

Afsluttende opgavesæt i kurset “Strømning i netværk med anvendelser” (DM33)

Institut for Matematik & Datalogi
Odense Universitet

Opgaverne udleveres tirsdag den 14. Maj 1996. Besvarelsenerne skal afleveres senest fredag den 2. August 1996

Der lægges vægt på, at man forklarer/begrunder, hvorledes man når frem til sine resultater. Når du bliver bedt om at beskrive en algoritme, så skal det gøres, således at algoritmen kan forstås ud fra din beskrivelse. Der er ialt 155 point i sættet. Fuld besvarelse svarer til 155 point.

Jeg vil gerne have en email, eller anden adresse/tlf på alle, der agter at løse opgaverne. Dette vil gøre det muligt hurtigt at kunne meddele evt. trykfejl m.m. til alle. Naturligvis håber jeg ikke det bliver nødvendigt, men alligevel!

OPGAVE 1 (30 point)

Spørgsmål a:

Giv en kort beskrivelse af korteste udvidende vej metoden til at finde en maksimum strøm i et netværk og illustrér algoritmen på netværket i Figur 1.

Spørgsmål b:

Giv en kort beskrivelse af preflow push metoden til at finde en maksimum strøm i et netværk og illustrér algoritmen på netværket i Figur 1. For at lette arbejdet skal din algoritme overholde følgende ekstra regler:

1. Blandt knuder med overskydende strøm vælges altid den med det mindste nummer (i.e., hvis knuderne 2,5 og 7 har overskud, så tages knude 2).
2. Når der skubbes fra et punkt med overskud, så skubbes der til udnaboerne efter voksende nummer (i.e., hvis vi vil skubbe fra knude 2, som iøjeblikket har kanterne $2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 7$ ud fra sig i residualnetværket, så skubbes der til punkt 3 først og derefter til punkt 5, osv.)

Du skal forklare hvilke skub/løft, der udføres mellem de enkelte figurer, som du viser.

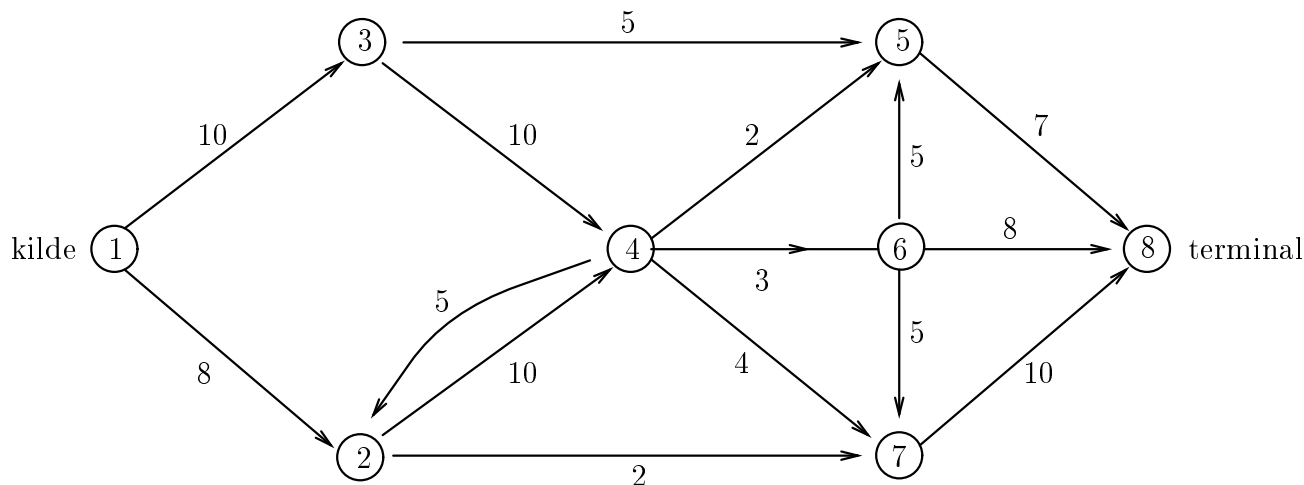


Figure 1:

OPGAVE 2 (40 point)

En digraf $D = (V, A)$ kaldes *regulær* hvis der findes et naturligt tal k , så ethvert punkt i D har præcis k kanter ind til sig og præcis k kanter ud fra sig. For at understrege værdien af k kalder vi D *k -regulær* hvis ethvert punkt i D har præcis k kanter ind til sig og præcis k kanter ud fra sig. En *deldigraf* af D er en digraf $D' = (V', A')$ som opfylder at $V' \subseteq V$ og $A' \subseteq A$. En deldigraf $D' = (V', A')$ er *udspændende* hvis $V' = V$.

