Formelsamling til
MM501 — Calculus I
MM502 — Calculus II
MM503 — BioMat I
MM504 — BioMat II

Niels Kirkegaard og Peter Damkjær

Senest redigeret af Hans J. Munkholm, juli 2009

Forord

Denne formelsamling er oprindelig skrevet af to studerende, Niels Kirkegaard og Peter Damkjær, som et "afkog" af pensum i Matematik A (E92 og F93) ved Odense Universitet. Indholdet er ment som en hjælp til opgaveregning (inkl. eksamensopgaver), hvilket betyder, at man skal være bekendt med pensum for at få et egentligt udbytte.

Siden hen er ændringer blevet udført af bl.a. Bent Ørsted, Henrik Pedersen og Andrew Swann.

I denne udgave er de tidligere afsnit om fladeintegraler og om Gauss', Greens og Stokes' sætninger udeladt idet disse emner ikke mere er pensum. Henvisningerne til 'Adams' i teksten er tilpasset bogen

> Robert A. Adams, *Calculus: a complete course*, 7th edition, Pearson/Addison Wesley, Toronto, 2010, ISBN 0-321-54928-7.

Odense i juli, 2009,
Hans J. Munkholm.

Indhold

Kapitel 1

Trigonometriske funktioner

Adams, §P7 og §2.5

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos x = \cos(x + n2\pi)$$
$$\cos x = \cos(-x)$$
$$\cos x = -\cos(\pi - x)$$
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\sin x = \sin(x + n2\pi)$$
$$\sin x = -\sin(-x)$$
$$\sin x = \sin(\pi - x)$$
$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\tan x \cot x = 1$$

$$\tan x = \tan(x + n\pi)$$
$$\cot x = \cot(x + n\pi)$$
$$\tan x = -\tan(-x)$$
$$\cot x = -\cot(-x)$$
$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

grader	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Se Adams, side 49.

funktion $f(x)$	afledet funktion $f'(x)$	stamfunktion $\int f(x)\,dx$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}\ (=1+\tan^2 x)$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}\ (=-1-\cot^2 x)$	$\log\lvert\sin x\rvert$
$\cos^2 x$	$-2\sin x\cos x$	$\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$
$\sin^2 x$	$2\sin x\cos x$	$\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$

Kapitel 2

Hyperbolske funktioner

Adams, §3.6

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \left(= \frac{\sinh x}{\cosh x} \right)$$
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \left(= \frac{1}{\tanh x} \right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} &\sinh(x+y) \\ &\qquad = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ &\cosh(x+y) \\ &\qquad = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

funktion $f(x)$	afledet funktion $f'(x)$	stamfunktion $\int f(x)\,dx$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\log \cosh x$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\log\lvert\sinh x\rvert$

Kapitel 3

Inverse trigonometriske funktioner

Adams, §3.5

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$
$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

funktion $f(x)$	afledet funktion $f'(x)$	stamfunktion $\int f(x)\,dx$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$
$\operatorname{arccot} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

Kapitel 4

Taylorpolynomier

Adams, §4.10

Hvis f har afledede op til og med n'te orden i punktet $x = c$, kan Taylorpolynomiet for f af n-te grad omkring punktet $x = c$ skrives som

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \end{aligned}$$

(Adams, side 272)

Hvis funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har afledede op til $(n+1)$'te orden og $P_n(x)$ er Taylorpolynomiet af n'te grad for f omkring $x = c$, er f givet ved

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

hvor $R_n(x)$ kaldes restleddet af n'te grad og er givet ved Lagrange's formel

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

for et X mellem x og c. (Adams s. 274)

4.1 Uendelige Taylorrækker

Adams, §9.6

Hvis f har afledede af vilkårlig orden i punktet $x = c$, altså hvis $f^{(n)}(c)$ eksisterer for alle $n = 1, 2, \ldots$, er Taylorrækken for funktionen f givet ved

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \\ &\quad = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Sådan en funktion f siges at være *analytisk i* $x = c$ hvis dens Taylorrække konvergerer til $f(x)$ for x i åbent interval omkring c.

