Kantfarvning af grafer

Speciale ved Institut for Matematik og Datalogi
Odense Universitet

Udført af: Lene Monrad Favrholdt
Vejleder: Bjarne Toft

28. august 1998

Indhold

Indledning

Dette speciale beskæftiger sig med kantfarvning af multigrafer — d.v.s. grafer uden loops, men evt. med multiple kanter. En kantfarvning af en graf er en afbildning af kantmængden ind i en mængde af farver, som f.eks. kan være heltal. En *ægte* kantfarvning er en kantfarvning, så intet par af incidente kanter tildeles den samme farve. Det kantkromatiske tal χ' for en multigraf er det mindste tal k, så der findes en ægte k-farvning af grafen.

Formålet med specialet er at give et overblik over de vigtigste resultater og uløste problemer omkring kantfarvning af multigrafer. Desuden at vise, hvordan beviserne for nogle af resultaterne kan omsættes til polynomielle algoritmer til kantfarvning af multigrafer.

For at læse og forstå specialet behøves intet forhåndskendskab til grafteori, men en vis fortrolighed med grafer vil gøre det lettere fordøjeligt. For at forstå afsnit 1.4, kapitel 2 og kapitel 6 er det en fordel at kende O-notationen, som anvendes i beskrivelsen af algoritmers tidskompleksitet og pladsforbrug. For at forstå kapitel 2 er det desuden nødvendigt at vide, hvad det vil sige, at et problem er NP-komplet.

I afsnittet Notation sidst i specialet beskrives notationen anvendt i dette speciale. I afsnittet Terminologi defineres de grundlæggende grafteoretiske begreber. Alle grafteoretiske begreber herudover defineres, efterhånden som de dukker op i teksten.

Nogle kapitler slutter med et afsnit med bemærkninger. Disse afsnit bruges hovedsageligt til at knytte forbindelser til relateret litteratur.

I det første kapitel udledes forskellige øvre grænser for det kantkromatiske tal. Derefter skitseres to polynomielle algoritmer, hvoraf den ene farver todelte grafer med χ' farver, og den anden farver simple grafer — d.v.s. grafer uden multiple kanter — med højst $\chi' + 1$ farver. I kapitel 2 vises, at det er NP-komplet at bestemme, om en given 3-regulær graf kan farves med 3 farver. D.v.s. medmindre NP=P, findes der ingen polynomiel algoritme, som farver enhver graf med χ' farver.

Kapitel 3 og 4 indeholder en gennemgang af en række kendte formodninger. I kapitel 3 bevises en svagere udgave af en af dem, og beviset danner grundlag for den polynomielle algoritme til at farve multigrafer med højst $\lfloor \frac{7}{6}\chi' + \frac{2}{3} \rfloor$ farver, som beskrives i kapitel 6.

De uløste problemer i kapitel 3 og 4 drejer sig næsten alle om en bestemt mængde af grafer: de grafer, hvor det kantkromatiske tal er mindst 2 større end den største valens i grafen. Kapitel 5 beskæftiger sig med en delmængde af disse grafer: de grafer, hvor det kantkromatiske tal er netop 2 større end den største valens i grafen, og hvor alle multiple kanter består af netop to kanter.

De sidste to kapitler beskæftiger sig kort med to variationer af kantfarvning: Listefarvning og intervalfarvning. Det sidste kapitel giver et eksempel på en anvendelse af intervalfarvning i et skemalægningsproblem.

Kapitel 1

Øvre grænser for χ'

Enhver ægte farvning φ af en graf G opfylder, at $|\varphi(x)| = d(x)$ for alle $x \in V(G)$. For en vilkårlig multigraf G gælder derfor, at $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

I første del af dette kapitel gives øvre grænser k for det kantkromatiske tal χ' for forskellige typer af grafer. Beviserne for de enkelte resultater udgør anvisninger på, hvordan man kant for kant kan finde en k-farvning af en multigraf. Første del af kapitlet er inddelt efter de anvendte metoder til k-farvning. Sidst i kapitlet skitseres ud fra beviserne polynomielle algoritmer til k-farvning af h.h.v. todelte grafer og simple grafer.

I afsnit 1.1 indføres begrebet *alternerende vej*. V.h.a. alternerende veje vises, at enhver graf med en kritisk kant indeholder en ulige kreds. Det betyder specielt, at enhver graf G med $\chi'(G) > \Delta(G)$ indeholder en ulige kreds. En todelt multigraf G indeholder ingen ulige kredse og kan derfor farves med $\Delta(G)$ farver. Alternerende veje anvendes også i kombination med både vifter og acceptable veje.

I afsnit 1.2 indføres begrebet *vifte*. En vifte er knyttet til en bestemt farvning, som tildeler farver til alle undtagen én kant i en multigraf. Det undersøges, hvornår farvningen kan ændres til at omfatte hele grafen uden at tage en ekstra farve i brug. Herefter kan Vizings Sætning, som siger, at en multigraf G altid kan farves med højst $\Delta(G) + \mu(G)$ farver, udledes. Samtidig udledes forskellige stærkere udgaver af sætningen. Af den sidste af disse følger Shannons Sætning umiddelbart. Shannons Sætning giver en lidt anden form for øvre grænse for $\chi'(G)$ end Vizings Sætning; nemlig $\lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$. Det vises, at der findes grafer med $\chi' = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$, og disse grafer karakteriseres. Endelig udledes sætninger, der siger noget om strukturen af grafer med $\chi' > \Delta$, og herudfra udledes flere øvre grænser for χ'.

I afsnit 1.3 indføres *acceptable veje*, hvis teori minder om vifternes. V.h.a. acceptable veje udledes Vizings Sætning påny, og det vises, at en graf G, som behøver $\Delta(G) + \mu(G)$ farver til en ægte farvning, indeholder en $\mu(G)$-trekant.

I afsnit 1.4 beskrives kort, hvordan man v.h.a. teknikkerne anvendt i afsnit 1.1 og 1.2 kan konstruere polynomielle algoritmer, der farver todelte grafer og simple grafer med h.h.v. Δ og $\Delta+1$ farver.

1.1 Alternerende veje

Definition 1.1 *En* alternerende (α,β)-vej *er en vej, hvis kanter er farvet med skiftevis α og β.*

Antag, P er en alternerende (α,β)-vej i en graf med en ægte farvning φ. For en indre knude z i P gælder, at $\alpha, \beta \in \varphi(z)$. Hvis P er maksimal, og x er startknuden i P, tilhører α eller β, men ikke begge, $\varphi(x)$. Det samme gælder for slutknuden y. Derfor kan man bytte om på α og β langs P og opnå en ny farvning φ', som også er ægte. For de indre knuder z gælder ligesom før, at $\alpha, \beta \in \varphi'(z)$. Hvis $\alpha \in \varphi(x), \beta \notin \varphi(x)$, da gælder $\beta \in \varphi'(x), \alpha \notin \varphi'(x)$, og tilsvarende for y.

Lemma 1.2 *Lad G være en multigraf med en kant e, og antag, at $G - e$ kan k-farves, hvor $k \geq \Delta(G)$. Da gælder*

$$G \text{ kan ikke } k\text{-farves} \Rightarrow e \text{ er indeholdt i en ulige kreds i } G$$

Bevis Beviset er ved kontraposition. Hvis e ikke er indeholdt i en ulige kreds, kan man ud fra en k-farvning af $G - e$ konstruere en k-farvning af G.

Lad x og y være e's endepunkter. Da $|\varphi(x)| = d(x) - 1 < \Delta(G) \leq k$, findes der en farve $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$. Tilsvarende findes der en farve $\beta \in \overline{\varphi}(y)$. Hvis α og β kan vælges, så $\alpha = \beta$, farves e med α, og en k-farvning af G er opnået. Hvis ikke, ses på den maksimale alternerende (α,β)-vej P fra x.

Hvis P *ikke* ender i y, ombyttes α og β langs P, hvorefter β mangler ved både x og y. Nu kan e farves med β, og dermed er en k-farvning af G opnået.

Hvis G ikke kan k-farves, må der altså gælde, at P ender i y. Hvis P ender i y, vil den sidste kant i P være en α-kant. Den første kant er en β-kant, og dermed må P indeholde et lige antal kanter. Sammen med e udgør P derfor en ulige kreds. $\square$

Den følgende sætning følger umiddelbart af Lemma 1.2.

Sætning 1.3 *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) > \Delta(G) \;\Rightarrow\; G \text{ indeholder en ulige kreds.}$$

Bevis En multigraf G, som ikke indeholder en ulige kreds, kan iflg. Lemma 1.2 farves kant for kant med $\Delta(G)$ farver. □

Af Sætning 1.3 følger Königs Sætning:

Sætning 1.4 (König, 1916) *For enhver multigraf G gælder*

$$G \text{ er todelt} \;\Rightarrow\; \chi'(G) = \Delta(G)$$

Bevis Enhver vej eller kreds i en todelt graf G med todeling (X, Y) indeholder skiftevis knuder fra X og Y. Enhver kreds i G indeholder altså et lige antal kanter. Iflg. Sætning 1.3 kan G derfor farves med $\Delta(G)$ farver. På den anden side er $\Delta(G)$ farver som tidligere nævnt nødvendigt for at farve G. Altså er $\chi'(G) = \Delta(G)$. □

1.2 Vifter

Definition 1.5 *Lad G være en multigraf, e_1 en kant i G og φ en farvning af $G - e_1$. Hvis x er et endepunkt til e_1, da er en* vifte *ved x m.h.t. φ en ordnet mængde $F_x = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ af forskellige kanter incidente med x, som opfylder følgende. Lad $e_i \in E(x, y_i)$ for $1 \leq i \leq n$, hvor y_i'erne ikke nødvendigvis er forskellige knuder. For $2 \leq j \leq n$ gælder, at $\exists i < j : \varphi(e_j) \in \overline{\varphi}(y_i)$.*
$\overline{F}_x$ er defineret ved $\overline{F}_x = E(x) \setminus F_x$.

Skal man opbygge en vifte, starter man altså med den ufarvede kant. Derefter inkluderes en kant e kun, hvis der allerede er inkluderet en kant e_i, så farven på e mangler ved y_i. Det følgende lemma siger, at hvis der i en vifte findes en kant, hvor den samme farve mangler ved begge endepunkter, da kan farvningen ændres til at omfatte den ufarvede kant uden at tage en ny farve i brug.

Lemma 1.6 *Lad G være en multigraf med en kant e_1. Antag, der eksisterer en k-farvning φ af $G - e_1$. Lad $F = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ være en vifte ved x m.h.t. φ, hvor $e_i \in E(x, y_i)$ for $1 \leq i \leq n$, og lad $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Da gælder*

$$\big[\, \exists y_j \in Y : \exists \alpha \in \overline{\varphi}(y_j) \cap \overline{\varphi}(x) \,\big] \;\Rightarrow\; G \text{ kan } k\text{-farves.}$$

Bevis Beviset er ved induktion over j. Ud fra φ konstrueres en k-farvning φ' af G.

Hvis $y_j = y_1$, opnås φ' ved at farve e_1 med α.

Hvis $y_j \neq y_1$, omfarves e_j med α, hvorved en ny ægte k-farvning φ'' af $G - e_1$ opnås. Nu mangler $\varphi(e_j)$ ved x, og da F er en vifte, findes der desuden et $i < j$, så $\varphi(e_j)$ mangler ved y_i. D.v.s. $\varphi(e_j) \in \overline{\varphi''}(y_i) \cap \overline{\varphi''}(x)$, hvor $i < j$, og kanterne $e_1, e_2, \ldots, e_i$ udgør en vifte m.h.t. φ''. Nu kan G pr. induktion k-farves. □

Det næste lemma siger, at hvis der blandt endepunkterne til kanterne i en vifte findes to knuder forskellige fra x, som mangler den samme farve, da kan farvningen ændres til at omfatte den ufarvede kant uden at tage en ekstra farve i brug.

Lemma 1.7 *Lad G være en multigraf med en kant e_1, og lad $k \geq \Delta(G)$. Antag, der eksisterer en k-farvning φ af $G - e_1$. Lad $F = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ være en vifte ved x m.h.t. φ, hvor $e_i \in E(x, y_i)$ for $1 \leq i \leq n$, og lad $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Da gælder*

$$\Big[\exists y_i, y_j \in Y, y_i \neq y_j \; : \; \exists \alpha \in \overline{\varphi}(y_i) \cap \overline{\varphi}(y_j) \Big] \;\Rightarrow\; G \textit{ kan } k\textit{-farves.}$$

Bevis Da $|\varphi(x)| = d(x) - 1 < \Delta(G) \leq k$, findes der en farve $\beta \in \overline{\varphi}(x)$. Hvis α mangler ved x, eller hvis β mangler ved en knude i Y, kan G iflg. Lemma 1.6 k-farves. Antag derfor, at α er repræsenteret ved x, og at β er repræsenteret ved hver knude i Y. Antag desuden, at $i = \min\{h \mid \alpha \in \overline{\varphi}(y_h)\}$, og $j = \min\{h > i \mid \alpha \in \overline{\varphi}(y_h)\}$. D.v.s. i og j er valgt mindst muligt, og $i < j$.

Lad P_i være den maksimale alternerende (α,β)-vej fra y_i, og lad P_j være den maksimale alternerende (α,β)-vej fra y_j. Hvis P_i når y_j, når den y_j langs en β-kant og slutter i y_j, fordi α mangler ved y_j. Det samme gælder for P_j og y_i. D.v.s. enten er P_i og P_j disjunkte, eller også indeholder de præcis de samme knuder og kanter. Hvis P_i når x, vil den ende der, fordi β mangler ved x. Det samme gælder P_j. P_i og P_j kan altså ikke begge indeholde x. Der er derfor to muligheder $x \notin P_i$ eller $x \in P_i \wedge x \notin P_j$.

Hvis $x \notin P_i$, opnås en ny k-farvning φ' af $G - e_1$ ved at ombytte α og β langs P_i. Da gælder $\beta \in \overline{\varphi'}(x) \cap \overline{\varphi'}(y_i)$. Da $x \notin P_i$, er ingen kanter i viften indeholdt i P_i. D.v.s. $\varphi'(e) = \varphi(e)$ for alle $e \in F$. Da $\alpha, \beta \in \varphi(y_h)$ for alle $h < i$, slutter P_i ikke i nogen knude i $\{y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}\}$. D.v.s. $\varphi'(y_h) = \varphi(y_h)$ for alle $h < i$. Dermed er $F' = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ en vifte m.h.t. φ'. Altså kan G iflg. Lemma 1.6 k-farves.

Hvis $x \in P_i$, opnås en ny k-farvning φ' af $G - e_1$ ved at ombytte α og β langs P_j. Da gælder $\beta \in \overline{\varphi'}(x) \cap \overline{\varphi'}(y_j)$. Da $x \in P_i$, ender P_j ikke i y_i. D.v.s. $\varphi'(y_h) = \varphi(y_h)$ for alle $h < j$. Desuden gælder $\varphi'(e) = \varphi(e)$ for alle $e \in F$, da $x \notin P_j$. Altså er $F' = \{e_1, e_2, \ldots, e_j\}$ en vifte m.h.t. φ'. Iflg. Lemma 1.6 kan G dermed k-farves. □

Lemma 1.6 og Lemma 1.7 siger altså tilsammen, at hvis der blandt endepunkterne til kanterne i en vifte findes to forskellige, som mangler den samme farve, da kan farvningen ændres til at omfatte den ufarvede kant uden at tage en ekstra farve i brug. Nu kan det lemma, som resten af afsnit 1.2 bygger på, udledes.

