$B = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ is not CFL

$C = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ is not CFL

<u>Pf</u> antag (til modstrid) at

$C = L(G)$ for en CFG G.

og lad p være pumpelgd fra

PL for CFG. $\left(p = b^{|V|+1} \;,\; b = \max\limits_{A \to \beta \in R} |\beta| \right)$

Tag $s = a^p b^p c^p$

adversary opdeler $s = uvxyz$

så 1. $uv^ixy^iz \in C \quad \forall i \geq 0$

3. $|vxy| \leq p$

2. $|vy| > 0$

<u>Till 1.</u> Enten v eller y indeholder 2 forsk symboler

$aa \cdots \underbrace{ab}_{v}b \cdots bc \cdots c$

så er $uv^2xy^2z \notin C$
fordi rækkefølgen af a, b, c
brydes.

Tilf 2 Ingen af v, y indeh. mere
end én af a, b, c

2a : Ingen a'er i vy
så er $uxz \notin C$ →←
fordi $\#a > \min\{\#b, \#c\}$ aa..ab...bc..c

2b ingen b'er i v y

$\underbrace{aa\ldots a}_{vxy}\, bb\ldots b\, \underbrace{cc\ldots c}_{vxy}$

$uv^2xy^2z \notin C$ $\qquad$ $uxz \notin C$

2c ingen c'er i v y

$uv^2xy^2z \notin C$

da $\max\{\#a, \#b\} > \#c$

$\forall L$, L regulært $\wedge$ $L \neq \emptyset$

$\exists n$, så L indeholder en streng

x : $|x| < n$.

P: Lad n være # tilst. i en DFA M

hvor $L(M) = L$

antag alle strenge i L er "for lange"

dvs $\forall x \in L$: $|x| \geq n$

Da L ikke er tomt kan
vi tage et $s \in L$
anvend PL (for regulære sprog)
på s:

$s = xyz$

$xy^iz \in L \;\forall i \geq 0,\ |y| > 0$

antag at vi tog s kortest mulig

men med $i=0$ fås at
$xz \in L$ og $|xz| < |s| \rightarrow\leftarrow$

<u>Sætning</u> $\forall$ CFG G $\exists n$

så

1. Hvis $L(G) \neq \emptyset$ så
   $\exists w \in L(G): |w| < n$
2. Hvis $L(G)$ er uendeligt så
   $\exists w \in L(G): n \leq |w| < 2n$

<u>Bevis:</u> sæt $n = b^{|V|+1}$ (PL).

se w som er kortest mulig: $w \in L(G)$

Hvis $|w| < n$ så er 1. bevist

Hvis $|w| \geq n$ så følger af PL

$w = uvxyz$, så

1. $uv^i x y^i z \in L \ \forall i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3

dvs $uxz \in L$, men $|uxz| < |w|$ $\rightarrow\!\leftarrow$

<u>2:</u> antag at L er uendeligt
så har L strenge af vilkårlig
stor længde.

Tag w så $|w| > 2n$ og
er kortest mulig mht dette
anvend PL på w

$w = uvxyz$, $|vxy| \leq n$
$|vy| > 0$

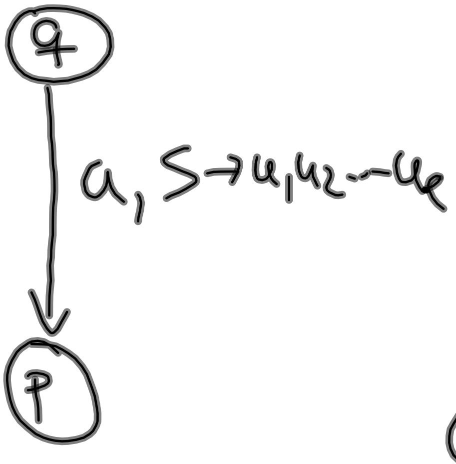
PL $\Rightarrow$ $uxz \in L$

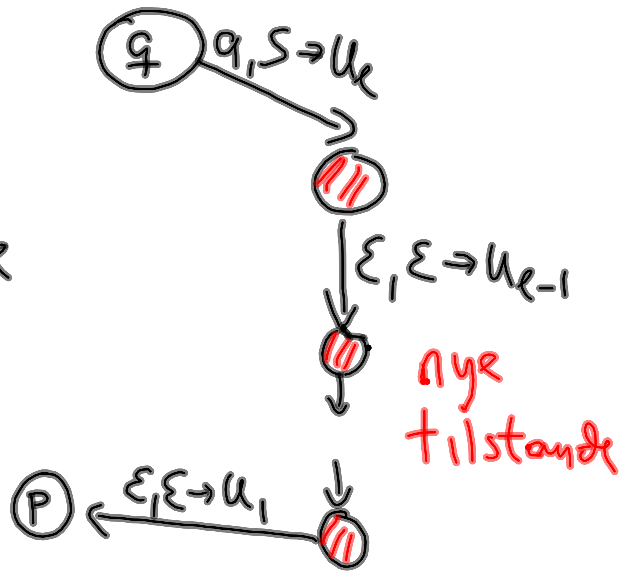
$|uxz| < 2n$ pga valg af w

$|uxz| > n$ da $|vy| \leq n$

dvs $n < |uxz| \leq 2n$ $\square$.