Kapitel 5

l'Hôpitals regel

Adams, §4.3

5.1 l'Hôpitals første regel

Antag $f(x)$ og $g(x)$ har afledede $f'(x)$ og $g'(x)$,; som er kontinuerte i et åbent interval omkring a samt at

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Hvis

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eksisterer, så er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemærk. Her kan a være et endeligt tal eller $\pm\infty$.

5.2 Anvendelse af L'Hôpitals regel

Bestemmelse af grænseværdien

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

hvor $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ og $\lim_{x \to a} g(x) = 0$:

(1.) Differentier n gange indtil enten $\lim_{x \to a} f^{(n)}(x)$ eller $\lim_{x \to a} g^{(n)}(x)$ (eller begge) er forskellig fra 0.

(2.) Hvis $\lim_{x\to a} g^{(n)}(x) \neq 0$ så er grænseværdien

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

ellers findes grænseværdien ikke!

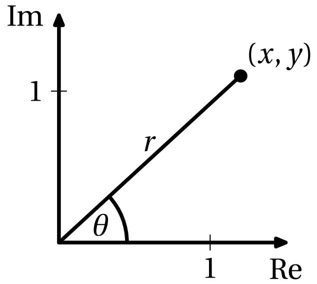
Kapitel 6

Komplekse tal

Adams, Appendix I

Et komplekst tal $z = x + iy \in \mathbb{C}$ kan blot opfattes som en vektor i den reelle plan. Dvs. som et talpar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Det komplekse tal i er så $i = (0, 1)$ og opfylder $i^2 = -1$.



Figur 6.1: Det komplekse tal $x + iy = re^{i\theta}$.

6.1 Addition og multiplikation

Lad $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Så gælder der:

- Addition af de to komplekse tal:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

- Multiplikation af to komplekse tal:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

6.2 Modulus og argument

Et komplekst tal beskrives ved dets koordinater ($z = x + iy$) *rektangulær form*. Men det kan også beskrives ved dets afstand fra $(0,0)$, *modulus* $|z|$, samt dets vinkel med x-aksen, *argument* $\arg(z)$).

x hhv. y kan så findes ved at projicere z ned på x-aksen hhv. ind på y-aksen:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

hvor $r = |z|$ og $\theta = \arg(z)$.

- Modulus af et komplekst tal:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad \text{hvor } \bar{z} = x - iy.$$

- Argumentet (θ) findes f.eks. ved at løse

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{og} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

  Argumentet er kun bestemt op til hele multipla af 2π. Dvs.

$$\arg(z) = \theta + p2\pi, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

- Hovedargument

$$-\pi < \theta \leqslant \pi,$$

  men $0 \leqslant \theta < 2\pi$ bruges af visse andre forfattere.

6.3 Den komplekse eksponentialfunktion og polær form

Definition 6.1. Den komplekse eksponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$$

Vi har altså pr. definition *Eulers formel*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Definition 6.2. Ud fra foregående definition ses at ethvert komplekst tal kan skrives på *polær formen*:

$$z = re^{i\theta},$$

hvor $r = |z|$ og $\theta = \arg(z)$.

Multiplikation af to komplekse tal på polær form. Lad

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \in \mathbb{C}$$

så er

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Dvs. at produktet af to komplekse tal har modulus givet ved produktet af de to moduli og argument givet ved summen af de to argumenter.

Løsning af $z^n = a$. Skriv $z^n = re^{i\theta}$, så er z givet ved

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{r}(e^{i\theta})^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left(e^{i(\theta+p2\pi)}\right)^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2p}{n}\pi\right)}, \qquad p = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Kapitel 7

Differentialligninger

7.1 Separable differentialligninger

Adams, side 446

En 1. ordens differentialligning, der kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

kaldes en *separabel ligning*. Vi løser den ved at integrere

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Dette giver en ligning, som sammenknytter y og x. I favorable (men ikke alle) tilfælde kan man løse denne ligning, så man direkte får y som funktion af x og integrationskonstanten C.