Lemma 1.8 *Lad G være en multigraf med en kant e_1, og lad $k \geq \Delta(G)$. Antag, der eksisterer en k-farvning φ af $G - e_1$.*
Lad $F_x = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ være den maksimale vifte ved x m.h.t. φ, hvor $e_i \in E(x, y_i)$ for $1 \leq i \leq n$. Lad $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, og lad $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ være defineret ved $Z = \{z \mid z \in Y\}$. D.v.s. $m \leq n$.

$$G \textit{ kan ikke } k\textit{-farves} \;\Rightarrow \Big[\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x, z_i) - k) \geq 2, \textit{ og } m \geq 2\Big]$$

Bevis Hvis φ *ikke* kan ændres til en k-farvning af G, så er $\overline{\varphi}(x)$, $\varphi(\overline{F}_x)$, $\overline{\varphi}(z_1)$, $\overline{\varphi}(z_2), \ldots,$ $\overline{\varphi}(z_m)$ parvis disjunkte. $\overline{\varphi}(z_1), \overline{\varphi}(z_2), \ldots, \overline{\varphi}(z_m)$ er disjunkte iflg. Lemma 1.7. $\overline{\varphi}(x)$ og $\overline{\varphi}(z_i)$ er disjunkte for $1 \leq i \leq m$ iflg. Lemma 1.6. $\varphi(\overline{F}_x)$ og $\overline{\varphi}(x)$ er disjunkte, fordi $\varphi(\overline{F}_x) \subseteq \varphi(x)$. $\varphi(\overline{F}_x)$ og $\overline{\varphi}(z_i)$ er disjunkte for $1 \leq i \leq m$, fordi F_x er maksimal.

Heraf fås $|\overline{\varphi}(x)| + |\varphi(\overline{F}_x)| + |\overline{\varphi}(z_1)| + |\overline{\varphi}(z_2)| + \ldots + |\overline{\varphi}(z_m)| \leq k$, og

$$\Updownarrow \quad \begin{array}{l} |\overline{\varphi}(x)| + |\varphi(\overline{F}_x)| + |\overline{\varphi}(z_1)| + |\overline{\varphi}(z_2)| + \ldots + |\overline{\varphi}(z_m)| \leq k \\ (k - (d(x) - 1)) + (d(x) - n) + (k - (d(z_1) - 1)) + (k - d(z_2)) + \ldots + (k - d(z_m)) \leq k \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$(m+1)k + 2 - n - \sum_{i=1}^{m} d(z_i) \leq k$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^{m} d(z_i) + n - mk$$

$$\Downarrow$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x, z_i)) - mk$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x, z_i) - k)$$

Da $|\varphi(y_1)| = d(y_1) - 1 < \Delta(G) \leq k$, findes der en farve $\alpha \in \overline{\varphi}(y_1)$. Hvis $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$, kan e_1 farves med α. D.v.s. der findes en α-kant e_2 incident med x. Derfor er $m \geq 2$. $\square$

1.2.1 Vizing-agtige øvre grænser

Det antages i dette afsnit, at alle grafer har mindst én kant.

Definition 1.9 *For en knude x i en graf G er $d^*(x)$ defineret ved*

$$d^*(x) = d(x) + \max_{y \in V(G)} \{\mu(x, y)\}$$

Definition 1.10 *For en graf G er $\Delta^*(G)$ defineret ved*

$$\Delta^*(G) = \max_{x \in V(G)} \{d^*(x)\}$$

Lemma 1.11 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x, y)$, og lad $k \geq \Delta(G)$. Antag, $G - e$ kan k-farves. Da gælder*

$$G \textit{ kan ikke } k\textit{-farves} \quad \Rightarrow \quad k < \max_{z \in N(x)} \{d(z) + \mu(x, z)\}$$

Bevis Antag, at $G - e$ kan k-farves, og at G ikke kan. Lad $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ være defineret som i Lemma 1.8. Da gælder $\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x, z_i) - k) \geq 2$, og

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x, z_i) - k) \geq 2 \\
\Downarrow \quad & \\
& \max_{1 \leq i \leq m} \{d(z_i) + \mu(x, z_i) - k\} > 0 \\
\Downarrow \quad & \\
& k < \max_{1 \leq i \leq m} \{d(z_i) + \mu(x, z_i)\} \\
\Downarrow \quad & \\
& k < \max_{z \in N(x)} \{d(z) + \mu(x, z)\}
\end{aligned}$$

□

Sætning 1.12 *For enhver multigraf G gælder, at*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta^*(G)$$

Bevis Som tidligere bemærket er $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. På den anden side kan G iflg. Lemma 1.11 farves kant for kant med $\Delta^*(G)$ farver. □

Sætning 1.13 (Vizing, 1964) *For enhver* simpel *graf G gælder*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Bevis For en simpel graf G er $\Delta^*(G) = \Delta(G) + 1$. Sætningen følger derfor umiddelbart af Sætning 1.12. □

Sætning 1.14 (Vizing, 1964) *For enhver multigraf G gælder*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$$

Bevis For enhver multigraf G gælder $\Delta(G) + \mu(G) \geq \Delta^*(G)$. Sætningen følger derfor umiddelbart af Sætning 1.12. □

Sætning 1.14 er bedst mulig i den forstand, at der findes grafer G, for hvilke $\chi'(G) = \Delta(G) + \mu(G)$. Et eksempel er en ringgraf med tre knuder og lige mange kanter mellem hvert par af knuder. Hvis den største valens og den største multiplicitet ikke findes ved den samme knude, giver Sætning 1.12 en bedre øvre grænse for χ'. Den øvre grænse kan dog let forbedres yderligere. I det følgende indføres nye grænser Δ^{**}, Δ_N og Δ_{N_2}. For en vilkårlig graf G gælder, at $\Delta^{**}(G) \leq \Delta^*(G)$, og $\Delta_{N_2}(G) \leq \Delta_N(G) \leq \Delta^*(G)$.

Definition 1.15 *For en graf G er $\Delta^{**}(G)$ defineret ved*

$$\Delta^{**}(G) = \max\{\Delta(G), \max_{x \leftrightarrow y}\{\min\{d^*(x), d^*(y)\}\}\}$$

Sætning 1.16 *For enhver multigraf G er*

$$\chi'(G) \leq \Delta^{**}(G)$$

Bevis Lad $k \geq \Delta(G)$, og lad $S = \{x \in V(G) \mid d^*(x) > k\}$. Antag, at $\min\{d^*(x), d^*(y)\} \leq k$ for alle par af naboknuder x, y i G. Da er S uafhængig. Lad H være delgrafen af G induceret af knuderne i $V(G) \backslash S$. Det vises nu, at G kan farves med k farver ved først at farve kanterne i H og derefter de resterende kanter.

For alle $x \in V(H)$ gælder, at $d_H^*(x) \leq d_G^*(x) \leq k$. Iflg. Sætning 1.12 kan H derfor farves v.h.a. k farver. Hver kant i $E(G) \setminus E(H)$ har netop ét endepunkt, som tilhører S. Da et sådant endepunkt ikke har nogen naboer, som tilhører S, kan kanterne i $E(G) \setminus E(H)$ derfor iflg. Lemma 1.11 farves en for en uden at tage ekstra farver i brug.

D.v.s. hvis $k \geq \min\{d^*(x), d^*(y)\}$ for alle par af naboknuder x, y i G, da kan G farves med k farver. $\square$

Det er klart, at $\Delta^{**} \leq \Delta^*$ for enhver graf, og at der findes grafer, hvor $\Delta^{**} < \Delta^*$ (se f.eks. grafen i figur 1.1). Sætning 1.16 giver altså en bedre øvre grænse for χ' end de foregående sætninger. Nu findes en anden øvre grænse Δ_N, som i nogle tilfælde er bedre end Δ^{**}. Først indføres en størrelse d_N, som svarer til d^*, bortset fra at der ses på valenserne af den pågældende knudes naboer i stedet for knudens egen valens.

Definition 1.17 *For en knude x er $d_N(x)$ defineret ved*

$$d_N(x) = \max_{y \in N(x)} \{d(y) + \mu(x, y)\}, \;\; \textit{hvis } |N(x)| \geq 1$$
$$d_N(x) = 0, \;\; \textit{ellers}$$

Definition 1.18 *For en graf G er $\Delta_N(G)$ defineret ved*

$$\Delta_N(G) = \max\{\Delta(G), \max_{x \leftrightarrow y}\{\min\{d_N(x), d_N(y)\}\}\}$$

Lemma 1.19 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x, y)$, og lad $k \geq \Delta(G)$. Antag, $G - e$ kan k-farves. Da gælder*

$$G \textit{ kan ikke } k\textit{-farves} \;\Rightarrow\; k < \min\{d_N(x), d_N(y)\}.$$

Bevis Antag, at $G - e$ kan k-farves, og at G ikke kan. Da fås af Lemma 1.11, at

$$k < \max_{z \in N(x)} \{d(z) + \mu(x, z)\} = d_N(x)$$

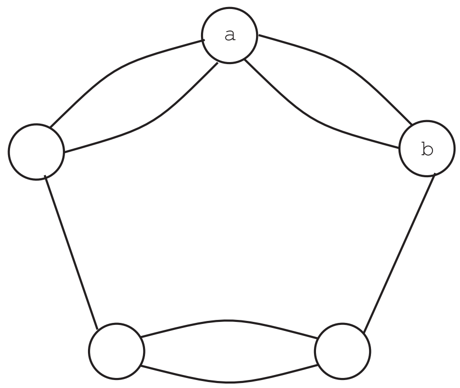
Det samme gælder med y i x's rolle. Heraf følger lemmaet. $\square$

Sætning 1.20 *For enhver multigraf G er*

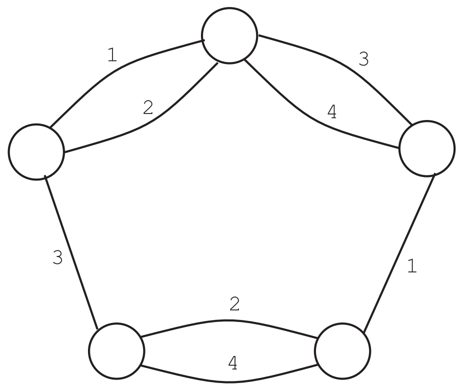
$$\chi'(G) \leq \Delta_N(G)$$

Bevis Hvis $k \geq \Delta_N(G)$, kan G iflg. Lemma 1.19 farves kant for kant med k farver. $\square$

For enhver multigraf G er $\max_{x \in V(G)}\{d_N(x)\} = \max_{x \in V(G)}\{d^*(x)\}$. Det betyder, at $\Delta_N(G) \leq \Delta^*(G)$. Der findes grafer, hvor uligheden er skarp. Et eksempel er grafen i figur 1.1, hvor



Figur 1.1: $\Delta^* = 6, \;\; \Delta^{**} = \Delta_N = 5$



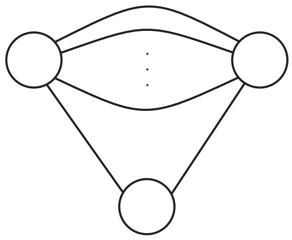
Figur 1.2: Grafen fra figur 1.1 kan 4-farves

$\max_{x\in V}\{d^*(x)\} = d^*(a) = 6 = d_N(b) = \max_{x\in V}\{d_N(x)\}$, og $\Delta^* = 6 > 5 = \Delta_N$. Altså giver Sætning 1.20 en bedre øvre grænse end Sætning 1.12. Ingen af de to grænser er dog helt optimale i dette tilfælde, idet grafen kan farves med kun 4 farver (se figur 1.2). Der kan på den anden side ikke anvendes færre end 4 farver, idet $\Delta = 4$.

Selvom Sætning 1.16 og Sætning 1.20 begge er stærkere end Sætning 1.12, findes der grafer, hvor selv Sætning 1.16 og 1.20 giver dårlige øvre grænser for χ'. For klassen af grafer vist i figur 1.3 gælder f.eks. $\Delta + \mu = \Delta^* = \Delta^{**} = \Delta_N = 2\Delta - 1$, men $\chi' = \Delta + 1$, så hvis Δ er stor, giver både Sætning 1.14, 1.12, 1.16 og 1.20 en dårlig øvre grænse. For at finde en bedre grænse udledes følgende lemma, som svarer til Lemma 2 i [3].

Lemma 1.21 *Lad $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$ være positive heltal, og lad $m \geq 2$. Da gælder*

$$\lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - \frac{2}{m} + 1 \rfloor \;\leq\; \lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor$$



Figur 1.3: $\Delta^{**} = \Delta_N = 2\Delta - 1$, men $\chi' = \Delta + 1 = \Delta_{N_2}$ (Δ_{N_2} defineres s. 13).

Bevis Antag til modstrid, at $\lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - \frac{2}{m} + 1 \rfloor > \lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor$.

For $m = 2$ opnås umiddelbart en modstrid: $\lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - 1 + 1 \rfloor > \lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor$.

For $m > 2$ gælder følgende.

$$
\begin{array}{rl}
 & \lfloor \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor > \lfloor \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor \\
\Downarrow & \\
 & \lfloor \dfrac{1}{m}(a_1 + (m-1)a_2) - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor > \lfloor \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor \\
\Downarrow & \\
 & \dfrac{1}{m}(a_1 + (m-1)a_2) - \dfrac{2}{m} + 1 > \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \\
\Updownarrow & \\
 & 2a_1 + 2(m-1)a_2 - 4 + 2m > ma_1 + ma_2 \\
\Updownarrow & \\
 & (2-m)a_1 + (m-2)a_2 > 4 - 2m \\
m > 2 \ \Updownarrow & \\
 & a_1 - a_2 < 2 \\
\Updownarrow & \\
 & a_1 < a_2 + 2
\end{array}
$$

For $m > 2$ er der altså to muligheder: $a_1 = a_2$ eller $a_1 = a_2 + 1$.

For $a_1 = a_2$ fås

$$
\lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - \frac{2}{m} + 1 \rfloor \leq \lfloor a_1 - \frac{2}{m} + 1 \rfloor = a_1 = \lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor,
$$

hvilket er i modstrid med antagelsen $\lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - \frac{2}{m} + 1 \rfloor > \lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor$.

