Afsluttende opgavesæt i kurset "Strømning i netværk med anvendelser"

Institut for Matematik & Datalogi
Odense Universitet

Opgaverne udleveres onsdag den 24. Maj 1995. Besvarelserne skal afleveres senest fredag den 18. August 1995

Der lægges vægt på, at man forklarer/begrunder, hvorledes man når frem til sine resultater. Der er ialt 165 point i sættet. Fuld besvarelse svarer til 150 point.

OPGAVE 1 (25 point)

Spørgsmål a:

Giv en kort beskrivelse af Dinic's Metode til at finde en maksimum strøm i et netværk og illustrér algoritmen på netværket i figur 1.

Spørgsmål b:

Giv en kort beskrivelse af preflow push metoden til at finde en maksimum strøm i et netværk og illustrér algoritmen på netværket i figur 1. For at lette arbejdet skal din algoritme overholde følgende ekstra regler:

1. Blandt knuder med overskydende strøm vælges altid den med det mindste nummer (i.e., hvis knuderne 2,5 og 7 har overskud, så tages knude 2).
2. Når der skubbes fra et punkt med overskud, så skubbes der til udnaboerne efter voksende nummer (i.e., hvis vi vil skubbe fra knude 2, som iøjeblikket

har kanterne $2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 7$ ud fra sig i residualnetværket, så skubbes der til punkt 3 først og derefter til punkt 5, osv.)

Du skal forklare hvilke skub/løft, der udføres mellem de enkelte figurer, som du viser.

OPGAVE 2 (15 point)

Lad $G = (N, E, 0, k, s, t)$ være et netværk med kilde s og terminal t med nedre grænser nul og heltallige kapaciteter k_{ij} på alle kanter. Antag, at vi er givet en maksimum strøm f i G.

Spørgsmål a:

Antag, at kapaciteten af en enkelt kant $i \rightarrow j$ øges med 1. Beskriv i ord en $O(N+E)$ algoritme som opdaterer strømningsvektoren f til en ny maksimum strøm. Der skal argumenteres for at algoritmen er korrekt og har den ønskede kompleksitet.

Spørgsmål b:

Antag at kapaciteten af en enkelt kant $i \rightarrow j$ sænkes med 1. Beskriv i ord en $O(N+E)$ algoritme som opdaterer strømningsvektoren f til en ny maksimum strøm. Der skal argumenteres for at algoritmen er korrekt og har den ønskede kompleksitet.

OPGAVE 3 (20 point)

Et $n \times n$ gitter er en ikke orienteret graf med n rækker og n søjler af punkter som vist i figur 2. We kalder punktet i i'te række og j'te søjle for (i, j). Alle punkter i gitteret har præcis fire naboer, undtagen randpunkterne, som er dem hvor $i = 1, i = n, j = 1$, eller $j = n$

Antag, at vi er givet $m \leq n^2$ udvalgte (forskellige) startpunkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ i gitteret. Vores opgave er, at finde ud af om der findes m punkt-disjunkte veje $P_1, P_2, \ldots, P_m$ (dvs ingen punkter er fælles for to af de angivne veje), således at p_i starter i (x_i, y_i) og alle vejene ender på randen af gitteret. Dette problem kaldes **flugtvejsproblemet**. Det relaterer sig foreksempel til problemer vedrørende chip design.

I figur 2 (a) er der vist en mængde af punkter og flugtveje for disse. I figur 2 (b) er der vist en mængde af punkter for hvilken der ikke findes disjunkte flugtveje for alle punkterne.

Spørgsmål a:

Betragt et strømningsnetværk hvor også punkterne har kapaciteter. Dvs. for hvert punkt har vi angivet en øvre grænse på den strøm der kan løbe ind til punktet. Gør rede for, hvorledes problemet med at finde en maksimum strøm i et netværk, med kapaciteter på både kanter og punkter, kan reduceres til et almindeligt maksimum strømningsproblem af sammenlignelig størrelse. Du skal argumentere for, at din tranformation er korrekt.

Spørgsmål b:

Beskriv en effektiv algoritme til flugtvejsproblemet og gør rede for kompleksiteten af din algoritme. Hint: benyt dine observationer fra spørgsmål (a).

OPGAVE 4 (30 point)

Denne opgave handler om at lave en ny algoritme til at finde en maksimum strøm i et netværk. Lad $G = (N, E, 0, k, s, t)$ være et netværk, hvor k_{ij} betegner kapaciteten af kanten $i \to j$. Lad $K = \max\{k_{ij} | i \to j \in E\}$.

Spørgsmål a:

Argumentér for, at et minimum snit i G har kapacitet højst $K|E|$.

Spørgsmål b:

Lad C være en given konstant. Vis at en udvidende vej af kapacitet mindst C kan findes i $O(E)$ tid, hvis en sådan findes.

Følgende modifikation af Ford-Fulkersons metode kan bruges til at finde en maksimum strøm i G.

MAX-FLOW-VED-SKALERING(G)

1. $K \leftarrow \max\{k_{ij} | i \to j \in E\}$;

2. initialiser f til 0;
3. $C \leftarrow 2^{\lfloor \log K \rfloor}$;
4. **while** $C \geq 1$ **do**
5. **while** der er en udvidende vej P af kapacitet mindst C **do** udvid f langs P;
6. $C \leftarrow C/2$
7. **end**
8. **return** f

Spørgsmål c:

Argumentér for, at ovenstående algoritme returnerer en maksimum strøm.

Spørgsmål d:

Vis, at residual kapaciteten af et snit er højst $2C|E|$ hver gang linie 4 udføres.

Spørgsmål e:

Argumentér for, at det indre **while** loop i linie 5-6 udføres $O(E)$ gange for hver værdi af C.

Spørgsmål f:

Konkluder, at algoritme MAX-FLOW-VED-SKALERING(G) kan implementeres til at køre i tid $O(E^2 \log K)$ tid. Hvordan er denne tid, sammenlignet med de andre algoritmer du kender?

OPGAVE 5 (25 point)

Gør kort rede for transportalgoritmen og illustrér algoritmen ved at løse nedenstående transportproblem.

OPGAVE 6 (25 point)

Beskriv kort det generelle princip i primal-dual algoritmen og illustrér dette ved at løse korteste (s, t)-vejs problemet for grafen i figur 3.

OPGAVE 7 (25 point)

Spørgsmål a:

Forklar, hvorledes man finder den korteste tid et givet projekt kan afvikles i, når man kender tiderne for de enkelte jobs og pilediagrammet som viser den indbyrdes afhængighed. Illustrér metoden på pilediagrammet i figur 4 og tider som angivet i nedenstående tabel (normaltiderne).

Spørgsmål b:

Forklar samtlige skridt i udregningen af projektafkortningskurven i for projektet med data som angivet i nedenstående tabel.

Spørgsmål c:

Angiv hvilke tider man skal vælge for hvert job, for at kunne udføre projektet på 14 tidsenheder.