7.2 Homogene 1. ordens differentialligninger

Adams, side 942

En 1. ordens differentialligning, der kan skrives som

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

siges at være homogen (af grad 0). Denne løses ved at sætte $y = vx$ (bemærk, at $y' = v + v'x$), hvorved der fremkommer den separable 1. ordens ligning

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}.$$

7.3 Første ordens lineære differentialligninger

Adams, side 449

En 1. ordens lineær differentialligning kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Den løses ved først at beregne

$$\mu(x) = \int p(x)\,dx.$$

Den generelle løsning bliver

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx + ce^{-\mu(x)}.$$

(Midt på side 449 i Adams ses denne formel uden leddet $ce^{-\mu(x)}$. Leddet *skal* imidlertid med.)

7.4 Anden ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter

Adams, §3.7

Den generelle løsning til den *homogene ligning* ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

$$ay'' + by' + cy = 0$$

findes ved at beregne rødderne i hjælpeligningen

$$ar^2 + br + c = 0.$$

(1) Hvis diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ er positiv, fås to reelle rødder r_1 og r_2 til hjælpeligningen, og den generelle løsning til den homogene ligning bliver

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

(2) Hvis $D = 0$ er den generelle løsning

$$y(x) = Ae^{kx} + Bxe^{kx}, \qquad k = -\frac{b}{2a}.$$

(3) Hvis $D < 0$, da har hjælpeligningen rødderne $k \pm i\omega$ med $k = -\frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$. Den generelle løsning bliver

$$y(x) = c_1 e^{kx} \cos(\omega x) + c_2 e^{kx} \sin(\omega x).$$

(Adams, sider 204)

Den *inhomogene* ligning

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{7.1}$$

har den generelle løsning $y = y_p(x) + y_h(x)$, hvor y_p er en *partikulær* løsning til den inhomogene ligning, og y_h er den generelle løsning til den homogene ligning. Den partikulære løsning y_p findes ved gættemetoden:

Lad $A_n(x)$, $B_n(x)$ og $P_n(x)$ betegne n'te grads polynomierne

$$\begin{aligned} A_n(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ B_n(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \\ P_n(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n. \end{aligned}$$

For at finde en partikulær løsning $y_p(x)$ til (7.1)

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

anvendes følgende:

Hvis $f(x) =$	prøv $y_p(x) =$
$P_n(x)$	$x^m A_n(x)$
$P_n(x)e^{rx}$	$x^m A_n(x)e^{rx}$
$P_n(x)e^{rx}\cos(kx)$	$x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)]$
$P_n(x)e^{rx}\sin(kx)$	$x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)]$

hvor m er det midste af tallene 0, 1 og 2, så intet led af y_p er en løsning til den tilsvarende homogene ligning. (Adams, side 964)

Kapitel 8

Vektorer i tre dimensioner

Adams, §§10.1–10.4

8.1 Afstanden mellem to punkter

For $P_1(x_1, y_1, z_1)$ og $P_2(x_2, y_2, z_2)$ er afstanden $|P_1P_2|$ mellem P_1 og P_2 givet ved

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Dette generaliseres let til $\mathbb{R}^n$.

8.2 Skalarprodukt og krydsprodukt

For $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ er skalarproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ givet ved

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta,\end{aligned}$$

hvor θ er vinklen mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

For $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ defineres krydsproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ved

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).\end{aligned}$$

Længden $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ af krydsproduktet giver arealet af det parallelogram, som udspændes af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Bemærk, at $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ er en vektor vinkelret på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og har retning ifølge *højrehåndsreglen*.

Hvis vi foruden **u** og **v** har en tredie vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, fås

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Dette tal angiver *volumenet* (med fortegn) af det parallelepipedum, der udspændes af **u**, **v** og **w**.