For $a_1 = a_2 + 1$ fås

$$
\begin{array}{rl}
 & \lfloor \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor \leq \lfloor \dfrac{1}{m}(a_2 + 1 + (m-1)a_2) - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor \\
\Updownarrow & \\
 & \lfloor \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor \leq \lfloor \dfrac{1}{m}(ma_2 + 1) - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor \\
\Updownarrow & \\
 & \lfloor \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i - \dfrac{2}{m} + 1 \rfloor \leq \lfloor a_2 - \dfrac{1}{m} + 1 \rfloor = a_2 = \lfloor \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor,
\end{array}
$$

hvilket er i modstrid med antagelsen $\lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - \frac{2}{m} + 1 \rfloor > \lfloor \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \rfloor$. □

Nu defineres en størrelse d_{N_2}, som minder om d_N, bortset fra, at $d_{N_2}(x)$ betragter par af naboknuder til x i stedet for enkelte naboknuder.

Definition 1.22 *For en knude x er $d_{N_2}(x)$ givet ved*

$$\begin{aligned} &d_{N_2}(x) = \max_{N_2 \subseteq N(x), |N_2|=2} \{\lfloor \frac{1}{2} \sum_{z \in N_2} (d(z) + \mu(x,z)) \rfloor\}, \ \textit{hvis } |N(x)| \geq 2 \\ &d_{N_2}(x) = 0, \ \textit{ellers} \end{aligned}$$

Hvis en knude x har mindst to naboer, er $d_{N_2}(x)$ altså gennemsnittet af de to største værdier af $d(z) + \mu(x,z)$ for $z \in N(x)$.

Definition 1.23 *For en multigraf G er $\Delta_{N_2}(G)$ givet ved*

$$\Delta_{N_2}(G) = \max\{\Delta(G), \max_{x \leftrightarrow y}\{\min\{d_{N_2}(x), d_{N_2}(y)\}\}\}$$

Lemma 1.24 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x,y)$, og lad $k \geq \Delta(G)$ være et heltal. Antag, at $G - e$ kan k-farves. Da gælder*

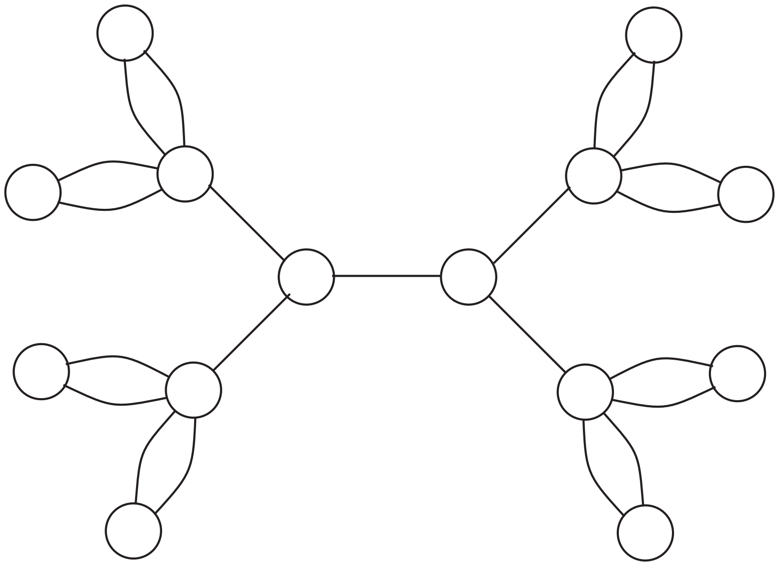
$$G \textit{ kan ikke } k\textit{-farves} \ \Rightarrow \ k < \min\{d_{N_2}(x), d_{N_2}(y)\}$$

Bevis Antag, at $G - e$ ikke kan k-farves. Lad $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ være defineret som i Lemma 1.8. Da gælder $\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x,z_i) - k) \geq 2$, og

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x,z_i) - k) \geq 2 \\ \Updownarrow\quad & \\ &k \leq \lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x,z_i)) - \frac{2}{m} \rfloor, \text{ da } k \text{ er et heltal.} \\ \Updownarrow\quad & \\ &k < \lfloor \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x,z_i)) - \frac{2}{m} + 1 \rfloor \\ 1.21 \Downarrow\quad & \\ &k < \max_{A \subseteq N(x), |A|=2}\{\lfloor \frac{1}{2}\sum_{z \in A}(d(z) + \mu(x,z)) \rfloor\}, \text{ da } m \geq 2 \text{ iflg. Lemma 1.8} \\ \Updownarrow\quad & \\ &k < d_{N_2}(x) \end{aligned}$$

Det samme gælder med y i x's rolle. Heraf følger lemmaet. □

Nu fås den nye øvre grænse for $\chi'(G)$ umiddelbart.



Figur 1.4: $\chi' = \Delta^{**} = 5,\ \Delta_{N_2} = \Delta_N = 6$

Sætning 1.25 *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) \leq \Delta_{N_2}(G)$$

Bevis Hvis $k \geq \Delta_{N_2}(G)$, kan G iflg. Lemma 1.24 farves kant for kant med k farver. □

For enhver knude x er $d_{N_2}(x) \leq d_N(x)$. D.v.s. for enhver multigraf G er $\Delta_{N_2}(G) \leq \Delta_N(G)$. Specielt for klassen af grafer vist i figur 1.3 er Sætning 1.25 en forbedring i forhold til både Sætning 1.20 og Sætning 1.16, idet $\Delta_{N_2} = \Delta + 1 = \chi'$.

Δ_{N_2} er altså i nogle tilfælde en bedre øvre grænse end Δ^{**}. I andre tilfælde er Δ^{**} bedre end Δ_{N_2} (se f.eks. figur 1.4).

1.2.2 Lidt om strukturen af kritiske grafer

I [6] findes flg. sætning.

Sætning 1.26 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x, y)$, og lad $k \geq \Delta(G)$. Hvis $G - e$ kan k-farves, og G ikke kan k-farves, da gælder*

1. *x har mindst én nabo z, hvor $d(z) + \mu(x, z) \geq k + 2$, eller*

2. x har mindst $k - (d(y) + \mu(x, y)) + 2$ naboer $z \neq y$, hvor $d(z) + \mu(x, z) = k + 1$

Bevis Af Sætning 1.8 fås, at x har m naboer $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (hvoraf den ene er y), hvor $\sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x, z_i) - k) \geq 2$. Heraf følger, at enten har x mindst én nabo z, så $d(z) + \mu(x, z) - k \geq 2$ eller også har x mindst $k - (d(y) + \mu(x, y)) + 2$ naboer $z \neq y$, så $d(z) + \mu(x, z) - k = 1$, idet $-(k - (d(y) + \mu(x, y)))$ er y's bidrag til summen. □

Enhver simpel graf og nogle multigrafer kan farves med $\Delta + 1$ farver. Hvordan skal en multigraf se ud, for at $\Delta + 1$ farver ikke er tilstrækkeligt til at farve kanterne? Iflg. Sætning 1.26 gælder der for enhver *kritisk* multigraf med $\chi' > \Delta + 1$, at hver knude x enten har mindst én nabo z, så $\mu(x, z) \geq 3$, eller mindst to naboer z, så $\mu(x, z) \geq 2$. Enhver graf med $\chi' > \Delta + 1$ har en kritisk delgraf med $\chi' > \Delta + 1$,[1] og en kritisk graf har mindst tre knuder, så enhver graf med $\chi' > \Delta + 1$ har mindst tre knuder, der opfylder ovenstående.

Som et korollar af Sætning 1.26 fås

Sætning 1.27 (Vizings Adjacency Lemma) *Lad G være en* simpel *graf med en kant $e \in E(x, y)$, og lad $k \geq \Delta(G)$. Antag, at $G - e$ kan k-farves, og at G ikke kan k-farves. Da gælder*

$$x \text{ har mindst } \Delta(G) - d(y) + 1 \text{ naboer } z \neq y \text{ med } d(z) = \Delta(G).$$

Bevis Antag, at $G - e$ kan k-farves, og at G ikke kan k-farves. Da er $k = \Delta(G)$.

Punkt 1 i Sætning 1.26 er aldrig opfyldt for simple grafer. Altså må punkt 2 være opfyldt. Da $\mu(x, y) = 1$, og $k = \Delta(G)$, betyder det, at x har mindst $\Delta(G) - d(y) + 1$ naboer $z \neq y$ med $d(z) = \Delta(G)$. □

I en kritisk simpel graf har hver knude altså mindst to naboer med valens Δ.

1.2.3 Flere øvre grænser for χ'

Et andet korollar af Sætning 1.26 er

[1] Ud fra en graf G kan man opnå en kritisk graf H med $\chi'(H) = \chi'(G)$ ved at fjerne kanter fra G, indtil $\chi'(H - e) < \chi'(H)$ for alle $e \in E(H)$. Alt efter hvilke kanter, der fjernes først, kan man af og til opnå forskellige kritiske grafer med samme kantkromatiske tal som G. Grafen H er altså ikke entydigt bestemt.

Sætning 1.28 *Lad G være en multigraf, og lad $S = \{x \in V(G) \mid d^*(x) = \Delta^*(G)\}$. Hvis G har mindst én kant, da gælder*

$$\begin{array}{c} \textit{Delgrafen af } G \textit{ induceret af knuderne i } S \textit{ er acyklisk} \\ \Downarrow \\ \chi'(G) \leq \Delta^*(G) - 1 \end{array}$$

Bevis Beviset er ved kontraposition. Antag, at $\chi'(G) = \Delta^*(G)$. Da har G en kritisk delgraf H med $\chi'(H) = \chi'(G) = \Delta^*(G)$. For enhver kant $e \in E(H)$ med endepunkter x og y fås af Lemma 1.26 med $k = \Delta^*(G) - 1$, at

1. x har mindst én nabo $z \in V(H)$ med $d_H(z) + \mu_H(x, z) = \Delta^*(G) + 1$, eller
2. x har mindst $\Delta^*(G) + 1 - (d_H(y) + \mu_H(x, y))$ naboer $z \in V(H) \setminus \{y\}$ med $d_H(z) + \mu_H(x, z) = \Delta^*(G)$. D.v.s. x har mindst 2 naboer $z \in V(H)$ med $d^*_H(z) = d^*_G(z) = \Delta^*(G)$.

Punkt 1 kan ikke lade sig gøre, så enhver knude $x \in V(H)$ har mindst to naboer $z \in V(H) \cap S$. Dette gælder specielt for enhver knude $x \in V(H) \cap S$. D.v.s. i delgrafen af H induceret af knuderne i S har enhver knude mindst 2 mindst to naboer. Da $V(H) \cap S$ iflg. Sætning 1.12 ikke er tom, betyder det, at denne delgraf er cyklisk, og dermed er delgrafen af G induceret af knuderne i S cyklisk. □

Som et korollar af Sætning 1.28 fås

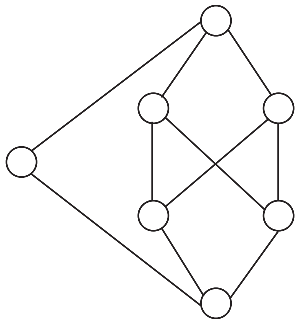
Sætning 1.29 *Lad G være en* simpel *graf, og lad $S = \{x \in V(G) \mid d(x) = \Delta(G)\}$. Hvis G har mindst én kant, da gælder*

$$\begin{array}{c} \textit{Delgrafen af } G \textit{ induceret af knuderne i } S \textit{ er acyklisk} \\ \Downarrow \\ \chi'(G) = \Delta(G) \end{array}$$

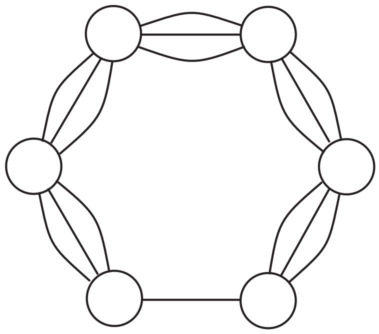
Bevis Hvis grafen induceret af knuderne i S er acyklisk, er $\chi'(G) \leq \Delta^*(G) - 1 = \Delta(G)$ iflg. Sætning 1.28. D.v.s. $\chi'(G) = \Delta(G)$. □

Det ses af grafen i figur 1.5, at det ikke er nok at antage, at delgrafen induceret af knuderne i S ikke indeholder *ulige* kredse. Grafen i figur 1.5 har $\Delta = 3$ og ingen ulige kredse, hvori alle knuder har valens 3, men grafen kan ikke farves med 3 farver.[2] Eksemplet er taget fra [4]. Et eksempel på, at det heller ikke er tilstrækkeligt at antage, at delgrafen induceret af knuderne i S ikke indeholder *lige* kredse, er en kreds med 3 kanter.

[2] I en ægte farvning af en graf med n knuder anvendes hver farve på højst $\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$ kanter. For grafen i figur 1.5 gælder derfor, at $\chi' \geq \lceil 10/3 \rceil = 4$.



Figur 1.5: Det er ikke nok at antage, at delgrafen i Sætning 1.28 og 1.29 ikke indeholder *ulige* kredse.



Figur 1.6: $\Delta^{**} = \Delta_{N_2} = 9$, Sætning 1.28: $\chi' \leq 8$, Sætning 1.30: $\chi' \leq 7$

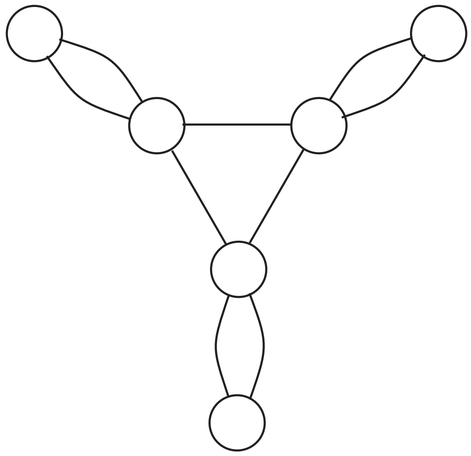
Det er let at forestille sig grafer, hvor Sætning 1.28 giver en bedre øvre grænse for χ' end både Sætning 1.16 (Δ^{**}) og Sætning 1.25 (Δ_{N_2}). Et simpelt eksempel er grafen i figur 1.6. Sætning 1.28 siger, at $\chi' \leq 8$, men $\Delta^{**} = \Delta_{N_2} = 9$. Det følger dog umiddelbart af Sætning 1.3, at $\chi' = 6$, men erstattes en af knuderne af to knuder med tre kanter imellem, kan Sætning 1.3 ikke længere bruges. Da er $\chi' = 7$, og resten af tallene er de samme.

På den anden side er det også let at forestille sig grafer, hvor Sætning 1.16 eller Sætning 1.25 giver en bedre øvre grænse end Sætning 1.28. Et eksempel på det første er grafen i figur 1.4, hvor $\Delta^{**} = 5$, og $\Delta^* - 1 = 6$. Et eksempel på det andet er grafen i figur 1.7. Her er $\Delta_{N_2} = 5 = \Delta^* - 1$, men $\{x \mid d^*(x) = \Delta^*\}$ er ikke acyklisk.

Nu følger en sætning, som er stærkere end Sætning 1.16 og Sætning 1.28 tilsammen. Den er en følge af sætningen i [4] (dette uddybes i afsnit 1.5).

