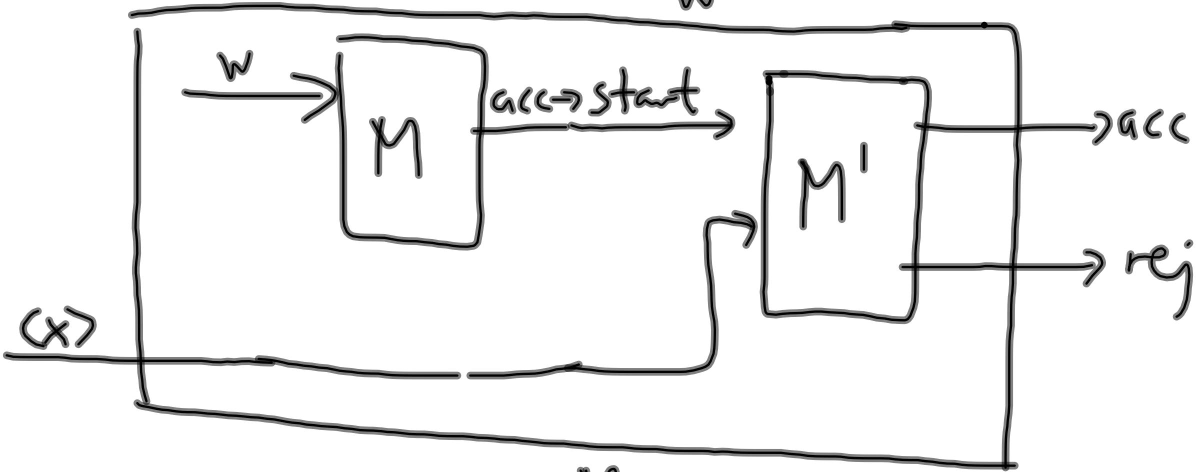
[uden tab af generalitet
har vi at $\emptyset$ ikke har
egenskaben P (ellers se på $\overline{P}$)]

Lad ⟨M'⟩ være en TM

hvis sprog har egenskaben P

M' findes fordi P ikke er triviel

Lav TM M_w:



M_w

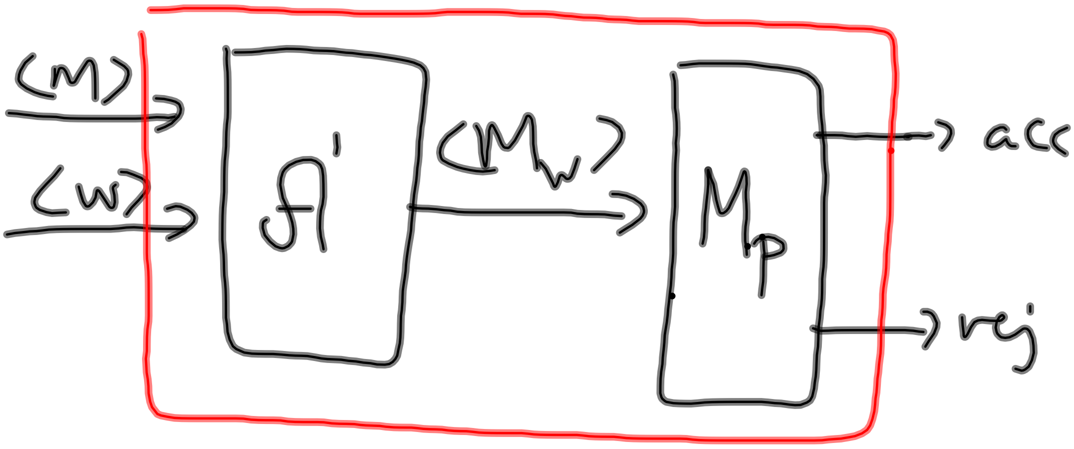
$$L(M_w) = \begin{cases} \emptyset & \text{hvis } M \text{ ej acc } w \\ L(M') & \text{hvis } M \text{ acc } w \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$L(M_w)$ har egenskab P

$\Updownarrow$

M acc w.



afgør A_{TM} —x—

Jan 2000 (b)

handler noget M gør
ved sit bånd
og ikke om L(M)
Så Rice's sætn. kan ikke bruges

Ex på ikke triviel eg.

$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M)$ indeh. alle strenge af lgd 22 $\}$

M_1: Hvis $|x| = 22$ acc
ellers reject

M_2: reject altid

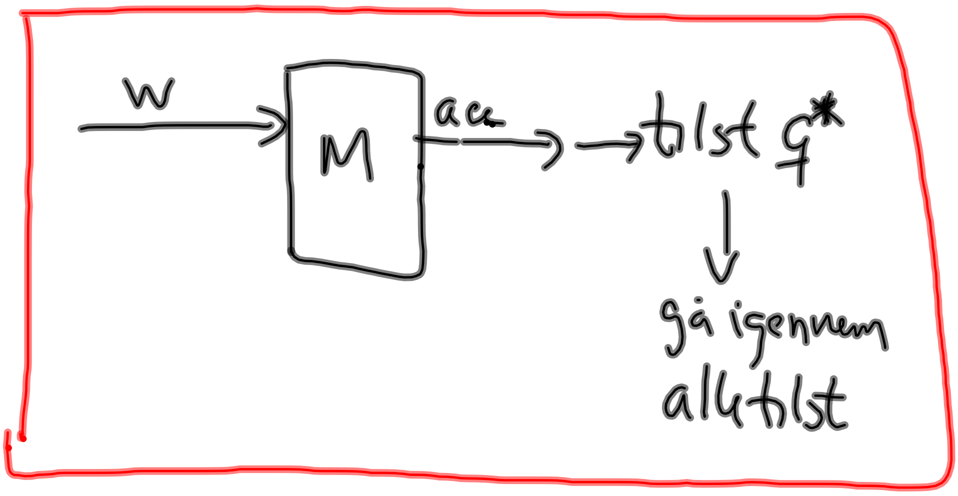
$L(M_1)$ har egenskaben: indeh. $\forall x$ $|x| = 22$

$L(M_2)$ har den ikke!

$L = \{\langle M \rangle \mid M$ gennemløber alle sine tilst på input $\epsilon\}$

$\neq q_{acc}/q_{rej}$

L er uafg.



q^* special tilst som kun nås hvis M acc w

Med gennemløber alle mener vi bortset fra q_{acc}/q_{rej}!