8.3 Planer og linier

Planen i $\mathbb{R}^3$ vinkelret på vektoren $\mathbf{n} = (A, B, C)$ og gående igennem $P_0(x_0, y_0, z_0)$ har *ligningen*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Linien gennem $P_0(x_0, y_0, z_0)$ og gående i retningen $\mathbf{v} = (a, b, c)$ har *parameterfremstillingen*

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Kapitel 9

Funktioner af flere variabler

Definition 9.1. En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kaldes et *skalarfelt.*

Definition 9.2. En funktion $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ kaldes et *vektorfelt,* $m > 1$.

9.1 Første ordens afledede

Definition 9.3. *Den første partielle afledede* af et skalarfelt $f(x, y)$ med hensyn til variablen x hhv. y er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}.$$

Man skriver også $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 = D_1 f$, etc. (Adams, side 681)

En normalvektor til fladen $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b))$ er givet ved ligningen:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

(Adams, side 684)

Tangentplanen til $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b))$ er givet ved ligningen:

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b).$$

(Adams, side 685)

Definition 9.4. Hvis $\mathbf{u} = (u, v)$ er en enhedsvektor, defineres *den retningsafledede* $D_{\mathbf{u}} f(a,b)$ af $f(x,y)$ i retningen $\mathbf{u}$ ved

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(a,b) &= \frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv)\bigg|_{t=0} \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b) \\ &= |\nabla f(a,b)| \cos\theta, \end{aligned}$$

hvor $\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ kaldes *gradienten* af f i (a,b), og θ er vinklen mellem $\nabla f(a,b)$ og $\mathbf{u}$. (Adams, side 716)

9.2 Anden ordens afledede

Sætning 9.5 (Adams, side 688 - 689)**.** *Antag* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *er et skalarfelt, samt at de partielle afledede* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *findes, og er kontinuerte i en omegn af* (a,b)*. Så gælder*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

Med andre ord: differentiationsrækkefølgen er ligegyldig for "pæne" funktioner.

Sætningen kan generaliseres til $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

9.3 Kæderegel for skalarfelter

Lad $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ åben og $\mathbf{r}: J \to S$, hvor $J \subseteq \mathbb{R}$.

Definér g som

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)), \quad t \in J.$$

Hvis $\mathbf{r}'(t)$ findes, og f er differentiabel i $\mathbf{r}(t)$, så findes $g'(t)$ og er givet ved

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Hvis $n = 2$ og $z(t) = z(x(t), y(t))$, fås

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

(Adams, side 694)

9.4 Jacobi-matrix

Lad $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være givet som $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Jacobi-matricen af **f** i **a** er defineret som

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

hvis alle de partielle afledede findes. Her kan vi også skrive $D_i f_j(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Bemærk, at her er indekserne på $f_1, f_2, \cdots f_m$ simpelt hen numrene på de enekelte koordinatfunktioner for **f**. De betegner altså ikke partielle afledede.

9.5 Stationære punkter (maximum, osv.)

Definition 9.6. Et skalarfelt, der er differentiabelt i **a**, har et stationært punkt i **a**, hvis

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (D_1 f(\mathbf{a}), \ldots, D_n f(\mathbf{a})) = \mathbf{0}.$$

Vi skriver også $D_i f(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

Art af et stationært punkt

Definition 9.7. Et stationært punkt **a** kaldes et

- *lokalt maximum*, hvis $\exists r > 0\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}; r) : f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{a})$,
- *lokalt minimum*, hvis $\exists r > 0\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}; r) : f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{a})$,
- *sadelpunkt*, hvis $\forall r > 0\ \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{a}; r) : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y})$,

hvor $B(\mathbf{a}; r)$ er en kugle med centrum **a** og radius r.

Bestemmelse af arten i to dimensioner

Skriv $D_{i,j}f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, osv.

