Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet

February 17, 2016
JBJ

MM541 – Forår 2016 – Ugeseddel 4

Eksamensopgave 1:
Denne er nu tilgængelig på Blackboard og kan også hentes via kursets hjemmeside.

Stof som blev gennemgået i uge 7

- Tofts noter siderne 1.15-1.22.
- Tofts noter siderne 1.23-1.32 (læs også Rosen side 679-686)

Uge 8:
Her er der ingen timer, da det er reeksamensuge. Brug den overskydende tid til at løse eksamensopgave 1.

Introtimerne i uge 9:

- Tofts noter siderne 1.34-1.42. Se også Rosen 11.5
- Tofts noter siderne 2.1-2.12

Øvelserne i uge 9:

- Tofts noter opgaverne 1.24, 1.25 og 1.26.
- Rosen afsnit 11.5 opgaverne 2,4,6,8,12,14,16
- Denne opgave handler om digrafer (eng:digraphs) dvs grafer hvor der er en retning på kanterne. Hvis $D = (V, A)$ er en digraf, siger vi at u **dominerer** v hvis kanten $u \to v$ er i D. **udvalensen**, $d^+_D(u)$, af et punkt u er antallet af punkter i D som u dominerer. En **vej** i en digraf $D = (V, A)$ er en følge af kanter $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \ldots, x_{k-1} \to x_k$, $k \geq 1$, som alle ligger i A (digrafens kanter) og som opfylder at $x_i \neq x_j$ når $i \neq j$. Dvs ingen punkter (og dermed ingen kanter) gentages. Hvis vejen indeholder alle digrafens punkter, kaldes den en **Hamilton vej**.

  Opgaverne nedenfor handler om en speciel type digrafer som kaldes turneringer (eng:tournaments). Disse er karakteriseret ved, at der for ethvert par af forskellige punkter u, v er præcis en orienteret kant mellem disse, dvs enten er kanten $u \to v$ med, eller også er $v \to u$ med i kantmængden, men ikke begge. Dvs en turnering med n punkter er en orientering af den komplette graf med n punkter. Turneringer har deres navn fra det faktum, at de ofte kan relateres til de mulige udfald af en sportsturnering, som f.eks den i den første opgave af eksamensopgaverne, hvor der ikke er uafgjorte kampe.

- Bevis, at enhver turnering har en Hamilton vej. Hint: anvend induktion.
- Bevis, at der for en vilkårlig turnering $T = (V, A)$ gælder, at T har et punkt $v \in V$, som opfylder at der alle andre punkter w enten gælder, at $v \to w \in A$, eller der findes et $z \in V - \{v, w\}$ så både $v \to z \in A$ og $z \to w \in A$. Oversat til sportsturneringer siger uden uafgjorte kampe siger dette, at der altid findes et hold v, som for et vilkårlig andet hold w, enten har vundet over dette direkte, eller har vundet over et andet hold, som så har vundet over w. Hint: se på et punkt med flest mulige kanter ud af sig.
- Vis, at der for en vilkårlig turnering T med n punkter findes et punkt v som dominerer mindst $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ andre punkter (dvs . Hint: relatér antallet af kanter i T til udvalenserne af dens punkter.
- Overvej følgende alternative bevis for at enhver turnering har en Hamilton vej: Lad T have n punkter. Betragt de $n!$ permutationer af T punkter og vælg en sådan permutation σ for hvilken flest mulige af T's kanter $i \to j$ opfylder at i kommer før j i permutationen σ. Bevis, at hvis σ har ordnet punkterne som $x_1, x_2, \ldots, x_n$, så indeholder T alle kanterne $x_i \to x_{i+1}$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dvs disse udgør en Hamilton vej i T.
- Hvilke(t) af de to beviser ovenfor for at ethver turnering har en Hamilton vej kan laves om til en god (dvs polynomiel) algoritme der konstruerer en Hamilton vej?