Skriftlig Eksamen
Automatteori og Beregnelighed (DM17)

Institut for Matematik & Datalogi
Odense Universitet

Tirsdag den 4. juni 1996, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Der lægges vægt på, at man begrunder/forklarer sine svar.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 5 nummererede sider (1–5). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver der har været stillet til eksaminatorierne, eller til aflevering. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

OPGAVE 1 (15%)

Lad $G = (\{s\}, \{a, b\}, R, S)$ være en kontekstfri grammatik, hvor R består af produktionerne $S \to aSb, S \to SS, S \to ab$.

Spørgsmål a:

Konstruer en stakautomat M så $L(M) = L(G)$. Du skal argumentere for, at konstruktionen er korrekt.

Spørgsmål b:

Giv en kontekstfri grammatik for sproget $L(G) \cap a^*b^*$.

Spørgsmål c:

Bevis, at $L(G)$ ikke er regulært.

OPGAVE 2 (25%)

Lad $L_1 - L_6$ være sprogene givet ved

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : w$ indeholder strengen aba som delstreng$\}$.
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : w$ indeholder ikke strengen aba som delstreng$\}$.
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* : w$ indeholder strengen bab som delstreng$\}$.
- $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* : w$ indeholder hver af strengene aba, bab som delstrenge$\}$.
- $L_5 = \{w \in \{a, b\}^* : \#a = \#b + 2\}$.
- $L_6 = \{a^i b^j a^i b^j : i, j \geq 1\}$.

Spørgsmål a:

Gør rede for, at $L_1 - L_4$ alle er regulære, foreksempel ved at angive endelige automater, der accepterer disse sprog.

Spørgsmål b:

Gør rede for, at L_5 og L_6 ikke er regulære.

OPGAVE 3 (15%)

Lad funktionen $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ være givet ved $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$.

Spørgsmål a:

Beskriv de overordnede skridt for en Turing maskine, der beregner f.

Spørgsmål b:

Angiv på diagramform, som i lærebogens kapitel 4, en Turing maskine der beregner f.

Opgave 4 (20%)

Lad $L = \{uwvcw^R : u, v, w \in \{a,b\}^*\}$.

Spørgsmål a:

Angiv en kontekstfri grammatik G, som opfylder at $L(G) = L$. Svaret skal begrundes.

Spørgsmål b:

Beskriv i store træk en deterministisk Turing maskine M, der accepterer L. I beskrivelsen skal blandt andet indgå båndindhold ved passende valgte tidspunkter.

Opgave 5 (25%)

Lad $\mathcal{A}$ være en algoritme, der kan afgøre om en given Turing maskine M altid standser med en bestemt streng y på sit bånd. Altså: om der gælder, at ligegyldigt hvilket input M får, så stopper den med båndindhold $\#y\underline{\#}$. $\mathcal{A}$ er altså en algoritme der afgør sproget

$$L = \{\rho(M) : M \text{ standser altid med båndindhold } \#y\underline{\#}\}.$$

Her betegner $\rho(M)$ den universelle kodning af Turing maskinen M, som på side 260 i bogen.

Spørgsmål a:

Givet en Turing maskine M og en streng $w = a_1a_2\ldots a_k$ over M's alfabet, gør i store træk rede for, hvorledes en ny Turing maskine M' kan konstrueres, så $L(M') = L(M)$, og således, at hvis M' standser, så gør den det med båndindholdet $\#w\underline{\#}$.

Spørgsmål b:

Konstruer ved hjælp af $\mathcal{A}$ en algoritme, der kan afgøre om en Turing maskine standser på alle inddata. Beskriv algoritmen i store træk.

Spørgsmål c:

Gør rede for, at sproget L er uafgørligt, dvs at algoritmen $\mathcal{A}$ ikke findes.