

Skriftlig Eksamen

Automatteori og Beregnelighed (DM17)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet – Odense Universitet

Mandag den 11. januar 1999, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lomme-regner er tilladt.

Eksamenssættet består af 4 opgaver på 5 nummererede sider (1–5). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 4 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver der har været stillet til eksaminatorierne, eller til aflevering. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) om automatteori accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål! Dog må man gerne referere til algoritmer man kender fra tidligere kurser, såsom DM02.

Husk at begrunde alle dine påstande!

OPGAVE 1 (15%)

Lad sprogene L_1, L_2, L_3 være givet ved

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists i \geq 1 \text{ s\aa } w \text{ indeholder delstrengen } a^i b^i\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ indeholder delstrengen } a^j b^j \text{ for et } 1 \leq j \leq 1000\}$$

$$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ indeholder ingen delstreng af formen } a^i b^i, i \geq 1\}$$

Gør rede for, hvilke af sprogene L_1, L_2, L_3 der er regulære.

OPGAVE 2 (30%)

Følgende sætning, er en udvidelse af Pumpelemmaet for regulære sprog:

Sætning 1

Lad L være et regulært sprog over alfabetet Σ . Der eksisterer et naturligt tal N (som afhænger af L) således at hvis $x_1, x_2, x_3 \in \Sigma^*$ er strenge med $x_1 x_2 x_3 \in L$ og $|x_2| \geq N$, så findes der en strenge $u, v, w \in \Sigma^*$ så følgende er opfyldt:

1. $x_2 = uvw$
2. $|v| \geq 1$
3. $|uv| \leq N$
4. Strengen $x_1 u v^i w x_3$ tilhører L for ethvert $i \geq 0$

Spørgsmål a:

Giv et bevis for Sætning 1. Hint: Lad M være en DFA som accepterer L og se på tilstande $q_0, q_1, \dots, q_{|x_2|}$, som svarer til at M har læst x_1 og derefter henholdsvis $0, 1, \dots, |x_2|$ symboler fra strengen x_2 .

Lad L være sproget $L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ eller } j = k\}$.

Spørgsmål b:

Forklar i ord, hvorfor man ikke kan bruge det almindelige pumpelemma for regulære sprog (Theorem 2.4.1 fra bogen) til at vise, at L ikke er regulært.

Spørgsmål c:

Vis ved hjælp af Sætning 1 fra spørgsmål a, at sproget L ikke er regulært.

Spørgsmål d:

Angiv en kontekstfri grammatik for L og vis en afledning af strengen $a^2b^3c^3$ og strengen b^3c^4 .

Spørgsmål e:

Angiv en stakmaskine der accepteter L .

OPGAVE 3 (30%)

Lad $\mathcal{A} = a_1, a_2, \dots, a_n$ være en ordnet følge af naturlige tal. En **aritmetisk progression** i \mathcal{A} er en delfølge $\mathcal{A}' = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ af \mathcal{A} , som opfylder

1. $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ og
2. $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$.

Ved **længden** af en aritmetisk progression forstås antallet af elementer i denne (altså tallet k ovenfor).

Spørgsmål a:

Angiv en aritmetisk progression af længde 5 i følgen

3, 4, 1, 7, 5, 6, 2, 3, 1, 7, 8, 5, 6.

Spørgsmål b:

Beskriv kort i ord en Turing maskine M , som givet en følge \mathcal{A} og et naturligt tal k afgør om \mathcal{A} indeholder en aritmetisk progression af længde k . Beskrivelsen skal indeholde en redegørelse for de væsentligste skridt maskinen tager, når den startes på input på lovlig form (beskriv hvad du vil tage som lovligt input).

Lad **AP** betegne følgende problem: Givet en følge \mathcal{A} af naturlige tal og et naturligt tal k . Indeholder \mathcal{A} en aritmetisk progression af længde k ?

Spørgsmål c:

Gør rede for, at **AP** ligger i \mathcal{NP} .

Lad **LPAD** være følgende problem: Givet en acyklisk digraf (digraf uden ensrettede kredse) D og et naturligt tal ℓ . Har D en ensrettet vej af længde ℓ (længden måles i antallet af kanter)?

Spørgsmål d:

Beskriv en polynomiell reduktion af **AP** til **LPAD**. Du skal argumentere for korrektheden af reduktionen, samt vise, at den er polynomiell.

Spørgsmål e:

Gør rede for at **AP** ligger i \mathcal{P} .

OPGAVE 4 (25%)

Af hensyn til folk, der går op efter den gamle bog, bemærkes her, at følgende er det samme for sprog:

- rekursivt, afgørligt, samt Turing-afgørligt.
- rekursivt enumerabelt, semi-afgørligt, samt Turing-acceptabelt.

Lad $L = \{ \text{”} M_1 M_2 L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset \}$, hvor ”M” angiver den universelle kodning af Turing maskinen M , som på side 248 i lærebogen.

Spørgsmål a:

Gør rede for, at L ikke er rekursivt.

Lad $L^* = \{ \text{”} M_1 M_2 w M_1 \text{ og } M_2 \text{ stopper begge på } w \}$.

Spørgsmål b:

Beskriv i ord en Turing maskine, der semi-afgør L^* .

Spørgsmål c:

Beskriv sproget \bar{L} og gør rede for, at \bar{L} er rekursivt enumerabelt. Hint: benyt simuleringer på strenge over Σ , hvor Σ er det fælles alfabet for M_1 og M_2 .

Spørgsmål d:

Gør rede for, at L ikke er rekursivt enumerabelt.