ANÁLISE MATEMÁTICA II
Integrais de linha e integrais de superfície
Escola Superior Náutica Infante Dom Henrique

Parametrização de curvas

1. Parametrize a semi-circunferência de raio 1, centrada em $(0,1)$, com $x \geq 0$.
2. Parametrize a fronteira da região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 4, x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
3. Parametrize a fronteira da região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \geq 4, y \leq x, y \geq 0\}$.

Integrais de linha de campos escalares

4. Considere a parábola $y = x^2$ com densidade de massa $\dfrac{1}{(1+y)\sqrt{1+4y}}$. Calcule a massa do segmento da parábola entre $x = -1$ e $x = 1$.
5. Calcule $\int_C y\, ds$ sendo C a parábola $y = 2\sqrt{x}$ entre $x = 3$ e $x = 15$.
6. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{1}{x^2 + y^2} ds$ onde C é o segmento de recta que une $(0,1)$ a $(1,0)$.
7. Calcule $\int_C x^2 + y^2 - z\, ds$ onde C é a intersecção da esfera de raio 2 centrada na origem com o plano $z = 2$.
8. Calcule $\int_C x^2 + y^2 + 2z\, ds$ sobre a hélice C parametrizada por $g(t) = (\cos t, \sin t, 4t)$ entre $(1,0,0)$ e $(0,1,2\pi)$.
9. Calcule a massa dum arame com forma duma circunferência de raio 3 centrada na origem e densidade linear dada por $\rho(x,y) = 5 - y$.

Integrais de linha de campos vectoriais

10. Calcule $\displaystyle\int_C \left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - y^2\right) dx$ onde C é o gráfico de $y = 1 - |1 - x|$ entre $(0,0)$ e $(2,0)$.
11. Considere a curva C parametrizada por $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \theta)$, com $0 \leq \theta \leq 4\pi$.
    (a) Calcule o comprimento de C.
    (b) Calcule o trabalho do campo $f(x,y,z) = \left(y, -x, e^{x^2+y^2-1}\right)$ ao longo de C.
12. Considere o campo $f(x,y) = (-y, y)$ e o caminho C constituído por dois segmentos de recta passando por $(1,-2)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. Calcule o integral de f ao longo de C.
13. Calcule $\displaystyle\int_L xydx + x^2dy$, com L parametrizada por $r(\lambda) = (\lambda, 1 - |\lambda|)$ com $-1 \leq \lambda \leq 1$.

14. Calcule $\int_C \left(x^2 - y\right) dx + \left(y^2 + x\right) dy$ nos casos seguintes:

    (a) C é o segmento de recta unindo $(0,1)$ a $(1,2)$;

    (b) C é um caminho em linha recta entre $(0,1)$ e $(1,1)$ e depois em linha recta até $(1,2)$;

    (c) C é a parábola (t, t^2+1) entre $(0,1)$ e $(1,2)$.

15. Calcule $\int_C \left(3x^2 - 6yz\right) dx + (2y + 3xz)\, dy + \left(1 - 4xyz^2\right) dz$ nos casos seguintes:

    (a) C é a curva (t, t^2, t^3) com $0 \leq t \leq 1$;

    (b) C é um caminho em linha recta entre $(0,0,0)$ e $(0,0,1)$ e depois em linha recta até $(1,1,1)$;

    (c) C é o segmento de recta unindo $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

16. Calcule $\int_C (x+y)\, dx + (y-x)\, dy$ nos casos seguintes:

    (a) C é a parábola $y^2 = x$ entre os pontos $(1,1)$ e $(4,2)$;

    (b) C é o segmento de recta unindo $(1,1)$ e $(4,2)$;

    (c) C é um caminho em linha recta entre $(1,1)$ e $(1,2)$ e depois em linha recta até $(4,2)$.

17. Calcule o trabalho realizado por $f(x,y) = (2x - y + 4, 5y + 3x - 6)$ ao longo dos caminhos seguintes:

    (a) o triângulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(3,2)$;

    (b) a circunferência de raio 4 centrada na origem.

18. Calcule o trabalho realizado pelo campo $f(x,y,z) = (3x - 4y + 2z, 4x + 2y - 3z^2, 2xz - 4y^2 + z^3)$ ao longo da elipse parametrizada por $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Teorema de Green

19. Seja C a fronteira do quadrado $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ percorrida no sentido directo. Calcule $\oint_C \sin\left(\pi x^2\right) dx + \left(e^{y^2} - x\right) dy$.

20. Calcule $\oint_C \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2\right) dy$ ao longo da fronteira C da região limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$.

21. Calcule a área da elipse $x = 3\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$.

22. Calcule a área da hipociclóide $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$.

23. Calcule $\oint_C \left(4x^3 - 5y\right) dx - \left(8 + \sqrt{y^3 + 2}\right) dy$ sendo C a circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

24. Calcule a área limitada pelas curvas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 - x$.

Teorema Fundamental do Cálculo

25. Considere a curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3, 0 \leq x \leq 1\}$ e o campo vectorial definido por $f(x, y) = (2xy + y^2, 2xy + x^2)$.

    (a) Calcule o integral de f ao longo da curva C a partir da definição.

    (b) Verifique que o campo f é um gradiente e calcule um potencial V tal que $f = \nabla V$.

    (c) Confirme o valor obtido na alínea (a) recorrendo ao potencial V.

26. Considere o campo vectorial definido por $g(x, y) = (2x^3 + xy^2 - 2xy, 2y^3 + y - x^2\ 2xy)$.

    (a) Verifique se existe algum potencial V tal que $g = \nabla V$.

    (b) Calcule o integral de g ao longo da curva $r(t) = (t \sin(\pi t^2), t \cos(\pi t^2))$.

27. Verifique que $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(3,4)} \left(6xy^2 - y^3\right) dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right) dy$ é independente do caminho e calcule o seu valor.

28. Calcule $\displaystyle\oint_C \left(x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x\right) dx + \left(x^2 \sin x - 2ye^x\right) dx$ ao longo da hipociclóide C definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$.

29. Verifique que $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,1)} \left(2xy - y^4 + 3\right) dx + \left(x^2 - 4xy^3\right) dy$ é independente do caminho e calcule o seu valor.

30. Calcule $\displaystyle\int_C \left(xy^3 - y^2 \cos x\right) dx + \left(1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2\right) dx$:

    (a) ao longo da parábola C definida por $2x = \pi y^2$ entre $(0, 0)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$;

    (b) ao longo da fronteira do paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$ e $(2, 2)$.

Parametrização de superfícies

31. Parametrize a superfície $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$.

32. Parametrize a superfície $(z - 2)^2 = x^2 + y^2$ com $2 \leq z \leq 5$.

Integrais de superfície

33. Calcule $\iint_S xz\, dS$, sendo a região S a porção do plano $3x + 2y + z = 12$ limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 2$.

34. Calcule $\iint_S z\, dS$, com $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 6 - x^2 - y^2, z \geq 2\}$.

35. Seja $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

    (a) Calcule a área de S.

    (b) Calcule o momento de inércia de S quando gira em torno do eixo vertical.

    (c) Calcule o centróide de S.

36. Calcule $\displaystyle\iint_S \frac{xy}{x^2+y^2} dS$ com $S = \{(x, y, z) \mid x, y \geq 0, z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

37. Considere a superfície S definida por $z = 2 - (x^2 + y^2)$ com $z \geq 0$.

    (a) Calcule a área de S.

    (b) Calcule o momento de inércia de S quando gira em torno do eixo vertical.

    (c) Calcule o centróide de S.

    (d) Calcule $\iint_S 3z \, dS$.

38. Calcule $\displaystyle\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$ ao longo da superfície do cone $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$ limitado por $z = 0$ e $z = 3$.

39. Calcule a área do plano $2x + y + +2z = 16$ na região limitada por:

    (a) $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ e $y = 3$;

    (b) $x = 0$, $y = 0$ e $x^2 + y^2 = 64$.

40. Calcule a área do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ que fica fora do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

41. Calcule a área do cone $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$ limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Integrais de fluxo

42. Seja S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $z \geq 0$. Calcule o fluxo de $(0, 0, 3z + 1)$ através de S.

43. Calcule o fluxo do campo $(xy, -x^2, x + z)$ através da porção do plano $2x + 2y + z = 6$ contida no primeiro octante.

44. Calcule o fluxo de $(1, xy, 0)$ através da superfície $r(u, v) = (u + v, u - v, u^2)$.

Teorema da divergência

45. Sejam $r(x, y, z) = (x, y, z)$ o campo radial e S uma superfície fechada. Relacione o integral $\iint_S (r \cdot \vec{n}) \, dS$ com o volume da região limitada por S.

46. Calcule o fluxo de $(xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ ao longo da superfície delimitando o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

47. Calcule o fluxo de $(z^2 - x, -xy, 3z)$ ao longo da fronteira da região delimitada por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e $z = 0$.

48. Calcule o fluxo de $(2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ ao longo da superfície esférica centrada em $(3, -1, 2)$ com raio 3.

Teorema de Stokes

49. Seja S a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 2$ e C a sua fronteira.

    (a) Calcule directamente a circulação do campo $(3y, -xz, yz^2)$ ao longo de C.

    (b) Verifique o resultado recorrendo ao Teorema de Stokes.

50. Seja S a meia superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com $z \geq 0$ e C a sua fronteira.

    (a) Calcule directamente a circulação do campo $(2y, 3x, -z^2)$ ao longo de C.

    (b) Verifique o resultado recorrendo ao Teorema de Stokes.