ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 1: Eliminação de Gauss

1. Resolver por eliminação de Gauss (em sistema).

(a) $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 4x+2z=6 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x+y+2z=3 \\ -2x+2y=-2 \end{cases}$

2. Resolver por eliminação de Gauss (em matriz).

(a) $\begin{cases} 2x+6y-z=2 \\ 4y+z=0 \\ x-2z=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-z=3 \\ 3x+4y-z=8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-3y-2z=5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x-2y-z=6 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ -x+y=0 \\ -y+2z-w=0 \\ 2z+w=2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y=3 \\ 3x-2y+z=4 \\ x-4y+2z=-2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+z=4 \\ x+y+z=2 \\ x-z=3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x-y-z=-3 \\ x+y-2z=0 \\ 2x+2y+z=-1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=0 \\ -x-y+4z=3 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x+z=-2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-3y-z=-4 \\ -2x-y+2z=1 \end{cases}$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 1, exercícios 1–5, 7–8 e 10–12.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 2: Classificação de sistemas

1. Classificar os seguintes sistemas de equações, determinando a sua solução geral sempre que possível.

(a) $\begin{cases} 2x+y-2z=-1 \\ x+2y+z=0 \\ -2x+z=-1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=10 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x-2y+2z=3 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x-2y+2z=6 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x-2y+5z+w=1 \\ x+y-3z+2w=2 \\ 6x+y-4z+3w=7 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y-z=-2 \\ -x-2y=-2 \end{cases}$

Nota: indicar a solução geral nas duas formas possíveis. Por exemplo, alínea (b): $y=2$, $z=1-x$ ou $(0,-2,1)+(-1,0,1)t$. Apresentar várias variantes para cada.

2. Classificar (sem resolver) os seguintes sistemas de equações.

(a) $\begin{cases} 3x-2y+5z+w=1 \\ x+y-3z+2w=2 \\ 6x+y-4z+7w=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-2y+z+2w=-2 \\ 2x+3y-z-5w=9 \\ 4x-y+z-w=5 \\ 5x-3y+5z+w=3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y=3 \\ 3x-2y+z=4 \\ x-4y+2z=-1 \end{cases}$

3. Classificar os seguintes sistemas de equações lineares em função dos seus parâmetros.

(a) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -x+\alpha y=-2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x-4z=-3 \\ 2x+\alpha y-3z=-2 \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=\beta \\ 2x+y+\alpha w=4 \\ z+w=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x+2y+4z=2 \\ 2x+(2-\alpha)z=-1 \\ 2x+2z=\beta-1 \end{cases}$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 1, exercícios 6, 9 e 13.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 3: Cálculo matricial

1. Calcular os seguintes produtos de matrizes.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (f) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

   (g) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (h) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   (k) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   (l) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

   (m) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (n) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calcular a inversa das seguintes matrizes.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 1, exercícios 14–48.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 4: Determinantes

1. Calcular os determinantes das seguintes matrizes pela regra de Laplace.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Calcular os determinantes das seguintes matrizes aplicando eliminação de Gauss.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 1, exercícios 49–59.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 5: Subespaços de $\mathbb{R}^n$

1. Verificar se os seguintes conjuntos são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$ e encontrar bases para os que o sejam.

   (a) Os vectores (x, y, z) com $x + y = 2$;

   (b) Os vectores (x, y, z) com $y - z = 1$;

   (c) Os vectores (x, y, z) com $y = 0$ e $2x = 3z$.

   (d) Os vectores (x, y, z) com $x = 0$ e $5y = 2z$.

2. Encontrar uma base para os espaços gerados por cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $\{(1, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 0), (3, 0, 3, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$

   (b) $\{(2, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 0, 3, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$

3. Encontrar equações paramétricas equivalentes a cada um dos seguintes sistemas de equações cartesianas.

   (a) $\begin{cases} 2x + y - 2z = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - 2y + 2z = 6 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z + w = 1 \\ x + y - 3z + 2w = 2 \\ 6x + y - 4z + 3w = 7 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z + w = 1 \\ x + y - 3z + 2w = 2 \\ 6x + y - 4z + 3w = 0 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x - 2y + 2z + 2w = -2 \\ 4x - y + 3z - w = 5 \\ 5x - 3y + 5z + w = 3 \end{cases}$

4. Escrever o vector $\vec{v} = (3, 4, 2, 6)$ como combinação linear dos elementos de

   $$S = \{(1, 2, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (1, 0, 1, -1)\}.$$

   Quais as coordenadas de $\vec{v}$ na base S de $L(S)$?

5. Calcular as coordenadas dos seguintes vectores em cada uma das bases do exercício 2.

   (a) $(2, 1, 0, 1)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$ (c) $(1, -1, 1, -1)$ (d) $(0, 1, 1, 1)$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 2, exercícios 6–8, 12, 15(a–c), 16(a–c), 17–18, 20(a–b), 21, 23–24, 27 e 30–36.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 6: Espaços lineares

1. Verificar se os seguintes conjuntos são subespaços lineares dos espaços apresentados e indicar bases para os que o sejam.

   (a) Em $M_{2\times 2}$:
   - matrizes com determinante 1;
   - matrizes A com $a_{12} + a_{21} = 0$.

   (b) Em $\mathcal{P}$:
   - polinómios p com $p(0) = 1$;
   - polinómios p com $p'(1) = 0$.

2. Escrever o vector $\vec{v}$ como combinação linear dos elementos de S.

   (a) Em P_2, $\vec{v} = 3x^3 + 2x^2 + 8x + 1$ e $S = \{x^3 + x^2 + 2x, x^2 - 1, x^2 + 2x - 1\}$.

   (b) Em $M_{2\times 2}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

   (c) Em $M_{2\times 2}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

   (d) Em $M_{2\times 2}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Encontrar bases para os espaços gerados por cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $\{3x^3 + 2x, x^2 - 1, 2x^3 - x^2 - 1, 3x^2 - 3, 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2\}$ em P_3

   (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_{2\times 2}$

   (c) $\{x^4 + x^3 + 3x^2 + 1, x + 1, 2x^4 + 3x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2\}$ em P_4

   (d) $\{3x^4 + 2x^2 + 3, x^3 - x^2 + 3x + 2, 2x^4 + 2, -2x^3 + 2x^2 - 6x - 4\}$ em P_4

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 2, exercícios 1–2, 5, 9–11, 13–14, 15(d–e), 16(d–e), 19, 20(c), 22, 25 e 28–29.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 7: Espaços euclideanos

1. Para cada um dos seguintes pares de vectores de $\mathbb{R}^3$, calcular $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ e $\angle(\vec{u},\vec{v})$.

   (a) $\vec{u}=(-1,0,3)$ e $\vec{v}=\big(1,\sqrt{5},2\big)$

   (b) $\vec{u}=\big(1,2,\sqrt{5}\big)$ e $\vec{v}=(1,2,0)$

   (c) $\vec{u}=(0,1,0)$ e $\vec{v}=\big(\sqrt{2},\sqrt{2},2\big)$

   (d) $\vec{u}=\big(1,1,\sqrt{2}\big)$ e $\vec{v}=(1,1,0)$

   (e) $\vec{u}=(3,4,5)$ e $\vec{v}=(-1,7,0)$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 2, exercícios 38, 41, 42(a–b), 43 e 46–49.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 8: Ortogonalização e projecções

1. Determinar uma base ortogonal para o espaço gerado por cada um dos seguintes conjuntos de vectores.

   (a) $\{(2,0,1),(1,3,0)\}$

   (b) $\{(1,-1,1),(1,2,1),(3,0,3)\}$

   (c) $\{(2,1,0,1),(-1,2,2,0),(0,5,4,1),(1,1,-1,0)\}$

   (d) $\{(1,2,1,0),(2,-1,0,2),(0,5,1,4),(1,1,0,-1)\}$

2. Determinar a projecção de $(1,1,1)$ ou de $(1,1,1,1)$ sobre cada um daqueles espaços.

3. Determinar o complemento ortogonal de cada um dos espaços do exercicio 1.

4. Encontrar sistemas de equações cartesianas equivalentes a cada uma das seguintes equações paramétricas.

   (a) $(x,y,z)=(1,0,-1)t+(2,1,0)w$

   (b) $(x,y,z)=(1,1,1)+(2,1,-1)t$

   (c) $(x,y,z,w)=(2,0,1,0)+(1,0,1,1)t+(-1,2,1,0)w$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 2, exercícios 50–51.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 9: Geometria analítica

1. Calcular a distância do ponto $(1,2,0)$ ao plano $x-y+z=1$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Calcular a distância do ponto $(1,0,1,0)$ ao plano $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z+w=0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}^4$.

3. Calcular a distância do ponto $(2,-1,3)$ à recta $\begin{cases} x+y=2 \\ x-z=1 \end{cases}$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Calcular o ângulo entre os planos $x-y+z=1$ e $x+y=2$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Calcular a distância e o ângulo entre as rectas $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-z=0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}^3$.

6. Calcular a distância entre os planos $x+y+z=1$ e $x+y+z=2$ de $\mathbb{R}^3$.

7. Encontrar a solução de mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \\ 2x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}.$$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 2, exercícios 50–51.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 10: Transformações lineares (I)

Determine a expressão geral de cada uma das seguintes transformações lineares, bem como a sua representação matricial em relação às bases canónicas dos espaços de partida e de chegada.

1. $S_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetria em relação ao plano α de equação $x - 2y = z$.
2. $S_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetria em relação à recta r de equação $(x, y, z) = (2, 1, -1)t$.
3. $P_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, projecção ortogonal sobre a recta r de equação $2x - y = 0$.
4. $P_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, projecção ortogonal sobre o plano α de equação $2x - y = 0$.
5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, transformação que efectua uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ em torno da origem seguida duma reflexão em relação ao eixo horizontal e de nova rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno da origem.
6. $R_{x,\frac{\pi}{3}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotação de $\frac{\pi}{3}$ em torno do eixo dos xx.
7. $R_{y,\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno do eixo dos yy.
8. $R_{y,\frac{\pi}{4}} \circ R_{x,\frac{\pi}{3}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, composição das duas transformações anteriores.
9. $R_{x,\frac{\pi}{3}} \circ R_{y,\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, composição das mesmas duas transformações por ordem inversa.
10. $R_{r,\frac{\pi}{6}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotação de $\frac{\pi}{6}$ em torno da recta de equação $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 11: Transformações lineares (II)

1. Verifique se as seguintes operações são transformações lineares.
   (a) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $R(x, y, z) = (2x - 3y, z + 1)$
   (b) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (2x - 3y, z)$
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (3x - z, 2y + 1)$
   (d) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $R(x, y, z) = (3x - z, 2y)$
   (e) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (2x - y + z, 1)$
   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x - y + z, 0)$
   (g) $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $S(p(x)) = 3p''(x) - p(0) + 2$
   (h) $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $S(p(x)) = 3p''(x) - p(0)$
   (i) $T : \mathcal{C}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $T(f(x)) = (f(0) + f'(2), 3f'(1) + 1)$
   (j) $T : \mathcal{C}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $T(f(x)) = (f(0) + f'(2), 3f'(1))$

2. Determine a representação matricial das transformações do exercício 1 em relação às bases canónicas dos espaços envolvidos.

3. Para cada uma das transformações seguintes, verifique se o vector $\vec{v}$ pertence ao núcleo, pertence à imagem e/ou é vector próprio da seguinte transformação linear.
   (a) $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
   $T(p(x)) = xp(1)$
   $\vec{v} = 3x$

   (b) $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
   $T(f) = f'' + f$
   $\vec{v} = \cos(3x)$

   (c) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$
   $TA = A + A^T$
   $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

   (d) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$
   $TA = A + A^T$
   $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Calcule o núcleo e a imagem das transformações lineares do exercício 1.

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 3, exercícios 1–24.

ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

ÁLGEBRA LINEAR 2012/2013

Licenciaturas em EMM, ESEM, GP e GTL

Aula prática 13: Diagonalização

1. Verifique se as seguintes transformações lineares são diagonalizáveis e, em caso afirmativo, apresente uma base em que tenham representação diagonal.

   (a) $R_{x,\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno do eixo dos xx.

   (b) $P_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, projecção ortogonal sobre o plano α de equação $2x - y = 0$.

   (c) $D : P_3 \to P_3$, derivação de polinómios.

   (d) $R_{r,\frac{\pi}{6}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotação de $\frac{\pi}{6}$ em torno da recta de equação $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

   (e) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por $T(A) = A + A^T$.

   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (-3x + 4y + 2z, -x + y + z, -3x + 6y + 2z)$

Outros exercícios. Apontamentos, Capítulo 3, exercícios 29–37.