PDA som pusher en lang streng i et skridt kan simuleres vha standard PDA:





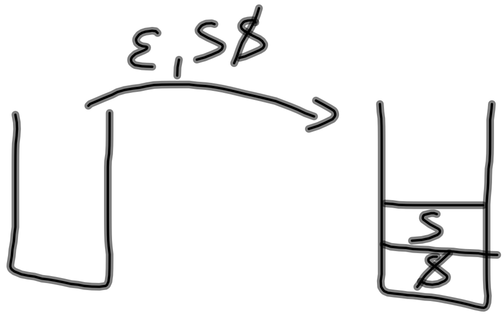
Lemma $L = L(G)$ G CFG

$\Downarrow$

$L = L(M)$ M PDA

Bevisidé: simuler venstre afledninger.

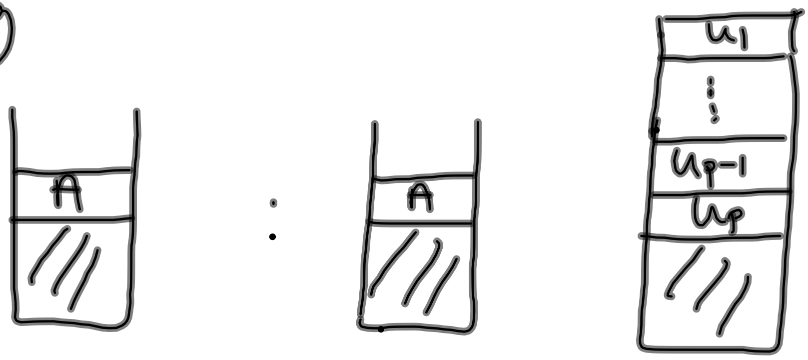
start



S start symbol for G

Gentag

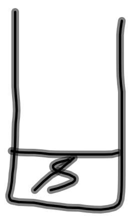
a.



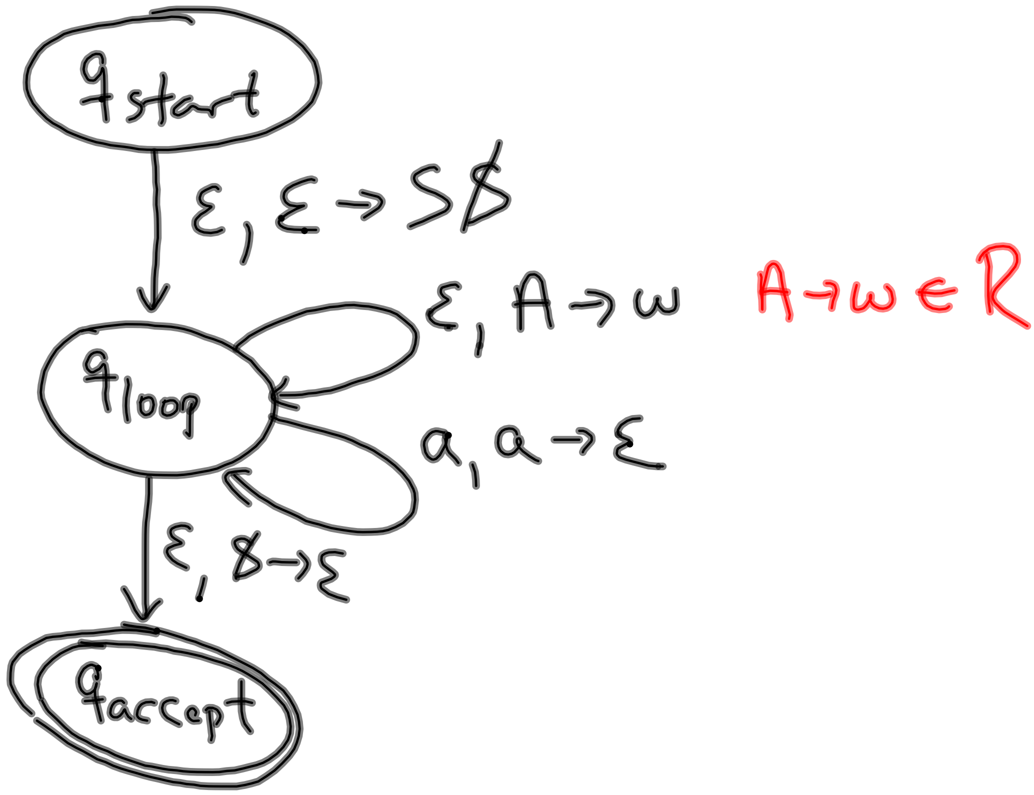
A variabel $\qquad A \to u_1 u_2 \cdots u_p$ er en afl. i R

b.