Sætning 9.8 (Adams, side 748, Remark)**.** *Antag at* **a** *er et stationært punkt for* f*. Lad* $A = D_{1,1}f(\mathbf{a})$, $B = D_{1,2}f(\mathbf{a})$, $C = D_{2,2}f(\mathbf{a})$ *og sæt*

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2.$$

Så gælder der, at

- $\Delta < 0$*:* f *har et sadelpunkt i* **a***;*
- $\Delta > 0$ *og* $A > 0$*:* f *har et lokalt minimum i* **a***;*
- $\Delta > 0$ *og* $A < 0$*:* f *har et lokalt maximum i* **a***;*
- $\Delta = 0$*:* **ingen** *konklusion.*

Bemærk. Testen giver kun mening i stationære punkter for f.

Kapitel 10

Dobbeltintegraler

Adams, §14.2

Type I: Lad S være et område i xy-planet givet ved

$$S = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b \text{ og } \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\}$$

så er dobbeltintegralet af f over S givet ved

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]\,dx.$$

Type II: Lad T være et område i xy-planen givet ved

$$T = \{(x,y) : \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y) \text{ og } c \leqslant y \leqslant d\}$$

så er dobbeltintegralet af f over T givet ved

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\Big]\,dy.$$

10.1 Koordinatskift i to dimensioner

Lad $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ og $r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Så skiftes fra xy-planen til uv-planen ved

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

hvor $S = r(T)$ og

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

(Adams, side 814)

10.2 Polære koordinater

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r,$$
$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

(Adams, §14.4)

10.3 Lineær transformation

$$x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv,$$
$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = |AD - BC| \iint_T f(Au + Bv, Cu + Dv)\,du\,dv.$$

10.4 Volumenudregning

Analogt med, at der i én dimension gælder, at $\int_a^b f(x)dx$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, er arealet mellem f og x-aksen fra a til b, så gælder der i to dimensioner, at

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy, \qquad \text{hvor } Q \subseteq \mathbb{R}^2,\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$$

er voluminet mellem f og xy-planen inden for Q.

Voluminet af en figur i $\mathbb{R}^3$ kan altså beregnes ved at finde et skalarfelt f, der beskriver overfladen af figuren kun som funktion af x og y, og finde figurens projektion, Q, i xy-planen — og så udregne dobbeltintegralet af f over Q.

Kapitel 11

Tripelintegraler

Lad V være et område i xyz-rummet givet ved

$$V = \big\{(x,y,z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \psi_1(x) \text{ og } \phi_2(x,y) \leqslant z \leq \psi_2(x,y)\big\}$$

så er tripelintegralet af f over V givet ved

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left[\int_{\phi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx.$$

(Adams, §14.5)

11.1 Koordinatskift i tre dimensioner

Lad $x = x(u,v,w),\ y = u,v,w),\ z = z(u,v,w)$ og

$$\mathbf{r}(u,v,w) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big).$$

Så skiftes fra xyz-rummet til uvw-rummet ved

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

hvor $V = \mathbf{r}(W)$ og

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

(Adams, side 825)

11.2 Cylinderkoordinater

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r,$$
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

(Adams, sider 825 - - 826)

11.3 Sfæriske koordinater

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi,$$
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2\sin\phi,$$

$$\begin{aligned}\iiint_V & f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_W f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.\end{aligned}$$

(Adams, sider 827 - - 828)

11.4 Volumenudregning

Voluminet af et legeme V i $\mathbb{R}^3$ kan udregnes ved at udregne tripelintegralet af skalarfeltet $f(x,y,z) = 1$:

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V dx\,dy\,dz.$$

Kapitel 12

Kurveintegraler

12.1 Kurveintegral af et skalarfelt

Adams, §15.3

Definition 12.1. Lad

- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være et skalarfelt, og
- $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ være en parametrisering af kurven C fra begyndelsespunktet $P = \mathbf{r}(a)$ til slutpunktet $Q = \mathbf{r}(b)$.