Spørgsmål a:

Beskriv i ord en algoritme, der givet en digraf $D = (V, A)$ og et naturligt tal k , afgør om D har en udspændende deldigraf $D' = (V, A')$, som er k -regulær. Algoritmen skal aflevere D' , hvis den findes. Hvad er den bedste kompleksitet du kan finde for algoritmen. Hint: sammenlign med opgave 8.13 og 8.14 i lærebogen.

Spørgsmål b:

Antag nu, at r af kanterne $e_1, \dots, e_r \in A$ ikke længere må bruges i den søgte deldigraf D' . Beskriv i ord en algoritme, som givet en k -regulær udspændende deldigraf D' , enten finder en ny k -regulær udspændende deldigraf D'' , som ikke indeholder nogen af kanterne e_1, \dots, e_r , eller afgør, at der ikke findes en sådan deldigraf af D . Vis, at algoritmen kan laves, så dens kompleksitet er $O(r(|V| + |E|))$. (Hint: se på én kant ad gangen). Hvor stor skal r være for, at det bedre kan betale sig at løse problemet helt forfra?

Spørgsmål c:

Forklar, hvorledes man, givet en k -regulær udspændende deldigraf D' af D , kan finde en $(k+1)$ -regulær udspændende delgraf af D , eller afgøre, at der ikke findes en sådan delgraf.

Angiv med begrundelse den bedste kompleksitet du kan finde for algoritmen.

Spørgsmål d:

Forklar kort, hvordan man kan lave en algoritme, der finder en ny $(k + 1)$ -regulær delgraf D'' med flest mulige kanter fælles med D' ? Hvad er den bedste kompleksitet du kan finde?

Antag nu, at hver kant $i \rightarrow j \in A$ har en omkostning $c_{ij} \in \mathcal{Z}$. Omkostningen af en delgraf $D' = (V, A')$ defineres som $c(D') = \sum_{\{i \rightarrow j \in A'\}} c_{ij}$. En *billigste* k -regulær delgraf er én med minimum omkostning.

Spørgsmål e:

Beskriv kort i ord, en algoritme, der kan finde en billigste k -regulær udspændende deldigrafer D' af D , eller afgøre, at der ikke findes en sådan delgraf. Hvad er den bedste kompleksitet du kan finde for algoritmen?

Spørgsmål f:

Forklar hvordan man, givet en billigste k -regulær udspændende deldigrafer D' af D , kan finde en billigste $(k + 1)$ -regulær udspændende delgraf af D , eller afgøre, at D ikke har en sådan deldigrafer. Hvad er den bedste kompleksitet du kan finde for algoritmen.

OPGAVE 3 (25 point)

Lad $D = (V, A)$ være en digrafer. En *vej* i D er en ensrettet vej, dvs alle kanter på vejen peger fremad. Helt formelt: hvis $P = x_1x_2 \dots x_k$ er en vej, så er alle x_i 'erne forskellige og $x_i \rightarrow x_{i+1}$ er en kant i D , for alle $i = 1, 2, \dots, k - 1$. To veje P og Q i D kaldes *punktdisjunkte*, hvis de ingen fælles punkter har.

En *vejdækning* af punkterne i en digrafer $D = (V, A)$ er en mængde \mathcal{P} af veje P_1, \dots, P_k , som opfylder at ethvert punkt $v \in V$ ligger på præcis én af vejene P_1, \dots, P_k . Bemærk, at P_i godt kan være et punkt, så dermed har enhver digrafer altså en vejdækning. Størrelsen $|\mathcal{P}|$ af en givet vejdækning \mathcal{P} er antallet af veje i \mathcal{P} . Lad $\gamma(D)$ betegne den mindste størrelse af en vejdækning af D . Formelt: $\gamma(D) = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ er en vejdækning af } D\}$. For generelle digrafer er det et meget svært (læs: NP-komplet) problem at bestemme $\gamma(D)$, endsige finde en vejdækning med $\gamma(D)$ veje.

Denne opgave handler om vejdækninger i acykliske digrafer, dvs digrafer uden ensrettede kredse. Lad $D = (V, A)$ være en acyklisk digrafer og definér følgende netværk $N = (U, E)$ (ℓ og u betegner som sædvanlig nedre og øvre grænser på kanterne):

- $U = \{v', v'' | v \in V\} \cup \{s, t\}$,
- $E = \{s \rightarrow v', v'' \rightarrow t | v \in V\} \cup \{x'' \rightarrow y' | x \rightarrow y \in A\} \cup \{v' \rightarrow v'' | v \in V\}$,
- $\ell_{sv'} = \ell_{v''t} = 0$ for alle $v \in V$,

- $\ell_{x''y'} = 0$ for alle $x \rightarrow y \in A$,
- $\ell_{v'v''} = 1 = u_{v'v''}$ for alle $v \in V$,
- $u_{sv'} = u_{v''t} = 1$ for alle $v \in V$,
- $u_{x''y'} = 1$ for alle $x \rightarrow y \in A$

Spørgsmål a:

Bevis, at N har en (s, t) -strøm x af værdi k hvis og kun hvis D har en vejdækning med k veje. Gør også rede for, hvorledes vi ud fra en passende valgt x (hvilken?) af værdi k , kan finde en punktdækning med k veje.