$a \in \Sigma$ $\qquad$ "spis" a fra input c.



: gå til acceptstate



q_{start}
ε, ε → S$
q_{loop}
ε, A → ω
A → ω ∈ R
a, a → ε
ε, $ → ε
q_{accept}

Lemma 2.27 $L = L(M)$, M PDA
så $L = L(G)$ G CFG.

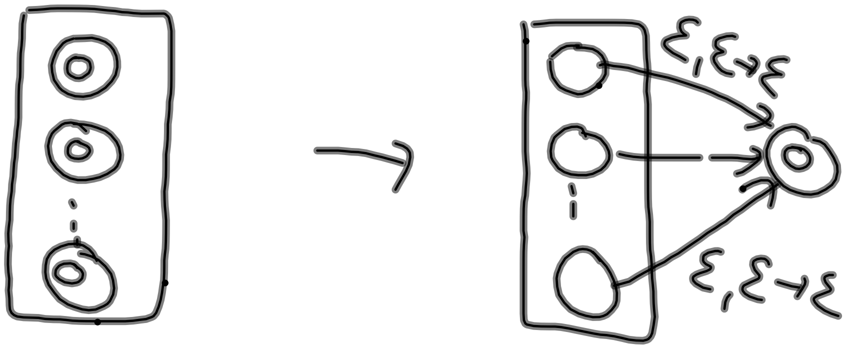
se på specialiseret (restricted) PDA

1. M har præcis 1 sluttilst.
2. M tømmer sin stack før den slutter (i accept)
3. Ethvert skridt indeholder Enten PUSH eller POP men aldrig begge to.

$\forall M$ PDA $\exists M'$ specialisert PDA

$L(M) = L(M')$

1:



2: Når M ville acceptere
så rydder M' op ved
at poppe fra stakken
indtil \$ nås
og så fjerne \$

$\forall \alpha$ stack symboler

$\underline{3:}$ M: $p \xrightarrow{\sim,\ \alpha\to\beta} q$ $\alpha,\beta\in\Gamma$

M' $p \xrightarrow{\sim,\ \alpha\to\varepsilon} r_{pq\alpha\beta} \xrightarrow{\varepsilon,\ \varepsilon\to\beta} q$

M: $\circ \xrightarrow{-,\ \varepsilon\to\varepsilon} \circ$

M': $\circ \xrightarrow{-,\ \varepsilon\to\alpha} \circ \xrightarrow{\varepsilon,\ \alpha\to\varepsilon} \circ$ $\alpha\in\Gamma$
<u>fast</u>

<u>ide</u> A_{pq} skal kunne aflede

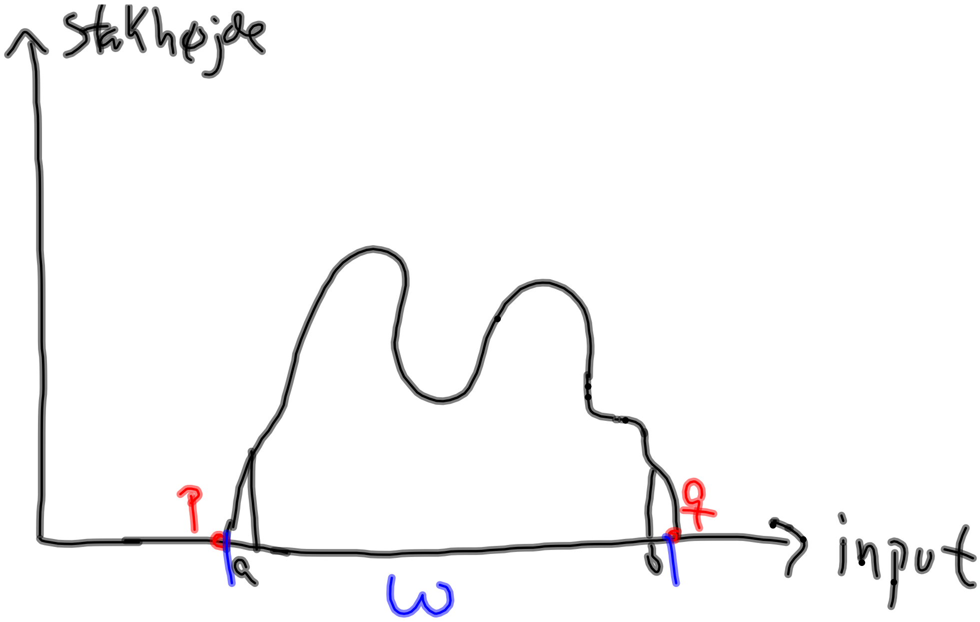
alle w som bringer M

fra tilst q til tilst p

og ender i samme stack

uden at have rørt det der var

påstakken før vi kom til q


Stakhøjde
p
q
a
b
ω
input