Så er kurveintegralet af f langs C defineret ved

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,||\mathbf{r}'(t)||\,dt.$$

Bemærk. Integralets værdi er uafhængigt af valg af parametrisering, også selv om en ny parametrisering bytter om på P og Q.

Længden af en kurve

Længden af kurven C fås ved at integrere det konstante skalarfelt $f = 1$ langs C. Når C er parametriseret som ovenfor haves altså

$$\text{længde}(C) = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||\,dt$$

(Adams, side 638)

12.2 Kurveintegral af et vektorfelt

Definition 12.2. Lad

- $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være et vektorfelt, og
- $\mathbf{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ være en parametrisering af kurven C fra begyndelsespunktet $P = \mathbf{r}(a)$ til slutpunktet $Q = \mathbf{r}(b)$.

Så er kurveintegralet af $\mathbf{F}$ langs C defineret ved

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt.$$

Bemærk. Integralet er uafhængigt af valg af parametrisering, men kun hvis orienteringen af kurven bevares, dvs. nye parameterise ringer skal stadig have P som begyndelsespunkt og Q som slutpunkt. Ombytter en ny parametrisering P og Q, skifter integralet fortegn.

12.3 Gradientfelter

Adams, §15.2

Definition 12.3. Hvis der eksisterer en skalarfelt ϕ:

$$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \text{med} \quad \nabla\phi = (D_1\phi, \ldots, D_n\phi) = \mathbf{F}$$

så kaldes vektorfeltet $\mathbf{F}$ et *gradientfelt* eller et *konservativt felt*. Og skalarfeltet ϕ akldes en potentialfunktion for $\mathbf{F}$.

Der gælder så, at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)).$$

(Adams, side 867)

12.4 Tilstrækkelige betingelser for et gradientfelt

Sætning 12.4 (Adams, side 898 - - 899)**.** *Lad* $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ *være et kontinuert differentiabelt vektorfelt på en åben sammenhængende mængde* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*. Så er* $\mathbf{F}$ *et gradientfelt på* S*, hvis en af følgende betingelser er opfyldt:*

- $D_i f_j(x) = D_j f_i(x)$ *for* $i, j = 1, \ldots, n$ *og alle* $x \in S$, og S *er en konveks mængde (eller mere generelt:* S *er sammenhængende og enkeltsammenhængende),*
- *Kurveintegralet af* $\mathbf{F}$ *er uafhængigt af vejen i* S*.*

12.5 Anden notation for kurveintegraler

For $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ gælder, at

$$\int_C F_1\,dx + F_2\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

For $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ gælder, at

$$\int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

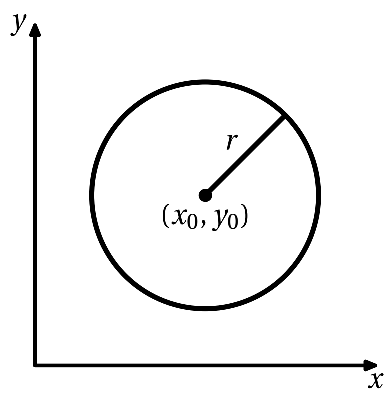
Kapitel 13

Parametriseringer af kurver og flader

13.1 Kurver i planen

Cirkel med centrum (x_0, y_0) og radius r.

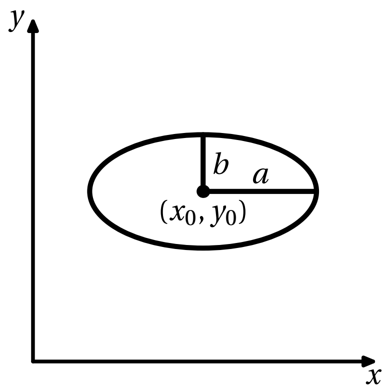
$$\alpha(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0), \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



Figur 13.1: Cirkel.

Ellipse med centrum (x_0, y_0), x-radius a og y-radius b.

$$\alpha(t) = (a\cos t + x_0, b\sin(t) + y_0), \quad t \in [0, 2\pi]$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$
$$b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = (ab)^2.$$



Figur 13.2: Ellipse.