Spørgsmål b:

Vis, ved et eksempel, at ovenstående ikke behøver gælde hvis D har ensrettede kredse. Prøv at forklare, hvorfor metoden ovenfor ikke virker.

Spørgsmål c:

Beskriv i ord en algoritme, der givet en digraf D (som ikke nødvendigvis er acyklisk!), enten returnerer en mængde $\mathcal{P} = P_1, \dots, P_k$, som dækker hvert punkt præcis én gang og $|\mathcal{P}| = \gamma(D)$, eller også returnerer en kreds i D . Angiv med begrundelse den bedste kompleksitet du kan finde for denne algoritme.

Antag nu, at hver kant $x \rightarrow y \in A$ har en pris $w_{xy} \in \mathbb{Z}^+$. Prisen for en vejdækning \mathcal{P} defineres som $w(\mathcal{P}) = \sum_{\{\exists i | x \rightarrow y \text{ er en kant i } P_i\}} w_{xy}$.

Spørgsmål d:

Beskriv i ord en algoritme, der givet en acyklisk digraf D , returner en vejdækning \mathcal{P} , som opfylder at $w(\mathcal{P})$ er mindst mulig. Svaret skal begrundes og du skal angive den bedste kompleksitet du kan finde for din algoritme.

OPGAVE 4 (30 point)

Spørgsmål a:

Beskriv kort, med udgangspunkt i transportproblemet (dvs med det som eksempel) det generelle princip i primal-dual algoritmen. Din redegørelse skal indeholde en forklaring af samspillet mellem de fire problemer primal, dual, restricted primal og dual of restricted primal.

						a_i	
	5	6	5	2	8	4	6
	12	10	11	11	11	12	6
	3	4	5	5	4	3	4
	6	8	10	1	4	3	10
b_j	5	4	3	4	5	5	

Figure 2:

Spørgsmål b:

Illustrér transportalgoritmen ved at løse transportproblemet i Figur 2. Du skal give et argument for, at den fundne løsning er optimal.

OPGAVE 5 (30 point)

Spørgsmål a:

Forklar, hvorledes man finder den korteste tid et givet projekt kan afvikles i, når man kender tiderne for de enkelte jobs og pilediagrammet som viser den indbyrdes afhængighed. Illustrér metoden på pilediagrammet i Figur 3 med normaltider som angivet i tabellen i Figur 4.

Spørgsmål b:

Angiv samtlige skridt i udregningen af projektafkortningskurven for projektet med data som angivet i nedenstående tabel.

Spørgsmål c:

Angiv hvilke tider man skal vælge for hvert job, for at kunne udføre projektet på 8 tidsenheder.

Spørgsmål d:

Hvilke jobs er kritiske, når projektet udføres på 8 tidsenheder? Her refereres til de tider den generelle metode giver, jævnfør dit svar på spørgsmål c.

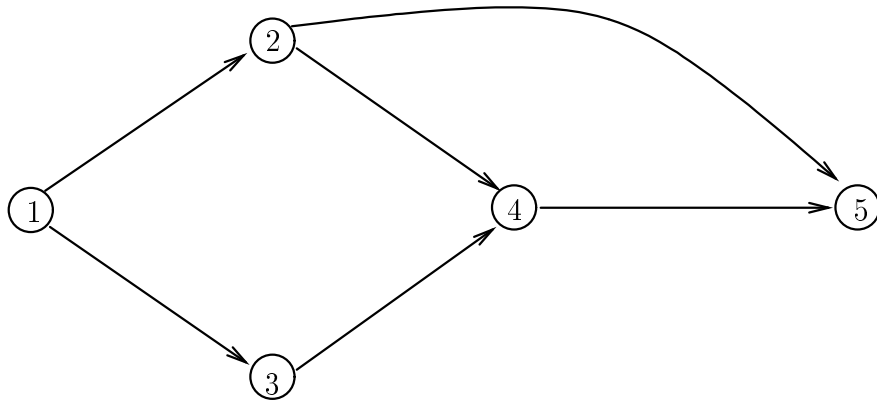


Figure 3:

Job	Normal tid	Minimum tid	Enhedsomkostninger ved afkortning
12	5	3	3
13	4	2	3
24	3	1	7
25	3	3	0
34	6	2	4
45	5	1	6

Figure 4: