Afsluttende opgavesæt i kurset "Strømning i netværk med anvendelser" (DM33)

Institut for Matematik & Datalogi
Odense Universitet

Opgaverne udleveres fredag den 23. Maj 1997. Besvarelserne skal afleveres senest mandag den 21. Juli 1997 kl 10.00

Der lægges vægt på, at man forklarer/begrunder, hvorledes man når frem til sine resultater. Hvis man bliver bedt om, at beskrive en algoritme, så skal dette gøres, så detaljeret, at en læser der ikke selv kender algoritmen vil kunne forstå den.

Der er ialt 135 point i sættet. Fuld besvarelse svarer til 135 point.

OPGAVE 1 (30 point)

Lad $\mathcal{L} = (V, A)$ være et lagdelt netværk med kilde s og terminal t, samt kapacitetsfunktion u på kanterne (sml. side 221-222 i lærebogen). Lad y være en brugbar strøm i $\mathcal{L}$ som ikke er blokerende (dvs der findes stadig en udvidende vej fra s til t, som udelukkende bruger forlæns kanter). Definer følgende talstørrelser $\alpha_i, \beta_i, \rho_i$ for hvert punkt $i \in V - \{s, t\}$:

$$\alpha_i = \sum\{u_{ji} - y_{ji} : j \to i \in A\} \tag{1}$$

$$\beta_i = \sum\{u_{ij} - y_{ij} : i \to j \in A\} \tag{2}$$

$$\rho_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}. \tag{3}$$

Lad

$$\rho_s = \sum\{u_{sj} - y_{sj} : s \to j \in A\}, \rho_t = \sum\{u_{jt} - y_{jt} : j \to t \in A\}. \tag{4}$$

Endelig definerer vi $\rho = \min_{i \in V}\{\rho_i\}$

Lad $v \in V$ være et punkt, som opfylder at $\rho = \rho_i$. Antag at $\rho > 0$.

Spørgsmål a:

Argumentér for, at det er muligt at sende en strøm på ρ enheder fra v til t i N og at det er muligt at sende en strøm på ρ enheder fra s til v i N (sidstnævnte kaldes også at "trække" en strøm på ρ enheder fra s til v). Hint: brug at netværket er lagdelt.

Ovenstående observation giver ideen til en algoritme $\mathcal{A}$ til at finde en blokerende strøm i et lagdelt netværk:

1. Start med $y := 0$ på alle kanter og find ρ_v for alle $v \in V$. Hvis der er et punkt v med $\rho_v = 0$ så gå til 6 ;
2. Vælg et punkt v med $\rho_v = \rho$;
3. Skub ρ enheder fra v til t og træk ρ enheder fra s til v;
4. Fjern alle mættede kanter og hvis et punkt derved mister alle sine kanter ind, eller ud, så slet også dette og alle kanter incidente med det. Fortsæt indtil der ikke kan slettes flere kanter;
5. Udregn ρ_i for alle punkter i det aktuelle lagdelte netværk (ud fra aktuelle kanter og strøm). Hvis $\rho_i > 0$ for alle punkter så gå til 2. ellers gå til 6.
6. Hvis $\rho_s = 0$ eller $\rho_t = 0$, så stop;
7. Hvis der findes et punkt v med $\rho_v = 0$, så slet alle punkter i for hvilke $\rho_i = 0$, samt alle kanter incidente med disse;
8. Gå til 5.

Spørgsmål b:

Argumentér for, at denne algoritme er korrekt, dvs at den finder en blokerende strøm i N.

Kompleksiteten af $\mathcal{A}$ afhænger af hvorledes vi udfører de enkelte steps, specielt step 3. Lad os fastlægge følgende regel for udførelsen af step 3: Vi skubber (trækker) de ρ enheder ét lag ad gangen og hvis w er det aktuelle punkt som vi fordeler strøm fra (trækker strøm til), så fylder vi altid en kant ud af (ind til) w helt op, hvis dette er muligt, inden vi går videre til den næste kant ud af (ind til) w.

Spørgsmål c:

Argumentér for, at hvis vi udfører step 3 med ovennævnte regel, så kan algoritmen implementeres så man opnår en køretid der er i $O(n^2)$. Hint: a. Der slettes mindst ét punkt mellem to udførelser af step 3. b. Det er muligt at holde ρ'erne effektivt opdateret (hvorledes?). Der ønskes en rimeligt kortfattet, men overbevisende begrundelse for kompleksiteten.

Spørgsmål d:

Illustrér algoritmen på det lagdelte netværk i Figur 1.

OPGAVE 2 (15 point)

Lad $N = (V, A)$ være et netværk med heltallige nedre grænser og kapaciteter på kanterne. Antag at vi er givet en brugbar strøm x i N, som ikke er heltallig (dvs der er mindst én kant $i \to j$ for hvilken x_{ij} ikke er et helt tal).

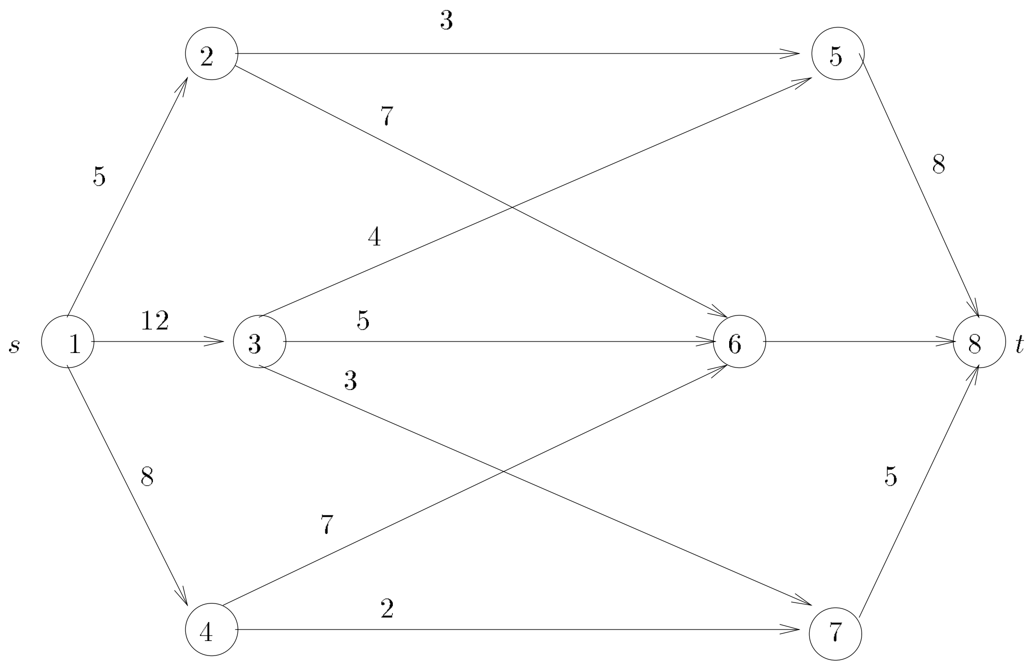

Figure 1: Et lagdelt netværk

Spørgsmål a:

Gør rede for, at N har en brugbar heltallig strøm x', som opfylder, at $\mid x_{ij} - x'_{ij} \mid < 1$ for alle $i \to j \in A$.

Antag nu desuden, at værdien $v(x)$ af strømmen x er et helt tal.

Spørgsmål b:

Gør rede for, at N har en brugbar heltallig strøm x'', som opfylder, at $v(x'') = v(x)$.

Spørgsmål c:

Beskriv en algoritme, der givet x kan finde x' henholdsvis x''. Hvor hurtigt kan dette gøres?

OPGAVE 3 (25 point)

Lad $N = (V, A)$ være et netværk med n punkter $1, 2, \ldots, n$ og kapaciteter u_{ij} og nedre grænser ℓ_{ij} på kanterne. Lad $a_i \leq b_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$ være heltal. Vores opgave er at undersøge om der findes en strøm x i N som opfylder at

$$\ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \;\; \forall i \to j \in A \tag{5}$$

$$a_i \leq \sum_{i \to j \in A} x_{ij} - \sum_{j \to i \in A} x_{ji} \leq b_i \;\; \forall i \in V. \tag{6}$$

Lad G være et nyt netværk, som fås ved at tilføje to nye punkter s, t til N samt følgende kanter, alle med nedre grænse nul:

- kanten $t \to s$ med kapacitet ∞,
- for hvert $i = 1, 2, \ldots, n$ kanten $s \to i$ med kapacitet $\max\{0, b_i\}$ og kanten $i \to t$ med kapacitet $\max\{0, -a_i\}$

Spørgsmål a:

Gør rede for at G har en brugbar cirkulation hvis og kun hvis der findes en strøm i N som opfylder (5) og (6).

Spørgsmål b:

Bevis vha resultatet ovenfor, at der findes en strøm strøm i N som opfylder (5) og (6) hvis og kun hvis

$$u(X, \overline{X}) \geq \ell(\overline{X}, X) + \max\{a(X), -b(X)\} \ \forall X \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Her er $a(X) = \sum_{i \in X} a_i$.

Spørgsmål c:

Diskuter hvilken strømningsalgoritme der giver den bedste kompleksitet, når vi skal undersøge eksistensen af strømmen x og finde en sådan brugbar strøm, hvis den findes.

OPGAVE 4 (30 point)

Denne opgave handler om kantsammenhæng i digrafer. Som bekendt kan vi vha strømning finde det størst mulige antal af kant-disjunkte (s, t)-veje i en digraf.

Spørgsmål a:

Forklar kort, hvorledes man gør dette.

Antag, at vi er givet et naturligt tal k, og en digraf $G = (V, A)$ som ikke har k kant-disjunkte (s, t)-veje for to givne punkter $s, t \in V$. Vi ønsker at finde en mindst mulig mængde A' af nye kanter, som hvis de tilføjes til G giver en ny digraf G' som har k kant-disjunkte (s, t)-veje.

Spørgsmål b:

Forklar, hvorledes man kan finde en sådan minimum mængde A' af nye kanter, hvis vi tillader at nye kanter er parallelle til allerede eksisterende (dvs der må tilføjes vilkårligt mange kopier af en kant $i \to j$, uanset om $i \to j \in A$ eller $i \to j \notin A$). Start med at forklare, hvorfor A' altid findes.

Spørgsmål c:

Forklar, hvorledes man undersøger om mængden A' findes og bestemmer en sådan hvis den findes, når vi nu samtidig kræver, at den resulterende graf ikke må indeholde parallelle kanter.

Spørgsmål d:

Hvordan finder man det mindste man skal øge kapaciteterne med i et netværk N for at sikre at det nye netværk N' har en (s,t)-strøm af en given værdi k, hvor k er et givet reelt tal? Hvad er kompleksiteten af din algoritme?

Nedenfor lader vi $G = (V, A)$ være en digraf som ikke har k kant-disjunkte (s,t)-veje.

Spørgsmål e:

Beskriv kort en algoritme til at undersøge om det er muligt at lave en ny digraf G' ved at vende nogen af kanterne, således at G' har k kant-disjunkte (s,t)-veje.

Spørgsmål f:

Hvordan kan man finde det mindste antal kanter der skal vendes for, at den nye digraf G' har de ønskede veje?

Spørgsmål g:

Hvilke af algoritmerne i spørgsmål a-f ovenfor kan laves så deres kompleksitet ikke afhænger af k? Begrund dit svar.

OPGAVE 5 (15 point)

Illustrér transportalgoritmen ved at løse transportproblemet i Figur 2, hvor der allerede er kørt nogle iterationer af algoritmen. Du skal forklare kort hvad du gør i de enkelte skridt.

OPGAVE 6 (20 point)

En delmængde X af punkterne i en digraf $D = (V, A)$ kaldes *uafhængig* hvis der ikke findes nogen kanter i A med begge endepunkter i X. For en given digraf D lader vi $\alpha(D)$ betegne størrelsen af en størst mulig uafhængig delmængde af V.

Spørgsmål a:

Beskriv hvorledes man, givet en digraf $D = (V, A)$ kan lave et netværk N, så N har en brugbar cirkulation hvis og kun hvis D har en mængde af punktdisjunkte kredse, som dækker alle punkterne i D (dvs ethvert punkt $v \in V$ ligger på præcis en af disse kredse).

Lad nu $D = (V, A)$ være en k punkt-sammenhængende digraf, som opfylder at $\alpha(D) \leq k$.

Spørgsmål b:

Bevis, at D har en mængde af punktdisjunkte kredse, som dækker alle punkterne i D.

							a_i	α_i
	5	3 / 3	7	1 / 3	8	5	4	5
	2 / 5	6	12	5	1 / 7	11	3	5
	1 / 2	8	2 / 3	4	8	2	3	2
	9	6	10	1 / 5	10	9	7	7
b_j	3	3	6	2	1	2		
β_j	0	-2	1	-2	2	0		

Figure 2: Et transportproblem med en partiel løsning fundet vha transportalgoritmen