En ret linie fra (a, c) til (b, d).

$$\alpha(t) = (a + (b-a)t, c + (d-c)t), \quad t \in [0, 1].$$

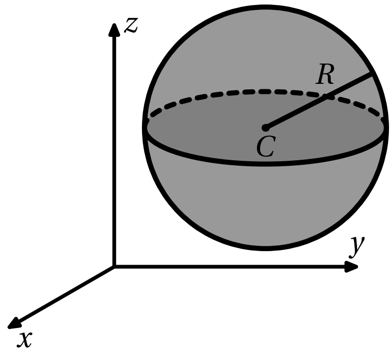
13.2 Flader i rummet

Kugle med centrum $C = (x_0, y_0, z_0)$ og radius R.

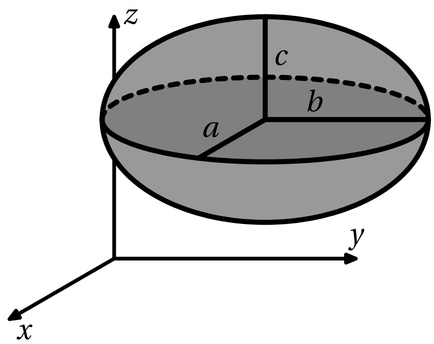
$$\mathbf{r}(u, v) = (R\cos u \sin v + x_0, R\sin u \sin v + y_0, R\cos v + z_0),$$
$$u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi],$$
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Ellipsoide

$$\mathbf{r}(u, v) = (a\cos u \sin v + x_0, b\sin u \sin v + y_0, c\cos v + z_0),$$
$$u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi], \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$



Figur 13.3: Kugle.



Figur 13.4: Ellipsoide.

Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

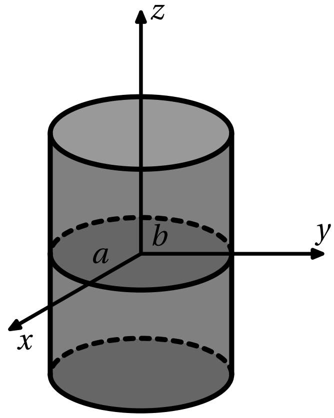
Kegle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

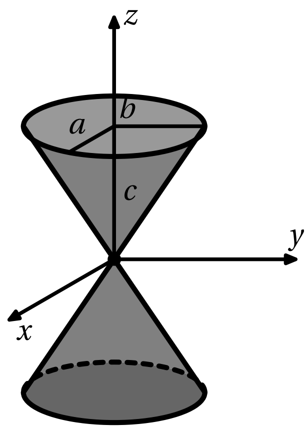
Paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

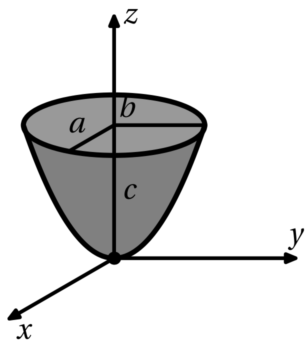
Bemærk. De sidste 3 flader har elliptiske vandrette snit.



Figur 13.5: Cylinder.



Figur 13.6: Kegle.



Figur 13.7: Paraboloide.

Kapitel 14

Uendelige rækker

Adams, §§9.2–9.4

Definition 14.1 (Adams, side 504)**.** En række, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er *konvergent*, hvis *afsnitsfølgen* $\{s_n\}$ konvergerer for $n \to \infty$, hvor $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ellers er den *divergent*.

Definition 14.2 (Adams, side 520)**.** En række, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes *absolut konvergent*, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Sætning 14.3 (Adams' sætning 13, side 520)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \textit{er konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{er konvergent.}$$

Der gælder endvidere, at

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

14.1 Tests for konvergens

Generelt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{er konvergent} \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0.$$

Testen bruges til at vise divergens, idet $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ er divergent.

(Adams, side 507)

Bemærk. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ medfører *ikke*, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent.

Sætning 14.4 (Integralkriteriet, Adams' sætning 8, side 510)**.** *Lad*

$$f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$$

være en kontinuert, aftagende funktion, så gælder der:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \textit{ er konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \textit{ er konvergent}$$

$$\left(\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) < \infty \right).$$

Sætning 14.5 (Sammenligningskriteriet, Adams' sætning 9, side 512)**.** *Lad* $\sum a_n$ *være en række, hvor* $\exists K > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n \leqslant K b_n$*, så gælder der:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ er konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ er konvergent.}$$

Kapitel 15

Potensrækker

Adams, §9.5

Definition 15.1. En uendelig række på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots,$$

hvor $x, c, a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$ kaldes en *potensrække*.

Sætning 15.2 (Eksistens af konvergens radius)**.** *Til enhver potensrække*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \tag{15.1}$$

hører netop én konvergens radius, R, således at

- (15.1) *konvergerer absolut for alle $x \in \mathbb{R}$, hvor $|x-c| < R$;*
- (15.1) *divergerer for alle $x \in \mathbb{R}$, hvor $|x-c| > R$.*

Dvs., at for alle de $x \in \mathbb{R}$, der ligger inden for intervallet med centrum a og radius R, konvergerer (15.1) absolut, og for alle de $x \in \mathbb{R}$, der ligger udenfor, divergerer (15.1).

Hvis (15.1) kun konvergerer for $x = a$, så er $R = 0$.

Hvis (15.1) konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$, så er $R = \infty$.

Bemærk. Det er ikke givet, hvad der sker for de $x \in \mathbb{R}$, der opfylder, at $|x-a| = R$ (intervalendepunkterne).

Sætning 15.3. *Givet en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Da er dens konvergens-radius givet ved*

$$R = L^{-1},$$

hvor

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \textit{eller} \quad L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

når disse grænseværdier eksisterer.

Hvis $L = 0$, så er $R = \infty$ (pr. definition).
Hvis $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eller $|a_n|^{1/n}$ går mod ∞ for $n \to \infty$, så er $R = 0$ (pr. definition).

15.1 Eksempler på uendelige rækker

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1, \\
\sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2x-1}}{(2n-1)!}, \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\
\sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1, \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1, \\
\frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Kapitel 16

Sandsynlighedsteori

Adams, §7.8

En *kontinuert stokastisk variabel* X, som kan tage værdier i et interval $[a,b]$, siges at have *tæthedsfunktion* $f(x)$, $x \in [a,b]$, hvis der gælder

$$\Pr(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

for alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ med $x_1 \leqslant x_2$.

En sådan tæthedsfunktion må nødvendigvis opfylde to betingelser

(1) $f(x) \geqslant 0$ for alle $x \in [a,b]$,

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

Her kan $[a,b]$ erstattes med $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$ eller $[a,\infty)$, men så bliver integralet i (2) uegentlig.

16.1 Eksempler

Ligelig fordeling på $[a,b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Eksponentiel fordeling på $[0,\infty)$ med middelværdi k:

$$f(x) = ke^{-kx}, \quad x \geqslant 0.$$

Normalfordeling på $(-\infty,\infty)$ med middelværdi μ og standardafvigelse σ:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Standardnormalfordelingen har $\mu = 0$, $\sigma = 1$, så:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

16.2 Middelværdi, varians, standardafvigelse

Hvis X har tæthedsfunktion $f(x)$, $x \in [a, b]$, så er

- *middelværdien* $\mu(X)$ af X

$$\mu(X) = E(X) = \int_a^b x f(x)\, dx,$$

- *variansen* $\sigma^2(X)$ af X

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\, dx \\ &= \mu(X^2) - \mu(X)^2,\end{aligned}$$

- *standardafvigelsen* for X er $\sqrt{\sigma^2(X)}$.