Skriftlig Eksamen
Automatteori og Beregnelighed (DM17)

Institut for Matematik & Datalogi
Odense Universitet

Fredag den 2 januar 1998, kl. 9–13

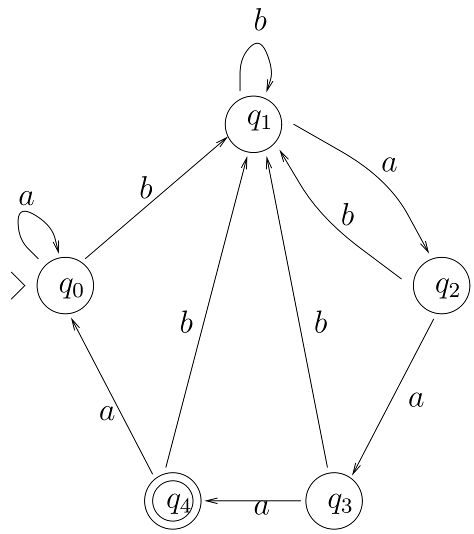
Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 6 nummererede sider (1–6). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver der har været stillet til eksamininatorierne, eller til aflevering. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

Husk at begrunde alle dine påstande!

OPGAVE 1 (20%)

Lad M være den deterministiske endelige automat, der er vist i Figur 1.



Figur 1: Den endelige automat M med tilstande $\{q_0, \ldots, q_4\}$. Starttilstanden er q_0 og sluttilstanden er q_4.

Spørgsmål a:

Angiv $L(M)$ og argumentér for dit svar. Hint: Bemærk, at alle overgange på et b ender i tilstand q_1.

Spørgsmål b:

Angiv en non-deterministisk endelig automat M' med kun to tilstande, som opfylder at $L(M') = L(M)$.

Spørgsmål c:

Lad $L = \{0^i x | i \geq 0, x \in \{0,1\}^* \text{ og } |x| \leq i\}$. Her betegner $|x|$ længden af strengen x.

Gør rede for, at L ikke er et regulært sprog.

OPGAVE 2 (15%)

Lad M betegne en deterministisk endelig automat med n tilstande.

Spørgsmål a:

Gør rede for, at $L(M)$ er endeligt hvis og kun hvis, der ikke findes en streng $x \in L(M)$, som opfylder at $n \leq |x| < 2n$.

Spørgsmål b:

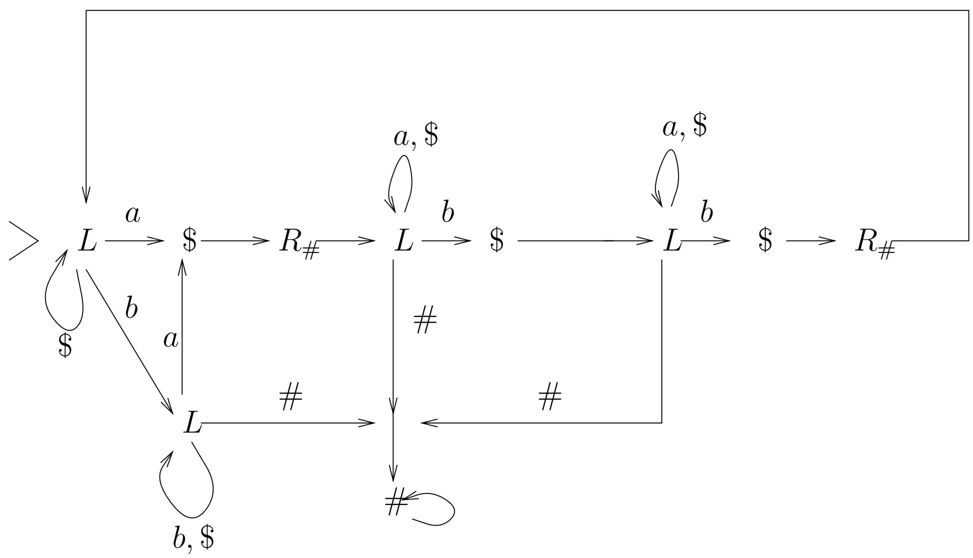
Beskriv i ord en algoritme til at afgøre om $L(M)$ er endelig. Beskrivelsen skal udformes som en overordnet beskrivelse (i ord) af en Turing maskine, der tager som input en beskrivelse of M (f.ex $\rho(M)$).

OPGAVE 3 (20%)

Lad M betegne Turing maskinen som er angivet ved diagrammet i Figur 2.

Spørgsmål a:

Forklar i ord og med angivelse af væsentlige konfigurationer, hvad M gør når den startes med input *abbaabb*, henholdsvis *babbba*.



Figur 2: Turing maskinen M.

Spørgsmål b:

Hvad er $L(M)$? Dit svar skal begrundes!

Spørgsmål c:

Angiv på diagramform en modificeret Turing maskine M', som afgør $L(M)$.

Spørgsmål d:

Angiv med begrundelse tidskompleksiteten af M'

Spørgsmål e:

Beskriv i ord de væsentligste skridt for en Turing maskine M^*, der afgør $L(M)$ i tid $O(n)$, hvor n betegner længden af input.

OPGAVE 4 (25%)

Lad L være et kontekstfrit sprog, som ikke indeholder den tomme streng.

Man kan vise (det kræves ikke!), at så findes der en kontekstfri grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$, så $L = L(G)$ og alle regler i R er af formen $A \to a$, eller $A \to BC$, hvor A, B, C er variabelsymboler og $a \in \Sigma$. En sådan kontekstfri grammatik siges at være på *Chomsky normalform*.

Spørgsmål a:

Angiv en grammatik G på Chomsky normalform, som opfylder at $L(G) = \{a^n b^n | n \geq 1\}$ og vis en afledning af strengen $aaabbb$.

Spørgsmål b:

Vis, at hvis $G = (V, \Sigma, R, S)$ er en kontekstfri grammatik på Chomsky normalform og $u \in L(G)$, så er antallet af skridt i enhver afledning $S \underset{G}{\Rightarrow} u$ af u lig med $2|u| - 1$. Hint: brug induktion og betragt afledninger af formen $A \underset{G}{\Rightarrow} w$, hvor A er et variabelsymbol og $w \in \Sigma^*$.

Spørgsmål c:

Beskriv i ord en algoritme til at afgøre, for en given Chomsky normalform grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ og en streng $w \in \Sigma^*$, om $w \in L(G)$.

Spørgsmål d:

Gør rede for, at hvis $G = (V, \Sigma, R, S)$ er en kontekstfri grammatik på Chomsky normalform, med n non-terminaler, så gælder at $L(G)$ er uendeligt hvis og kun hvis der findes en streng $x \in L(G)$, som opfylder at $2^n < |x| \leq 2^{n+1}$.

OPGAVE 5 (20%)

Lad

$$L_\infty = \{\rho(M) | \forall k : L(M) \text{ indeholder en streng af længde } > k\}$$

og

$$L'_\infty = \{\rho(M) | L(M) \text{ er uendeligt }\}$$

Spørgsmål a:

Argumentér for, at $L'_\infty = L_\infty$.

Spørgsmål b:

Bevis vha Rice's sætning (se Ugeseddel 13), at L_∞ er uafgørligt.

Spørgsmål c:

Giv et direkte bevis (dvs uden at bruge Rice's sætning eller lignende) for at L_∞ er uafgørligt. Altså: konstruer selv et bevis fra bunden. Hint: udfyld detaljerne i beviset for Rice's sætning (Ugeseddel 13) for egenskaben svarende til L_∞.