Sætning 1.30 *Lad G være en multigraf, lad $k \geq \Delta(G) + 1$, og lad $S = \{x \in V(G) \mid d^*(x) \geq k\}$. Da gælder*

$$\begin{array}{l} \text{\textit{Delgrafen af G induceret af knuderne i S er acyklisk}} \\ \Downarrow \\ \chi'(G) \leq k - 1 \end{array}$$



Figur 1.7: $\chi' = 4$, $\Delta_N = \Delta_{N_2} = 5$, Sætning 1.30: $\chi' \leq 6$

I visse tilfælde giver Sætning 1.30 en dårligere øvre grænse for χ' end Sætning 1.20 (Δ_N). Se f.eks. grafen i figur 1.7. I andre tilfælde er Sætning 1.30 bedre end hver af de sætninger, som er udledt i dette afsnit. Et eksempel er grafen i figur 1.6 med en knude erstattet af to knuder med 3 kanter imellem.

1.2.4 Shannons Sætning

Den følgende sætning giver en øvre grænse for χ', som i modsætning til grænserne i de foregående afsnit udtrykkes udelukkende v.h.a. Δ.

Sætning 1.31 (Shannon, 1949) *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$$

Bevis Iflg. Sætning 1.25 er $\chi'(G) \leq \Delta_{N_2}$. D.v.s. for $\chi'(G) > \Delta(G)$ gælder

$$\begin{aligned}
\chi'(G) &\leq \max_{x \leftrightarrow y}\{\min\{d_{N_2}(x), d_{N_2}(y)\}\} \\
&\leq \max_{x \in V(G)}\{d_{N_2}(x)\} \\
&\leq \max_{x \in V(G)}\{\lfloor \frac{1}{2}(2 \max_{z \in N(x)}\{d(z)\} + d(x)) \rfloor\} \\
&\leq \lfloor \frac{1}{2}(\Delta(G) + \Delta(G) + \Delta(G)) \rfloor \\
&= \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor
\end{aligned}$$

$\square$

Shannons Sætning følger af Sætning 1.25, så $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor \geq \Delta_{N_2}$ for alle grafer. Til gengæld er $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ lettere at beregne end Δ_{N_2}. Der findes grafer, hvor $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor = \Delta_{N_2}$ (se f.eks. figur 1.6), og der findes grafer, hvor Shannons Sætning giver en bedre øvre grænse for χ' end samtlige andre sætninger i dette kapitel bortset fra Sætning 1.25. Et eksempel er figur 1.3 med $\Delta \geq 3$. Der findes også grafer, hvor Shannons Sætning giver en dårligere øvre grænse end alle andre sætninger udledt indtil nu i dette kapitel. Det er grafer, hvor μ er mindre end $\lfloor \frac{1}{2}\Delta \rfloor$.

Shannons Sætning er bedst mulig i den forstand, at der findes grafer, som ikke kan farves med færre end $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ farver. Det viser Sætning 1.32 og Sætning 1.33. Sætning 1.32 beskriver grafer med $\chi' = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$, hvor Δ er lige, og Sætning 1.33 beskriver grafer med $\chi' = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$, hvor Δ er ulige og mindst 5. Beviset for Sætning 1.32 benytter udelukkende principper udviklet i dette kapitel (Sætning 1.2 og Lemma 1.8), mens beviset for Sætning 1.33 tager et resultat fra kapitel 3 i brug.

Sætning 1.32 *For enhver multigraf G gælder, at*

$$\begin{aligned} & \chi'(G) = \frac{3}{2}\Delta(G), \ \textit{og } G \textit{ er sammenhængende} \\ \Updownarrow \quad & \\ & G \textit{ er en ulige kreds, eller} \\ & G \textit{ har netop 3 knuder, og hvert par af knuder er forbundet af } \Delta(G)/2 \textit{ kanter.} \end{aligned}$$

Bevis Det vises først, at enhver sammenhængende graf G med $\chi'(G) = \frac{3}{2}\Delta(G)$ er en ringgraf med et ulige antal knuder, hvor hvert par af naboknuder er forbundet af $\frac{1}{2}\Delta(G)$ kanter. Derefter vises det, at en sådan ringgraf R kan farves med færre end $\frac{3}{2}\Delta(R)$ farver, hvis og kun hvis $|V(R)| \geq 5$ og $\Delta(R) \geq 4$.

Antag, der eksisterer en sammenhængende graf G med $\chi'(G) = \frac{3}{2}\Delta(G)$. G har en kritisk delgraf H med $\chi'(H) = \chi'(G)$. Iflg. Sætning 1.31 er $\Delta(H) = \Delta(G)$. Da H er kritisk, er H sammenhængende.

Lad $\Delta = \Delta(H)$, $\mu = \mu(H)$, $\chi' = \chi'(H)$ og $k = \frac{3}{2}\Delta - 1$. For enhver kant $e \in E(H)$ gælder, at $H - e$ kan k-farves, men H kan ikke k-farves.

Da $\chi' > \Delta$, indeholder H iflg. Sætning 1.3 en ulige kreds. Hvis $\Delta = 2$, udgør denne kreds hele H, idet H er sammenhængende.

Antag nu, at $\Delta \geq 4$. Lad $e \in E(x,y)$ være en vilkårlig kant i H, og lad $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ være defineret som i Lemma 1.8. Da fås

$$\begin{array}{rl} & \sum_{i=1}^{m}(d(z_i) + \mu(x,z_i) - k) \geq 2 \\ \Downarrow & \\ & m\Delta + \Delta - mk \geq 2 \\ \Updownarrow & \\ & m\Delta + \Delta - m(\frac{3}{2}\Delta - 1) \geq 2 \\ \Updownarrow & \\ & \Delta - 2 \geq \frac{1}{2}m(\Delta - 2) \\ \Delta \geq 3 \Updownarrow & \\ & m \leq 2 \end{array}$$

Da H ikke kan k-farves, gælder på den anden side, at $m \geq 2$. D.v.s. $m = 2$. For $m = 2$ er $m\Delta + \Delta - mk = 2$. D.v.s.

$$\begin{array}{rl} & 2 = 2\Delta + \Delta - 2k \geq \sum_{i=1}^{2}(d(z_i) + \mu(x,z_i) - k) \geq 2 \\ \Downarrow & \\ & 2\Delta + \Delta - 2k = \sum_{i=1}^{2}(d(z_i) + \mu(x,z_i) - k) \\ \Downarrow & \\ & d(z_1) = d(z_2) = \Delta \ \wedge \ \mu(x,z_1) + \mu(x,z_2) = \Delta \end{array}$$

D.v.s. x har valens Δ og netop to naboer. Da x er en vilkårlig knude i H, har samtlige knuder i H netop to naboer og valens Δ. Den underliggende simple graf må derfor være en kreds C. Iflg. Sætning 1.3 er C ulige. Antag, at knuderne i C er $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i den nævnte rækkefølge. Nu undersøges antallet af kanter mellem hvert af de n nabopar.

$$\begin{array}{rll} & \mu(x_1,x_2) & = \Delta - \mu(x_n,x_1) \\ \Downarrow & \mu(x_2,x_3) = \Delta - \mu(x_1,x_2) & = \mu(x_n,x_1) \\ \Downarrow & \mu(x_3,x_4) = \Delta - \mu(x_2,x_3) & = \Delta - \mu(x_n,x_1) \\ \Downarrow & & \vdots \\ \Downarrow & \mu(x_{n-1},x_n) & = \mu(x_n,x_1), \text{ da } n \text{ er ulige} \\ \Downarrow & \mu(x_n,x_1) = \Delta - \mu(x_{n-1},x_n) & = \Delta - \mu(x_n,x_1) \end{array}$$

Af den sidste linie fås, at $\mu(x_n,x_1) = \Delta/2$. D.v.s. $\mu(x_n,x_1) = \mu(x_1,x_2) = \ldots = \mu(x_{n-1},x_n) = \Delta/2$

Da hver knude i H har valens $\Delta = \Delta(G)$, og G er sammenhængende, er $H = G$. Enhver sammenhængende graf G med $\chi'(G) = \frac{3}{2}\Delta(G)$ er altså en ringgraf med et ulige antal knuder, hvor hvert par af naboknuder er forbundet af $\Delta/2$ kanter.

Hvis G indeholder netop tre knuder, eller hvis $\Delta = 2$, ses det umiddelbart, at en ægte farvning af G kræver $\frac{3}{2}\Delta$ farver. Antag derfor, at G indeholder mindst 5 knuder, og at $\Delta \geq 4$. Af det følgende ses, at G da kan farves med færre end $\frac{3}{2}\Delta$ farver.

Lad $A = \{1, 2, \ldots, \mu\}$, $B = \{\mu+1, \mu+2, \ldots, 2\mu\}$, $C = \{1, 2\mu+1, 2\mu+2, \ldots, 3\mu-1\}$, $D = \{2, 3, \ldots, \mu+1\}$ og $E = \{2\mu, 2\mu+1, \ldots, 3\mu-1\}$ være mængder af farver.

En farvning φ af G er ægte, hvis

$\varphi(e) \in A$, hvis $e \in E(x_n, x_1)$,
$\varphi(e) \in B$, hvis $e \in E(x_1, x_2)$,
$\varphi(e) \in C$, hvis $e \in E(x_2, x_3)$,
$\varphi(e) \in D$, hvis $e \in E(x_i, x_{i+1})$ og $i \in \{3, 5, \ldots, n-2\}$ og
$\varphi(e) \in E$, hvis $e \in E(x_j, x_{j+1})$ og $j \in \{4, 6, \ldots, n-1\}$.

Da $|A| = |B| = |C| = |D| = |E| = \mu$, eksisterer en sådan farvning, og $|A \cup B \cup C \cup D \cup E| = 3\mu - 1 = \frac{3}{2}\Delta - 1$. □

Sætning 1.33 *For enhver multigraf G, hvor $\Delta(G)$ er ulige, gælder*

$$\chi'(G) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor, \text{ og } \Delta(G) \geq 5$$
$$\Downarrow$$
G indeholder en graf med netop 3 knuder.
Det ene par af knuder er forbundet af $\lceil \Delta(G)/2 \rceil$ kanter,
og de to andre par er hver især forbundet af $\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ kanter,

og

G indeholder en graf med netop 3 knuder.
Det ene par af knuder er forbundet af $\lceil \Delta(G)/2 \rceil$kanter,
og de to andre par er hver især forbundet af $\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ kanter
$$\Downarrow$$
$$\chi'(G) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor.$$

Bevis Lad $\chi' = \chi'(G)$ og $\Delta = \Delta(G)$. Antag, at Δ er ulige, og $\chi' = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$.

Sætning 3.15 siger, at hvis $\chi' > \frac{7}{6}\Delta + \frac{2}{3}$, da findes der en delgraf $H \subseteq G$, så

$$\chi' = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil.$$

For $\Delta \geq 5$ er betingelsen $\chi' > \frac{7}{6}\Delta + \frac{2}{3}$ opfyldt:

$$\begin{aligned} & \chi' > \frac{7}{6}\Delta + \frac{2}{3} \\ \Updownarrow\ & \\ & \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2} > \frac{7}{6}\Delta + \frac{2}{3} \\ \Updownarrow\ & \\ & 9\Delta - 3 > 7\Delta + 4 \\ \Updownarrow\ & \\ & 2\Delta > 7 \\ \Updownarrow\ & \\ & \Delta \geq 4 \end{aligned}$$

D.v.s. for $\Delta \geq 5$ har G en delgraf H, så $\chi' = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil$.

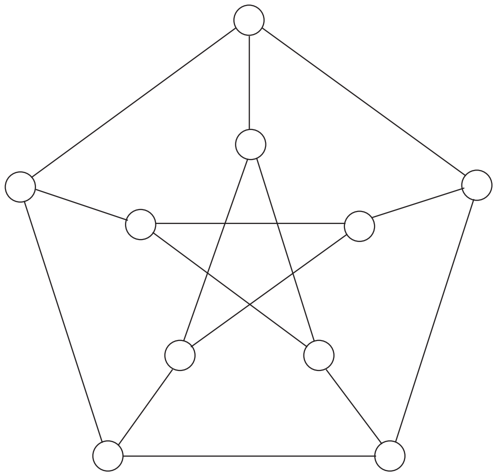
$$\begin{aligned}
& \chi' = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2} = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil \\
\Downarrow \quad & \\
& \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2} \leq \lceil \frac{\frac{1}{2}|V(H)|\,\Delta}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil, \text{ idet } |E(H)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in V(H)} d(x) \\
\Downarrow \quad & \\
& \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2} \leq \lceil \frac{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}{\lfloor \frac{1}{2}(2n+1) \rfloor} \rceil, \ n \in \mathbb{N} \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2} \leq \lceil \frac{n\Delta + \frac{1}{2}\Delta}{n} \rceil, \ n \in \mathbb{N} \\
\Downarrow \quad & \\
& \frac{3}{2}\Delta - \frac{3}{2} \leq \frac{n\Delta + \frac{1}{2}\Delta}{n}, \ n \in \mathbb{N} \\
\Updownarrow \quad & \\
& 3\Delta n - 3n \leq 2n\Delta + \Delta, \ n \in \mathbb{N} \\
\Updownarrow \quad & \\
& \Delta n - 3n \leq \Delta, \ n \in \mathbb{N} \\
\Updownarrow \quad & \\
& (\Delta - 3)n \leq \Delta, \ n \in \mathbb{N} \\
\Downarrow \quad & \\
& n \in \{1, 2\}, \text{ hvis } \Delta \geq 5, \text{ og} \\
& n = 1, \text{ hvis } \Delta \geq 7
\end{aligned}$$

D.v.s. hvis $\Delta = 5$, har H enten 3 eller 5 knuder, og hvis $\Delta \geq 7$, har H præcis 3 knuder. Hvis $\Delta = 5$, og $|V(H)| = 5$, da fås af Sætning 3.15, at

$$\begin{aligned}
& \chi' = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil \\
\Updownarrow \quad & \\
& \lfloor \frac{3}{2}\, 5 \rfloor = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}\, 5 \rfloor} \rceil \\
\Updownarrow \quad & \\
& 7 = \lceil \frac{1}{2} |E(H)| \rceil \\
\Updownarrow \quad & \\
& |E(H)| \in \{13, 14\}
\end{aligned}$$

Det betyder, at den gennemsnitlige valens for knuderne i H er mindst $\frac{2 \times 13}{5} = 5.2 > \Delta$, hvilket er umuligt. D.v.s. hvis $\Delta \geq 5$, da har H netop 3 knuder. Af Sætning 3.15 fås da

$$\begin{aligned}
& \chi' = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil \\
\Updownarrow \quad & \\
& \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor = \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}\, 3 \rfloor} \rceil \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2} = |E(H)|
\end{aligned}$$



Figur 1.8: Petersens graf

De $\frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2}$ kanter kan kun placeres som beskrevet i sætningen. Heraf følger første del af sætningen. En graf med 3 knuder og $\frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2}$ kanter kræver $\frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2}$ farver. Heraf følger anden del af sætningen. $\square$

For at opsummere bemærkes, at det umiddelbart følger af Sætning 1.32 og 1.33, at

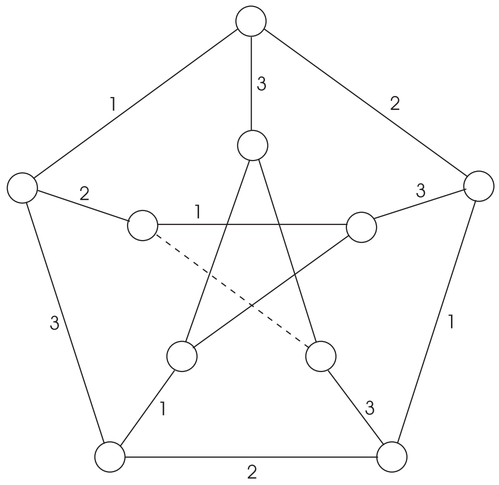
for en multigraf G med $\Delta(G) = 2$ gælder

$$\begin{array}{l} G \text{ er sammenhængende, og } \chi'(G) = 3 \\ \Updownarrow \\ G \text{ er en ulige kreds,} \end{array}$$

og for en multigraf G med $\Delta(G) \geq 4$ gælder

$$\begin{array}{l} G \text{ er kritisk, og } \chi'(G) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor \\ \Updownarrow \\ G \text{ har netop 3 knuder.} \\ \text{Det ene par af knuder er forbundet af } \lceil \Delta(G)/2 \rceil \text{ kanter,} \\ \text{og de to andre par er hver især forbundet af } \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor \text{ kanter.} \end{array}$$

For $\Delta = 3$ findes der forskellige typer af grafer med $\chi' = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor = 4$. Et eksempel er Petersens graf (figur 1.8). Petersens graf kan ikke farves med 3 farver: Der er essentielt kun én måde at farve den yderste kreds v.h.a. højst 3 farver (se figur 1.9). Det lader kun én måde tilbage at farvelægge de fem kanter mellem den inderste og den yderste kreds. Når man derefter vil farve kanterne i den inderste kreds, opstår der hurtigt en konflikt: den stiplede kant kan ikke farves uden at tage en fjerde farve i brug. Dermed er $\chi' = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor = 4$.



Figur 1.9: Petersens graf kan ikke farves med 3 farver.

Et andet eksempel på grafer med $\Delta = 3$ og $\chi' = 4$ er ringgrafer med et ulige antal knuder $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hvor $\mu(x_1, x_2) = \mu(x_3, x_4) = \ldots = \mu(x_n, x_1) = 1$, og $\mu(x_2, x_3) = \mu(x_4, x_5) = \ldots = \mu(x_{n-1}, x_n) = 2$. Grafen beskrevet i Sætning 1.33 er en sådan ringgraf med $n = 3$.

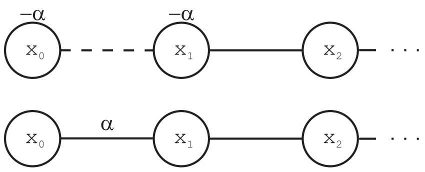
Det ses af ovenstående eksempler, at der ikke ligesom for $\Delta \geq 4$ kan eksistere en graf H med $\chi'(H) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \rfloor$, som er en delgraf af netop de grafer G, hvor $\Delta(G) = 3$, og $\chi'(G) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$. Det er i god overensstemmelse med Sætning 2.5, som siger, at det er NP-komplet at afgøre, om en graf med $\Delta = 3$ kan 3-farves. For en vilkårlig graf G kan man nemlig i tid polynomiel i størrelsen af G undersøge, om en given graf af konstant størrelse er indeholdt i G.[3] Så medmindre NP=P, kan den omtalte graf ikke eksistere.

Der findes grafer, hvor Sætning 1.31 sammen med Sætning 1.32 eller Sætning 1.33 giver en bedre øvre grænse for χ' end samtlige andre sætninger i dette kapitel. Et eksempel er en ringgraf med 5 knuder, hvor hvert par af naboknuder er forbundet af netop 2 kanter. For en sådan graf er $\Delta^{**} = \Delta_{N_2} = 6$, men af Sætning 1.31 og 1.32 fås, at $\chi' \leq 5$.

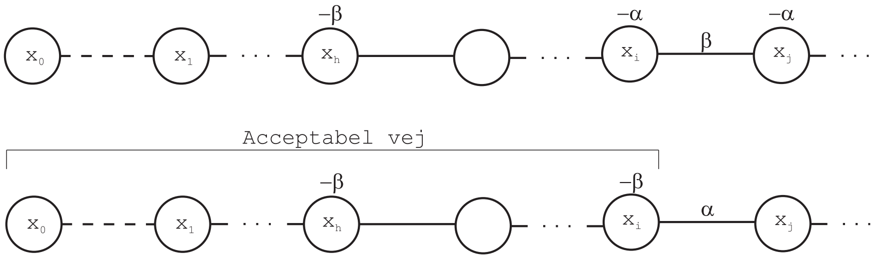
1.3 Acceptable veje

Definition 1.34 *Lad G være en multigraf med en kant e_1, og lad φ være en farvning af $G - e_1$. En acceptabel vej m.h.t. φ er en vej med kanter $e_1 \in E(x_0, x_1)$, $e_2 \in E(x_1, x_2)$, ..., $e_n \in E(x_{n-1}, x_n)$ i den nævnte rækkefølge, hvor der for $2 \leq j \leq n$ gælder, at $\exists i \leq j - 2 : \varphi(e_j) \in \overline{\varphi}(x_i)$.*

[3] Antag, at $|V(G)| = n$. Kald grafen af konstant størrelse H, og lad $k = |V(H)|$. For en given mængde $V \subseteq V(G)$ af størrelse k kan man i konstant tid afgøre, om delgrafen af G induceret af V er isomorf med H. Antallet af delmængder af $V(G)$ af størrelse k er lig $n!/(n-k)! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \leq n^k$. Dermed kan det i tid $O(n^k)$ afgøres, om H er en delgraf af G.



Figur 1.10: Basis, $i = 0, j = 1$: Den ufarvede kant inkluderes i farvningen.



Figur 1.11: $i \geq 1, j = i + 1$: j reduceres.

I en graf, hvor alle kanter undtagen én er farvede, er en acceptabel vej altså en vej, som starter med den ufarvede kant, og hvor farven på hver kant mangler ved en knude, der ligger tidligere i vejen. Det flg. lemma siger, at hvis farvningen anvender mindst $\Delta + 1$ farver, og der er to knuder i en acceptabel vej, som mangler den samme farve, da kan farvningen ændres til omfatte den ufarvede kant uden at tage en ekstra farve i brug.

Lemma 1.35 *Lad G være en multigraf med en kant e_1, lad φ være en k-farvning af $G - e_1$, hvor $k \geq \Delta(G) + 1$, og lad P være en acceptabel vej m.h.t. φ. Da gælder*

$$\left[\exists x_i, x_j \in P, i < j : \exists \alpha \in \overline{\varphi}(x_i) \cap \overline{\varphi}(x_j)\right] \Rightarrow G \textit{ kan } k\textit{-farves.}$$

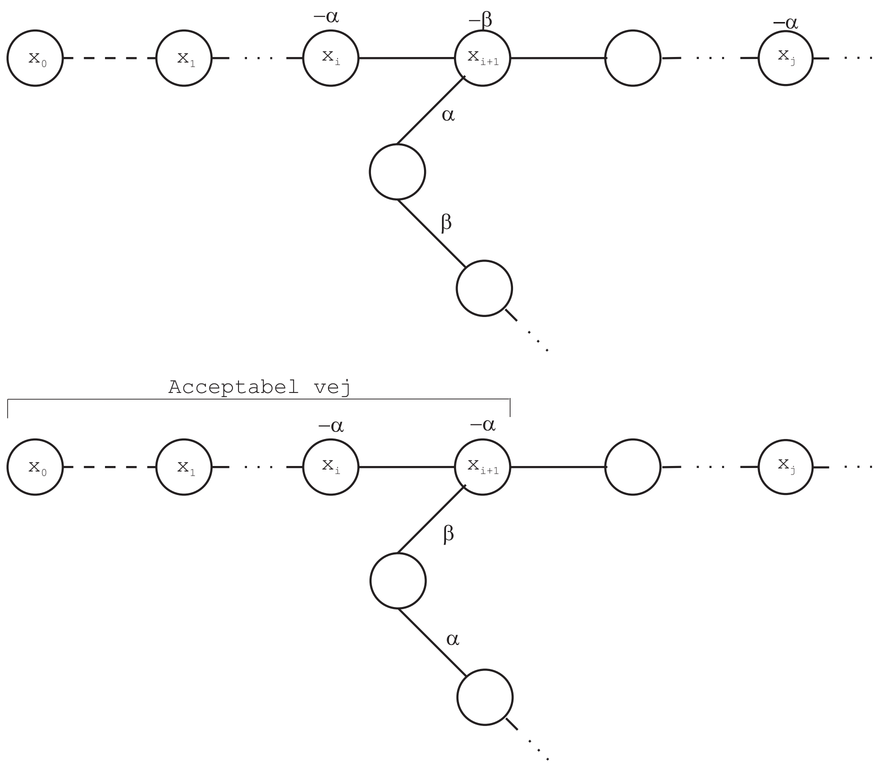
Bevis Beviset er ved dobbelt induktion over j og $j - i$.

Antag, at j og i er valgt mindst muligt, så $\exists \alpha \in \overline{\varphi}(x_i) \cap \overline{\varphi}(x_j)$, $i < j$.

$i = 0$, $j = 1$ (Basistilfælde): Ved at farve e_1 med α opnås en k-farvning af G. Se figur 1.10.

$i \geq 1$, $j = i + 1$: Lad $\beta = \varphi(e_j)$. Ved at omfarve e_j med α opnås en ny k-farvning φ' af $G - e_1$, hvor $\beta \in \overline{\varphi'}(x_i)$. Da P er acceptabel m.h.t. φ, eksisterer der et $h < i$, så $\beta \in \overline{\varphi}(x_h) = \overline{\varphi'}(x_h)$. D.v.s. $\beta \in \overline{\varphi'}(x_h) \cap \overline{\varphi'}(x_i)$, $h < i < j$, og delvejen af P fra x_0 til x_i er acceptabel m.h.t. φ'. Se figur 1.11.

$j \geq i + 2$: Da $k \geq \Delta(G) + 1$, findes der en farve $\beta \in \overline{\varphi}(x_{i+1})$. Hvis $\alpha = \beta$, kunne j være valgt mindre. D.v.s. $\alpha \neq \beta$. Lad P_{i+1} være den maksimale alternerende (α,β)-vej fra

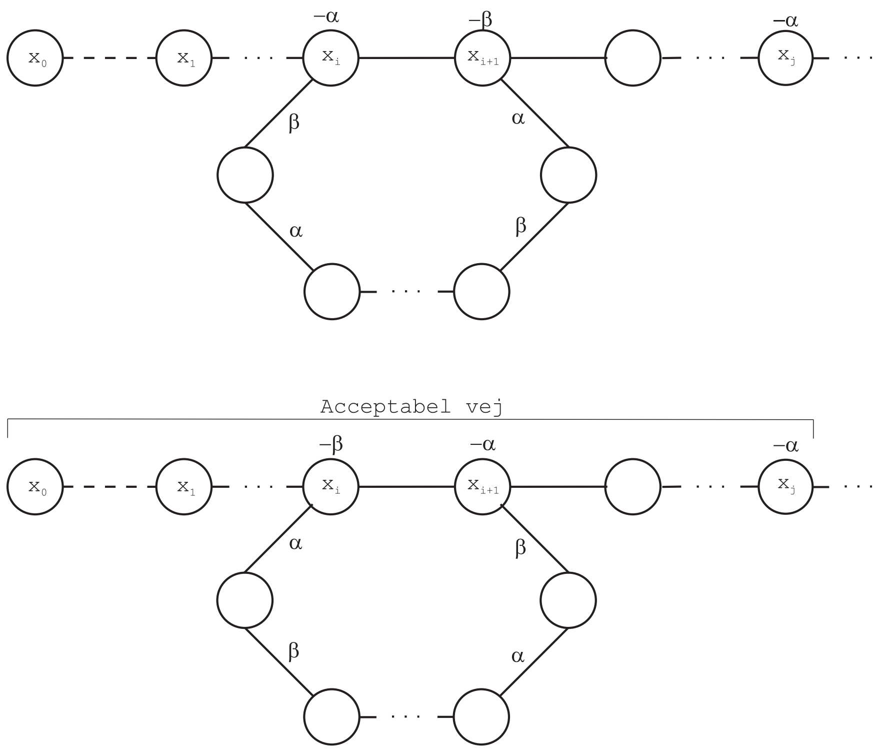


Figur 1.12: $j \geq i+2$, $x_i \notin P_{i+1}$: j reduceres.

x_{i+1}. Hvis P_{i+1} når x_i, vil den nå x_i langs en β-kant og slutte der, fordi ingen α-kant er incident med x_i. Det samme gælder for x_j. P_{i+1} kan altså ikke indeholde både x_i og x_j. Ved at ombytte α og β langs P_{i+1} opnår man derfor en ny k-farvning φ' af $G - e_1$, hvor α mangler ved både x_{i+1} og mindst én af knuderne x_i og x_j.

Hvis $x_i \notin P_{i+1}$ (figur 1.12), mangler α efter farveombytningen ved x_i og x_{i+1}, og delvejen af P fra x_0 til x_{i+1} er acceptabel m.h.t. φ' af flg. grunde. Der gælder, at $\alpha \in \varphi(x_h)$ for alle $h < i$, og $\beta \in \varphi(x_h)$ for alle $h \leq i$, for ellers kunne j være valgt mindre. Dermed kan P_{i+1} ikke slutte i en knude x_h med $h < i$. D.v.s. $\overline{\varphi'}(x_h) = \overline{\varphi}(x_h)$ for alle $h < i$. Da α og β er repræsenteret ved alle knuder x_h med $h < i$, gælder desuden, at $\alpha, \beta \neq \varphi(e_h)$ for alle $h \leq i+1$, fordi P er acceptabel m.h.t. φ. Det betyder, at $e_h \notin P_{i+1}$ for alle $h \leq i+1$, og dermed er $\varphi'(e_h) = \varphi(e_h)$ for alle $h \leq i+1$. Der gælder altså, at $\alpha \in \overline{\varphi'}(x_i) \cap \overline{\varphi'}(x_{i+1})$, $i+1 < j$, og delvejen af P fra x_0 til x_{i+1} er acceptabel m.h.t. φ'.

Hvis $x_i \in P_{i+1}$ (figur 1.13), mangler α efter farveombytningen ved x_{i+1} og x_j, og delvejen af P fra x_0 til x_j er acceptabel m.h.t. φ af flg. grunde. Som forklaret ovenfor er $\overline{\varphi'}(x_h) = \overline{\varphi}(x_h)$ for alle $h < i$, og $\varphi'(e_h) = \varphi(e_h)$ for alle $h \leq i+1$. Da $\beta \in \overline{\varphi'}(x_i)$, og $\alpha \in \overline{\varphi}(x_{i+1})$, har det ingen betydning, hvordan de resterende knuder og kanter i P er blevet påvirket af farveombytningen. D.v.s. j er uændret, og $j - i$ er blevet reduceret. $\square$



Figur 1.13: $j \geq i+2$, $x_i \in P_{i+1}$: $j-i$ reduceres, j er uændret.

Lemma 1.36 *Lad G være en multigraf med en kant e_1, lad $\Delta = \Delta(G)$, og lad φ være en k-farvning af $G - e_1$, hvor $k \geq \Delta + 1$. Lad P være en maksimal acceptabel vej m.h.t. φ med knuder $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i den nævnte rækkefølge. Da gælder*

$$G \text{ kan ikke } k\text{-farves} \;\Rightarrow\; \Big[\sum_{i=0}^{n-1} \mu(x_i, x_n) \geq n(k-\Delta)+2, \text{ og } n \geq 2\Big]$$

Bevis Antag, at G ikke kan k-farves.

Antag, at $n = 1$. Da P er maksimal, betyder det, at ingen af de farver, der er repræsenteret ved x_1, mangler ved x_0 — d.v.s. $\overline{\varphi}(x_0) \cap \varphi(x_1) = \emptyset$. Da $\overline{\varphi}(x_0) \neq \emptyset$, betyder det, at $\overline{\varphi}(x_0) \cap \overline{\varphi}(x_1) \neq \emptyset$, hvilket er i modstrid med Lemma 1.35. Altså er $n \geq 2$.

Iflg. Lemma 1.35 er $\overline{\varphi}(x_i) \cap \overline{\varphi}(x_j) = \emptyset$ for $i \neq j$, og

$$\begin{aligned}
& \overline{\varphi}(x_i) \cap \overline{\varphi}(x_j) = \emptyset \text{ for } i \neq j \\
\Downarrow\; & \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{\varphi}(x_i) \cap \overline{\varphi}(x_n) = \emptyset \\
\Downarrow\; & \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{\varphi}(x_i) \subseteq \varphi(x_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(x_i)| \geq (k-(d(x_0)-1)) + (k-(d(x_1)-1)) + \sum_{i=2}^{n-1}(k-d(x_i)), \text{ da } n \geq 2 \\
\Downarrow\ &|\bigcup_{i=0}^{n-1}\overline{\varphi}(x_i)| \geq n(k-\Delta)+2
\end{aligned}
$$

D.v.s. x_n har mindst $n(k-\Delta)+2$ kanter med en farve, som mangler ved en anden knude i P. Den ene kant deler x_n med x_{n-1}. Da P er maksimal, kan de $n(k-\Delta)+1$ andre kanter ikke inkluderes i P. Den eneste mulige forklaring på dette er, at x_n deler hver af disse kanter med en knude, der allerede er inkluderet i P. □

Det ses nu, at Vizings Sætning også kan bevises v.h.a. begrebet acceptabel vej.

Sætning 1.37 (Vizing) *For enhver multigraf G findes en ægte farvning af G, som anvender højst $\Delta(G)+\mu(G)$ farver.*

Bevis Lad $k=\Delta(G)+\mu(G)$. Antag til modstrid, at G ikke kan k-farves. G indeholder en delgraf H og en kant $e \in E(G)\setminus E(H)$, så H kan k-farves, og $H+e$ ikke kan k-farves. Iflg. Lemma 1.36 indeholder G derfor en vej med knuder $x_0, x_1, \ldots, x_n$, hvor $\sum_{i=0}^{n-1}\mu(x_i,x_n) \geq n(k-\Delta(G))+2 = n\mu(G)+2$. D.v.s. $\exists i, 0 \leq i \leq n-1 : \mu(x_i,x_n) \geq \mu(G)+1$, hvilket er i modstrid med, at $\mu(G)$ er den største multiplicitet i G. □

Der findes grafer, som ikke kan farves med færre end $\Delta+\mu$ farver. Det gælder f.eks. graferne beskrevet i Sætning 1.32. Grafer med et ulige antal knuder $2n+1$, hvor hvert par af knuder er forbundet med n kanter, kræver ligeledes $\Delta+\mu$ farver[4] iflg. [4].

Sætning 1.38 *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) = \Delta(G)+\mu(G) \;\Rightarrow\; G \textit{ indeholder en } \mu(G)\textit{-trekant.}$$

Bevis Lad $\Delta=\Delta(G)$, $\mu=\mu(G)$ og $k=\Delta+\mu-1$, og antag, at $\chi'(G)=\Delta(G)+\mu(G)$.

G kan ikke k-farves. Iflg. Lemma 1.36 indeholder G derfor en vej med knuder $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i den nævnte rækkefølge, hvor $\sum_{i=0}^{n-1}\mu(x_i,x_n) \geq n(k-\Delta)+2 = n(\mu-1)+2$. Opdel knuderne i

[4] I en ægte farvning kan hver farve højst anvendes på $\lfloor\frac{1}{2}|V|\rfloor$ kanter. De her beskrevne grafer er $2n^2$-regulære og har $\mu=n$. D.v.s.

$$\chi' \geq \lceil\frac{|E|}{\lfloor\frac{1}{2}|V|\rfloor}\rceil = \lceil\frac{\frac{1}{2}|V|\Delta}{\lfloor\frac{1}{2}|V|\rfloor}\rceil = \lceil\frac{\frac{1}{2}(2n+1)2n^2}{\lfloor\frac{1}{2}(2n+1)\rfloor}\rceil = \lceil\frac{2n^3+n^2}{n}\rceil = 2n^2+n = \Delta+\mu.$$

$P - x_n$ i nabopar. Hvis n er lige, opdeles knuderne i flg. par $(x_0, x_1), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1})$, og hvis n er ulige, opdeles knuderne på flg. måde $(x_0, x_1), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-3}, x_{n-2}), x_{n-1}$.

Hvis n er lige, vil hvert par i gennemsnit dele a kanter med x_n, hvor a opfylder

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2}a \geq n(\mu - 1) + 2 \\ \Downarrow \quad & \\ & a \geq 2(\mu - 1) + \frac{4}{n} = 2\mu - 2 + \frac{4}{n} \end{aligned}$$

Der må altså være et par (x_i, x_{i+1}), som deler mindst $2\mu - 1$ kanter med x_n. Disse kanter må være fordelt sådan, at $\mu(x_i, x_n) = \mu$ og $\mu(x_{i+1}, x_n) = \mu - 1$ eller $\mu(x_i, x_n) = \mu - 1$ og $\mu(x_{i+1}, x_n) = \mu$.

Hvis n er ulige, er $n \geq 3$ iflg. Lemma 1.36, og hvert af parrene $(x_0, x_1), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-3}, x_{n-2})$ deler i gennemsnit a kanter med x_n, hvor a opfylder

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{2}a + \mu \geq n(\mu - 1) + 2 \\ \Updownarrow \quad & \\ & \frac{n-1}{2}a \geq (n-1)(\mu - 1) + 1 \\ \Updownarrow \quad & \\ & a \geq 2(\mu - 1) + \frac{2}{n-1} = 2\mu - 2 + \frac{2}{n-1} \end{aligned}$$

Der må altså også i dette tilfælde være et par, som deler mindst $2\mu - 1$ kanter med x_n. $\square$

1.4 Algoritmiske betragtninger

Beviserne for, at en todelt graf kan Δ-farves, og at en simpel graf kan $(\Delta + 1)$-farves, er konstruktive. I dette afsnit beskrives kort, hvordan de kan omsættes til polynomielle algoritmer. I kapitel 6 beskrives mere indgående en polynomiel algoritme, som farver multigrafer med højst $\lfloor \frac{7}{6}\chi' + \frac{2}{3} \rfloor$ farver. Ligesom i kapitel 6 tænkes graferne repræsenteret v.h.a. adjacenslister.

1.4.1 Todelte grafer

Det fremgår direkte af beviset for Sætning 1.2, hvordan en todelt graf G kan farves kant for kant med $\Delta(G)$ farver v.h.a. flg. tre operationer.

- For et par af naboknuder at identificere en fælles manglende farve eller afgøre, at en sådan farve ikke findes.

- At finde en maksimal alternerende vej og ombytte farverne langs denne.
- At farve den aktuelle kant.

Det vises i afsnit 6.3.2, at de tre operationer kan udføres i tid $O(\Delta(G))$, $O(|V(G)|)$ og $O(1)$. Hver af de to operationer skal udføres højst $|E(G)|$ gange. Altså kan en todelt graf $G = (V, E)$ v.h.a. en simpel algoritme farves med Δ farver i tid $O(|E|(\Delta + |V|))$.

1.4.2 Simple grafer

For at farve en simpel graf med $\Delta+1$ farver har man udover de ovennævnte tre operationer brug for nogle vifteoperationer. De følgende tre operationer er tilstrækkelige.

- At opbygge en vifte.
- Blandt endepunkterne til kanterne i viften at identificere to knuder, som mangler den samme farve α. Da der anvendes $\Delta + 1$ farver, eksisterer disse to knuder iflg. Lemma 1.6 og 1.7 og Sætning 1.13. Lad Y være defineret som i Lemma 1.8. Hvis de to knuder begge tilhører Y, skal de vælges, så de er de første to forskellige knuder i Y, som mangler α.
- At omfarve en vifte som beskrevet i beviset for Lemma 1.6.

Viften repræsenteres af et træ. Hver knude i træet repræsenterer en kant i viften. Antag, at kanten $e \in E(x, y)$ skal farves, og at viften opbygges omkring x. Da indsættes som rod i træet en knude, som repræsenterer e. For hver af de kanter $e' \in E(x)$, som har en farve, der mangler ved y, indsættes som barn til roden en knude, som repræsenterer e'. På tilsvarende vis bygges næste niveau i træet, og sådan fortsættes, indtil viften ikke kan udvides yderligere.

For at gøre opbygningen af viften effektiv oprettes et array A af $\Delta + 1$ pointere. På plads nr. i i A indsættes en pointer til den kant incident med x, som har farven i, hvis en sådan kant eksisterer. Ellers indsættes en NIL-pointer. Hvis A opbygges ved først at indsætte en NIL-pointer på hver plads i A og derefter for hver kant e' i x's adjacensliste at indsætte en pointer til e' på det rigtige sted i A, kan det gøres i tid $O(\Delta)$.

Når man for en given knude v i træet skal afgøre hvilke kanter, der skal repræsenteres af v's børn, gøres følgende. Antag, at v repræsenterer kanten $e \in E(x, y')$. Der opbygges da et array $A_{y'}$ med $\Delta+1$ pladser, hvori der står 0 på pladser svarende til farver, der mangler ved y', og 1 på pladser svarende til farver, der er repræsenteret ved y'. $A_{y'}$ kan ligesom A opbygges i tid $O(\Delta)$. Nu løbes $A_{y'}$ igennem, og for hver plads i med et 0 oprettes en knude, som repræsenterer kanten, som $A[i]$ peger på, medmindre $A[i] = \text{NIL}$. Herefter sættes $A[i]$ lig NIL, så den samme kant ikke inkluderes flere gange. Dette kan gøres i tid $O(\Delta)$. Da viften indeholder højst Δ kanter, kan viften altså opbygges i tid $O(\Delta^2)$.

Når der skal foretages en omfarvning af viften som beskrevet i beviset for Lemma 1.6, udnyttes træstrukturen i repræsentationen af viften. Kanten e', hvis endepunkt $y' \neq x$ mangler den samme farve som x, er repræsenteret af en knude v i træet. For hver knude $u \neq v$ i stien fra v til roden i træet farves kanten repræsenteret af u med farven fra kanten repræsenteret af u's barn i stien. Træets dybde er højst Δ. Altså kan denne operation udføres i tid $O(\Delta)$.

En vifte indeholder højst Δ kanter. Iflg. afsnit 6.3.2 kan man derfor i tid $O(\Delta^2)$ identificere to endepunkter til kanter i viften, som mangler den samme farve.

Hver af de 6 operationer — de 3 i dette afsnit og de 3 i det foregående — skal udføres højst to gange pr. kant. Altså kan man i tid $O(|E|(|V| + \Delta^2))$ farve en simpel graf $G = (V, E)$ med højst $\Delta + 1$ farver.

Man kan evt. forbedre algoritmen en smule ved at starte med at anvende Δ farver og kun tage en ekstra farve i brug, hvis man på et tidspunkt kommer ud for, at intet par af endepunkter til kanter i viften mangler den samme farve.

1.5 Bemærkninger

Gennemgangen af de grundlæggende resultater i vifteafsnittet — d.v.s. Lemma 1.6 til 1.8 — svarer meget til fremstillingen i [2] og [3]. Jeg havde dog skrevet afsnit 1.2.1 bortset fra Sætning 1.25, da jeg blev opmærksom på disse artikler. Sætning 1.25 er inspireret af Theorem 1 i [3], men Lemma 1.6 til 1.8 er blevet til som en generalisering af beviset for Vizings Sætning for simple grafer, som findes i [18].

Sætning 1.16 er inspireret af sætningen i [1], som er en svagere udgave af Sætning 1.16. Sætningen i [1] siger, at hvis G er en multigraf, $D \geq \Delta(G)$, $t \geq \mu(x)$, og $S = \{x \in G \mid d(x) = D \wedge \mu(x) = t\}$ er uafhængig, da er $\chi'(G) \leq D + t - 1$. Sættes $D = \Delta(G) + 1$ eller $t = \mu(G) + 1$, er sætningen ækvivalent med Vizings Sætning. Sættes $D = \Delta(G)$ og $t = \mu(G)$, siger sætningen, at G kan farves med $\Delta(G) + \mu(G) - 1$ farver, hvis $S = \{x \in V(G) \mid d^*(x) = \Delta(G) + \mu(G)\}$ er uafhængig.

Sætning 1.30 er den eneste sætning i dette kapitel, som er formuleret uden bevis. Sætning 1.30 er en følge af sætningen i [4], som beskæftiger sig med farvninger, som ikke nødvendigvis er ægte, og som ikke nødvendigvis farver alle kanter i grafen. Lad G være en multigraf, lad $Y \subseteq V(G)$, lad $k > 0$, og lad $Y' = Y \cap \{x \in V(G) \mid k - \mu(x) < d(x) < k + \mu(x)\}$. Da siger sætningen, at hvis delgrafen af G induceret af knuderne i Y' er acyklisk, da kan G farves v.h.a. højst k farver, så alle kanter i $E(Y)$ er farvede, og ingen farve er dobbelt repræsenteret ved nogen knude i Y. For $k \geq \Delta(G) \geq 1$ er $d(x) < k + \mu(x)$ opfyldt for alle $x \in V(G)$. Det betyder, at hvis delgrafen af G induceret af knuderne i $Y' = \{x \in V(G) \mid k - \mu(x) < d(x)\} = \{x \in V(G) \mid d^*(x) > k\}$, hvor $k \geq \Delta(G)$, er acyklisk, da findes der en ægte farvning af G, som anvender k farver. I [5] bevises sætningen fra [4].

Kapitel 2

NP-komplethed

I dette kapitel vises, at medmindre NP=P, findes der ingen polynomiel algoritme, som farver enhver multigraf optimalt — d.v.s. med χ' farver. Det følger af Sætning 2.5, iflg. hvilken det er NP-hårdt at afgøre, om en 3-regulær simpel graf kan 3-farves. Beviset for Sætning 2.5 svarer til beviset for den tilsvarende sætning i [7].

Lad $A(G)$ være afgørelsesproblemet "Kan den 3-regulære simple graf G 3-farves?". I dette kapitel beskrives en polynomiel reduktion af det NP-komplette problem 3-SAT til problemet A. Det faktum, at 3-SAT kan reduceres polynomielt til A, betyder, at hvis der findes en polynomiel algoritme, som løser A, da findes der en polynomiel algoritme, som løser 3-SAT. Da 3-SAT er NP-komplet, medfører det pr. definition, at der findes polynomielle algoritmer til alle NP-problemer. D.v.s. NP=P.

I 3-SAT ser man på en boolsk formel ϕ med flg. opbygning

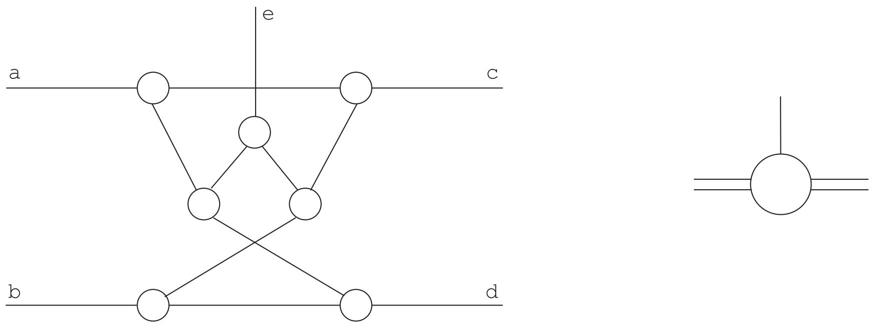
$$\begin{gathered}\phi(x_1, x_2, \dots x_n) = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee l_{1,3}) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee l_{2,3}) \wedge \dots \wedge (l_{m,1} \vee l_{m,2} \vee l_{m,3}), \\ l_{i,j} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le 3\end{gathered} \tag{2.1}$$

Hvert l er altså den negerede eller unegerede udgave af en af inputvariablerne $x_1, x_2, \dots, x_n$. Problemet består i at afgøre, om der findes en tildeling af logiske værdier til de variable $x_1, x_2, \dots, x_n$, så $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er sand.

Flg. lemma anvendes til at bevise, at problemet A er NP-hårdt.

Lemma 2.1 (Tutte) *Lad G være en graf, som kan 3-farves, og lad $V \subseteq V(G)$ være en delmængde (ægte eller uægte) af de knuder i G, som har valens 3. Lad $E = E(V, V(G) \backslash V)$, og lad for en given 3-farvning af G k_i betegne antallet af kanter i E, som er farvet med farven i. Da gælder*

$$k_i \equiv |V| \pmod 2,\ i \in \{1, 2, 3\}$$



Figur 2.1: Den negerende komponent og dens symbolske repræsentation.

Bevis Lad $E' = E(V)$, og lad k'_i betegne antallet af kanter i E', som er farvet med farven i. Da hver af de tre farver er repræsenteret netop én gang ved hver knude i V, er $|V| = 2k'_i + k_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. D.v.s. $|V| \equiv k_i \pmod 2$, $i \in \{1, 2, 3\}$. □

V.h.a. komponenterne i figur 2.1, 2.2 og 2.3 kan man for en vilkårlig boolsk funktion ϕ på samme form som ligning 2.1 konstruere en 3-regulær, simpel graf, som kan 3-farves, hvis og kun hvis der findes en tildeling af boolske værdier til de variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, så $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er sand. De enkelte komponenter "kommunikerer" med hinanden gennem par af kanter. Hvis de to kanter i et par tildeles den samme farve, repræsenterer de værdien sand, og ellers repræsenterer de falsk.

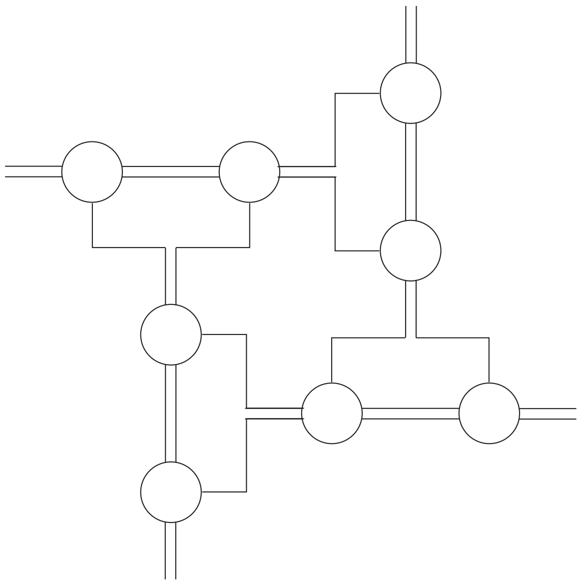
Komponenten i figur 2.1 kaldes en negeringskomponent. Opfattes a- og b-kanterne som en indgang og c- og d-kanterne som en udgang, vil komponenten negere den værdi, der findes på dens indgang.

Lemma 2.2 *En negeringskomponent kan 3-farves, og hvis den farves med 3 farver, gælder flg.*

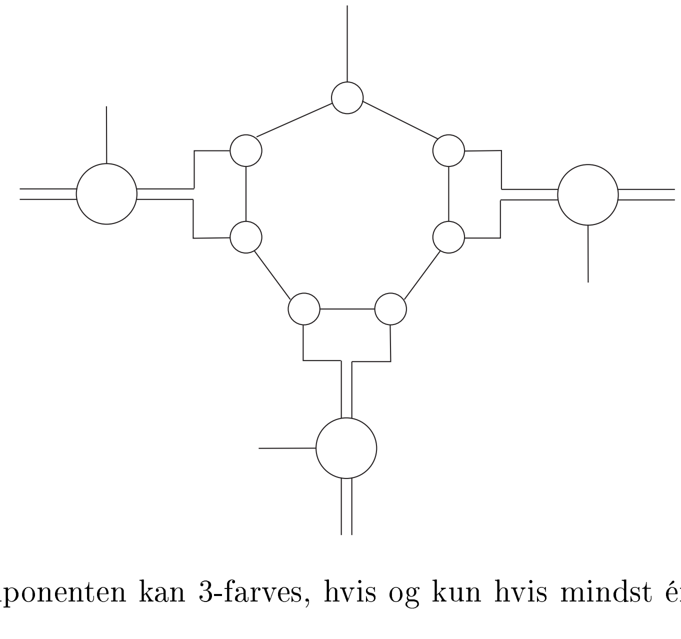
- *Kanterne a og b har den samme farve, hvis og kun hvis kanterne c og d er farvet forskelligt.*
- *Hvis kanterne a og b har den samme farve, vil c, d og e være farvet med 3 forskellige farver. Disse tre farver kan være vilkårligt fordelt på c, d og e.*

Bevis Figur 2.7 viser en 3-farvning af negeringskomponenten.

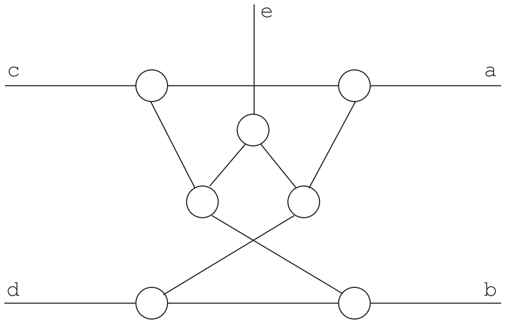
Lad V i Lemma 2.1 bestå af samtlige knuder i komponenten. Da $|V|$ er ulige, må en vilkårlig 3-farvning anvende hver af de tre farver et ulige antal gange på kanterne, som forlader V. D.v.s. den ene farve anvendes på tre af kanterne a, b, c, d og e, mens de to andre farver hver især anvendes på en af de to resterende kanter. Antag, det er farven 1, som anvendes på



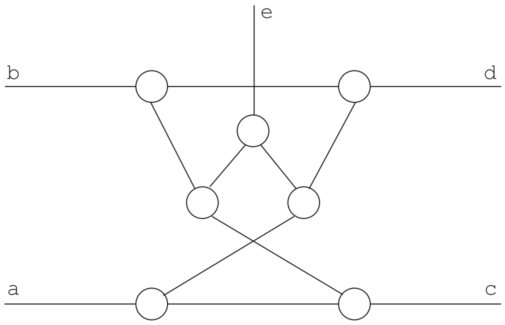
Figur 2.2: Komponenten svarende til en variabel, som optræder 4 gange (negeret eller unegeret) i den boolske formel. I en 3-farvning vil alle udgange i en sådan komponent repræsentere samme værdi. Der findes 3-farvninger af komponenten, hvor udgangene repræsenterer sand, og 3-farvninger, hvor udgangene falsk.



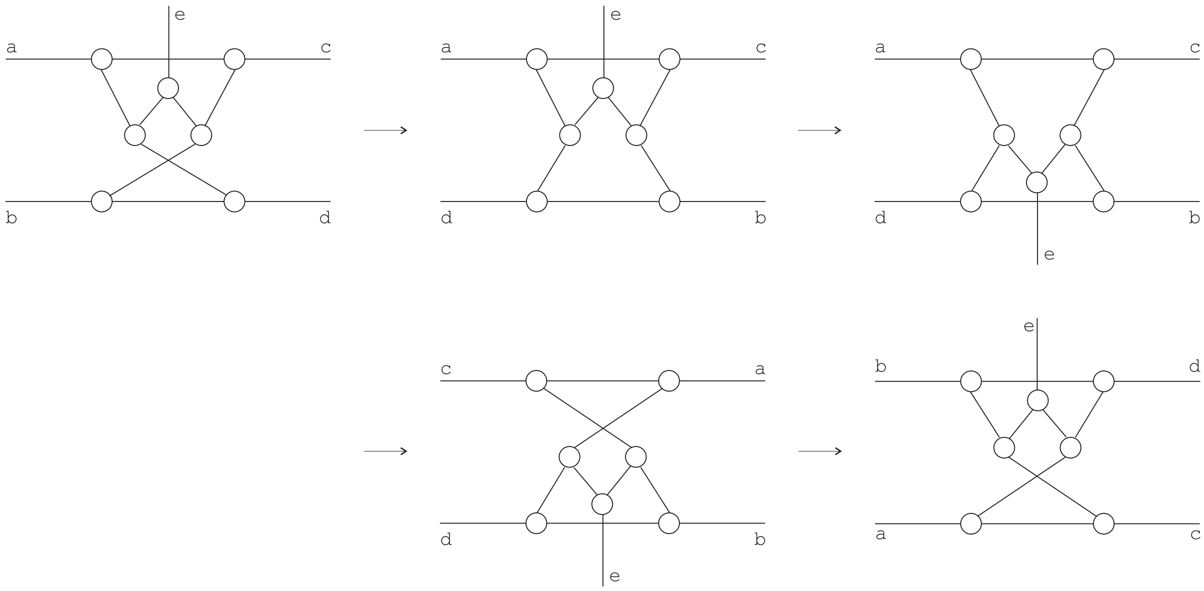
Figur 2.3: Ellerkomponenten kan 3-farves, hvis og kun hvis mindst én af de tre indgange repræsenterer sand.



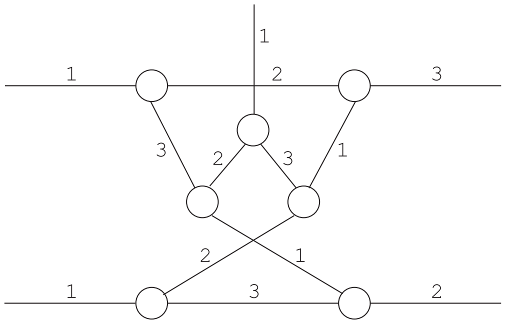
Figur 2.4: Sådan kan negeringskomponenten også tegnes ...



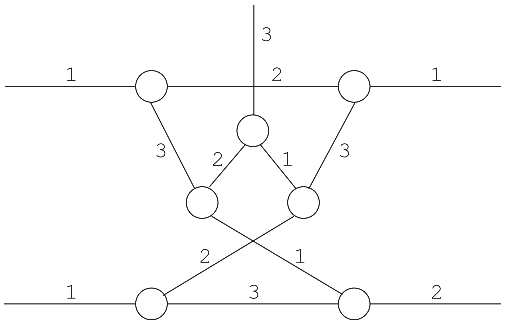
Figur 2.5: ... og sådan (se evt. figur 2.6).



Figur 2.6: Trinvis illustration af, at komponenten i figur 2.5 svarer til komponenten i figur 2.1. I det sidste trin drejes komponenten 180°.



Figur 2.7: Det tredje 1-tal kan placeres på e-kanten ...



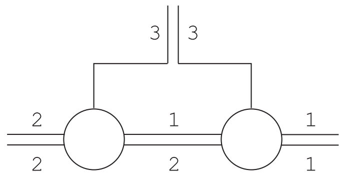
Figur 2.8: ... eller på c- eller d-kanten.

tre af kanterne. Indgangen og udgangen vil da repræsentere forskellige værdier, medmindre 1 er anvendt på e og (a eller b) og (c eller d). Af symmetrigrunde (komponenten kan også tegnes som vist i figur 2.4 og 2.5) svarer det til, at farven 1 er anvendt på a, e og c eller på a, e og d. Man kan let overbevise sig om, at i disse to tilfælde kan komponenten ikke farves v.h.a. kun tre farver. Har kanterne (a og b) eller (c og d) fået farven 1, er der til gengæld ingen begrænsninger på, hvordan farverne 1, 2 og 3 kan fordeles på de resterende tre kanter (se figur 2.7 og 2.8). □

Hvis en variabel optræder n gange i ϕ, hvor $n > 1$, repræsenteres den af n par af negeringskomponenter koblet i en kreds, som illustreret i figur 2.2. Denne konstruktion kaldes en variabelkomponent. De par af kanter, som forlader en variabelkomponent, opfattes som udgange.

Lemma 2.3 *For en variabelkomponent gælder flg.*

- *Hvis en variabelkomponent 3-farves, vil samtlige udgange repræsentere den samme boolske værdi.*



Figur 2.9: Hvis den ene negeringskomponents udgang repræsenterer sand, vil den anden negeringskomponents indgang og parret af e-kanter gøre det samme.

- *Der eksisterer 3-farvninger af komponenten, dels hvor udgangene repræsenterer sand, og dels hvor udgangene repræsenterer falsk.*

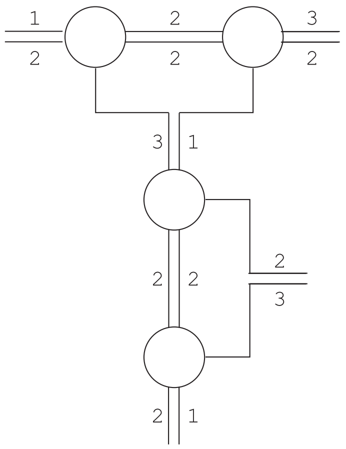
Bevis Iflg. Lemma 2.2 gælder følgende. Hvis udgangen i den ene negeringskomponent i et par for en given 3-farvning repræsenterer sand, vil den anden negeringskomponents indgang gøre det samme. De resterende 3 kanter i hver negeringskomponent vil derfor have hver sin farve. Det kunne f.eks. se ud som i figur 2.9. De to e-kanter må nødvendigvis have samme farve — de repræsenterer altså tilsammen sand. Da disse to kanter fungerer som indgang for det næste par i kredsen, vil dette næste pars udgang også repræsentere sand. Denne effekt breder sig på tilsvarende vis til resten af kredsen.

Det ses umiddelbart, at det faktisk ér muligt at 3-farve variabelkomponenten i denne situation, idet farven på parret af e-kanter kan vælges frit.

Hvis udgangen i den ene negeringskomponent i et par for en given 3-farvning repræsenterer falsk, vil den anden negeringskomponents indgang gøre det samme. Hvis de to e-kanter farves med den samme farve, vil udgangen i det næste par i kredsen repræsentere sand, og iflg. ovenstående argumentation vil det brede sig til resten af kredsen i modstrid med, at det første par repræsenterer falsk. Det er altså kun muligt at 3-farve, hvis de to e-kanter repræsenterer falsk. Dermed kommer det næste par også til at repræsentere falsk, og dette argument kan bruges på hele kredsen par for par.

Af Lemma 2.1 og det første punkt i Lemma 2.2 (det, der siger, at en negeringskomponent ér en negeringskomponent) fås, at en negeringskomponent ikke kan 3-farves, så parret af e-kanter får samme farvekombination som indgangen. Hvis indgangen i en negeringskomponent f.eks. er farvet med farverne 1 og 2, må e-kanten nødvendigvis have farven 3. Men, som det fremgår af figur 2.10, kan man 3-farve to par af negeringskomponenter, så indgangen i første par får samme farvekombination som e-kanterne i det andet par. Tilsvarende kan 3 par af negeringskomponenter 3-farves, så indgangen i første par har samme farvekombination som e-kanterne i det tredje par (se figur 2.11). Dermed kan en variabelkomponent 3-farves, så den repræsenterer falsk, hvadenten den svarer til en variabel, som optræder et lige eller et ulige antal gange i ϕ. □

For hver parentes i ϕ konstrueres en komponent som den i figur 2.3. Den kaldes en ellerkomponent, fordi den kan 3-farves, hvis og kun hvis mindst én af dens indgange repræsenterer



Figur 2.10: Hvis en variabel, hvis værdi er falsk, optræder et lige antal gange i ϕ, kan den tilsvarende variabelkomponent opbygges af komponenter som denne.

sand.

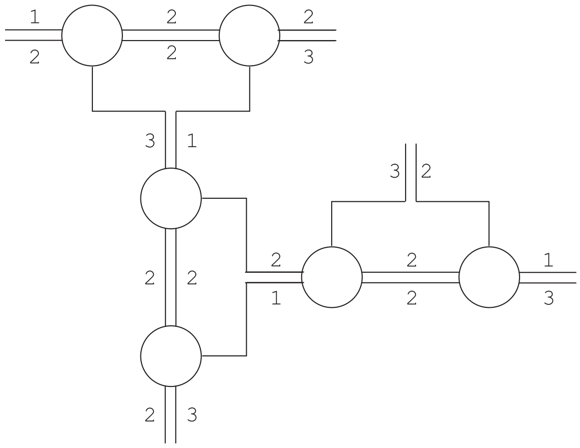
Hvis en variabel kun indgår én gang i ϕ, forbindes den tilsvarende indgang i ellerkomponenten ikke med noget (værdien af denne indgang kan vælges frit).

Hvis en variabel indgår mere end én gang i ϕ, forbindes udgangene i den tilsvarende variabelkomponent med indgange i de relevante ellerkomponenter — d.v.s. udgangskanterne i variabelkomponenten identificeres med indgangskanterne i ellerkomponenten. I de tilfælde, hvor en variabel optræder negeret i ϕ, indskydes en negeringskomponent mellem den tilsvarende variabelkomponentudgang og den relevante ellerkomponent.

Lemma 2.4 *Ellerkomponenten kan 3-farves, hvis og kun hvis mindst én af dens tre indgange repræsenterer sand.*

Bevis Af Lemma 2.1 fås, at i en vilkårlig 3-farvning vil mindst én indgang repræsentere sand: Lad V bestå af knuderne i 7-kredsen. Da fås for hver farve $i \in \{1, 2, 3\}$, at der blandt de 7 kanter, som forlader kredsen, er et ulige antal, som er farvet med farven i. Det betyder, at mindst ét af de par, som forlader kredsen må repræsentere falsk, og dermed må mindst én af indgangene repræsentere sand.

Ved at farve 5 ellerkomponenter — 2, hvor netop én indgang repræsenterer sand, 2 hvor netop to indgange repræsenterer sand, og 1, hvor alle tre indgange repræsenterer sand — kan man overbevise sig om, at enhver ellerkomponent kan 3-farves, hvis mindst én af dens indgange repræsenterer sand. Når disse 3-farvninger foretages, er følgende krav tilstrækkelige til, at de enkelte negeringskomponenter kan 3-farves. Hvis en indgang repræsenterer sand, farves de to kanter, der forbinder denne indgang med 7-kredsen, med to forskellige



Figur 2.11: Hvis en variabel, hvis værdi er falsk, optræder et ulige antal gange i ϕ, kan den tilsvarende variabelkomponent opbygges af en komponent som denne og evt. komponenter som den i figur 2.10.

farver. Hvis en indgang repræsenterer falsk, farves de to kanter, der forbinder indgangen med 7-kredsen, med den samme farve. □

Sætning 2.5 *Det er NP-komplet at afgøre, om en given 3-regulær, simpel graf kan 3-farves.*

Bevis Problemet tilhører NP, idet en 3-farvning af den givne graf vil udgøre et certifikat, hvis størrelse er polynomiel i størrelsen af G, og det kan i tid polynomiel i størrelsen af G kontrolleres, at farvningen er ægte, anvender præcis tre farver, og tildeler netop én farve til hver kant i G.

Det er NP-hårdt at bestemme, om en vilkårlig 3-regulær, simpel graf kan 3-farves, idet 3-SAT kan reduceres polynomielt til netop dette problem på flg. måde:

Ud fra den boolske funktion ϕ konstrueres, som beskrevet i det foregående, en komponent H bestående af variabelkomponenter, negeringskomponenter og ellerkomponenter. H kan iflg. Lemma 2.2, 2.3 og 2.4 3-farves, hvis og kun hvis der findes en tildeling af boolske værdier til de variable, så ϕ er sand. Men H indeholder nogle kanter, som mangler at blive forbundet til noget. Det løses ved at lave to kopier af H og for alle "løse" kanter at identificere de to, der svarer til hinanden. Den resulterende graf G kan 3-farves, hvis og kun hvis H kan 3-farves — d.v.s. hvis og kun hvis der findes en tildeling af boolske værdier til de variable, så ϕ er sand.

Størrelsen af G er polynomiel i størrelsen af ϕ. D.v.s. G kan konstrueres i tid polynomiel i størrelsen af ϕ. □

Korollar 2.6 *Medmindre P=NP, eksisterer der ingen polynomiel algoritme, som farver enhver multigraf G med* færre *end* $\frac{4}{3}\chi'(G)$ *farver.*

Bevis En algoritme, som farver en vilkårlig multigraf G med færre end $\frac{4}{3}\chi'(G)$ farver, vil farve enhver multigraf med kantkromatisk tal 3 med 3 farver. Hvis en sådan algoritme eksisterer, kan man altså i polynomiel tid afgøre, om en vilkårlig graf kan farves med 3 farver — man kan blot farve den og derefter tælle det antal farver, der er blevet brugt. Det er i modstrid med Sætning 2.5. $\square$

I kapitel 6 beskrives en polynomiel algoritme, som farver en vilkårlig graf G med højst $\lfloor\frac{7}{6}\chi'(G)+\frac{2}{3}\rfloor \leq \frac{4}{3}\chi'(G)$ farver. Algoritmen bygger på principper præsenteret i kapitel 3.

Kapitel 3

Goldbergs formodning

I det foregående afsnit blev det vist, at afgørelsesproblemet "Er k farver tilstrækkeligt til at farve grafen G?" tilhører klassen af NP-problemer, idet en k-farvning af G udgør et certifikat for svaret "ja". Det modsatte problem "Er k farver for lidt til at farve grafen G?" lader derimod ikke umiddelbart til at tilhøre NP.

I dette kapitel behandles en formodning fremsat af Goldberg. Hvis Goldbergs formodning er sand, eksisterer der for enhver graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ et certifikat for, at $k < \chi'(G)$, hvis $k < \chi'(G)$ er sandt, og for en graf G med $\chi'(G) = \Delta(G)$ vil en knude med maksimumvalens udgøre et sådant certifikat. D.v.s. hvis Goldbergs formodning er sand, vil der for alle grafer G med $\chi'(G) \neq \Delta(G) + 1$ findes et certifikat for, at $k < \chi'(G)$, hvis $k < \chi'(G)$ er sandt.

I dette kapitel bevises en svagere udgave af Goldbergs formodning, og beviset danner grundlag for den polynomielle algoritme i kapitel 6, som farver en vilkårlig multigraf med $\max\{\chi', \lfloor \frac{7}{6}\Delta + \frac{2}{3} \rfloor\}$ farver.

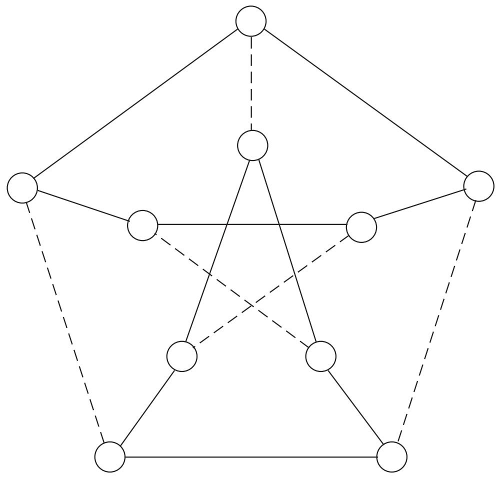
3.1 Goldbergs formodning

Hvis $M(G)$ betegner det maksimale antal kanter i en pardannelse i en graf G, kan en enkelt farve anvendes på højst $M(G)$ kanter i G. Hvis $E(G) \neq \emptyset$, er det derfor klart, at

$$\chi'(G) \geq \max_{H \subseteq G, |E(H)| \geq 1} \{\lceil \frac{|E(H)|}{M(H)} \rceil\}$$

Da $M(G) \leq \lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor$, gælder der ligeledes, at

$$\chi'(G) \geq \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 2} \{\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil\},$$



Figur 3.1: Petersens graf indeholder fem perfekte pardannelser som denne.

hvis $|V(G)| \geq 2$. D.v.s. en delgraf $H \subseteq G$ med $\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil = k$ er et certifikat for, at $\chi'(G) \geq k$.

Definition 3.1 *For en multigraf G er $w(G)$ defineret på flg. måde*

$$w(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 2} \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil, \text{ hvis } |V(G)| \geq 2$$
$$w(G) = 0, \text{ ellers.}$$

Iflg. ovenstående opfylder enhver multigraf G, at

$$\chi'(G) \geq w(G)$$

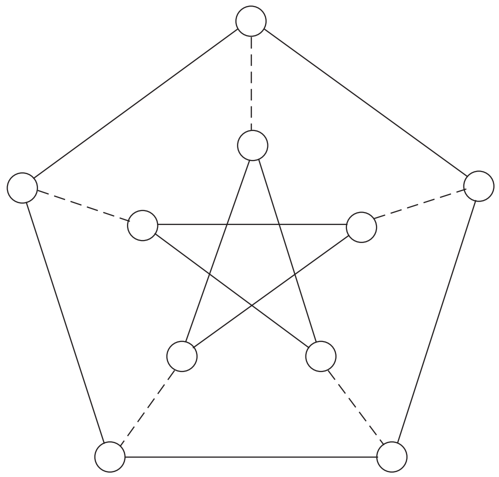
Formodning 3.2 (Goldberg) *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2 \ \Rightarrow \ \chi'(G) = w(G)$$

Hvis Goldbergs formodning er sand, er den bedst mulig. D.v.s. der findes grafer med $\chi' = \Delta + 1$, hvor $\chi' > w$. Et eksempel er Petersens graf (figur 1.8), hvor $\Delta = 3$ og $\chi' = 4$, mens det ses af det følgende, at $w = 3$.

Kald Petersens graf G_P. Da gælder, at

$$w(G_P) \geq \lceil \frac{|E(G_P)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G_P)| \rfloor} \rceil = \lceil \frac{15}{\lfloor \frac{1}{2} \times 10 \rfloor} \rceil = 3$$



Figur 3.2: Den sjette perfekte pardannelse.

På den anden side er $w(G_P) \leq 3$. Det ses af det følgende.

Petersens graf indeholder 5 perfekte pardannelser, som hver indeholder en af de fem kanter, der forbinder den inderste kreds med den yderste, og to kanter fra hver af disse to kredse (en sådan pardannelse er markeret med stiplede linier i figur 3.1). Derudover indeholder grafen 1 perfekt pardannelse, som består af de fem kanter, som forbinder den inderste kreds med den yderste (denne pardannelse er markeret med stiplede linier i figur 3.2). Kald disse 6 perfekte pardannelser $M_1, M_2, \ldots, M_6$. Hver kant i G_P er indeholdt i netop 2 af pardannelserne $M_1, M_2, \ldots, M_6$. Det betyder for enhver delgraf $H \subseteq G_P$, at

$$\sum_{i=1}^{6} |E(H) \cap E(M_i)| = 2|E(H)|$$

Da en pardannelse indeholder højst halvt så mange kanter som knuder, gælder der desuden, at

$$|E(H) \cap E(M_i)| \leq \lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor \text{ for } 1 \leq i \leq 6$$

D.v.s. for alle $H \subseteq G_P$ gælder

$$\begin{aligned} & 2\,|E(H)| \leq 6\,\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor \\ \Updownarrow\; & \\ & \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \leq 3 \\ \Updownarrow\; & \\ & \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil \leq 3 \end{aligned}$$

Dermed er $w(G_P) \leq 3$.

Goldbergs formodning er ikke blevet eftervist, men udsagnet

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \;\Rightarrow\; \chi'(G) = w(G) \tag{3.1}$$

er blevet bevist for $m = 3, 5, 7, 9, 11$ (for $m = 3$ følger udsagnet direkte af Shannons Sætning (Sætning 1.31)). Der gælder, at

$$\frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \to \Delta(G) + 1 \quad \text{for } m \to \infty$$

D.v.s. et bevis for, at (3.1) er sand for enhver værdi af m, ville være et bevis for Goldbergs formodning.

De beviste udsagn er alle svagere end Goldbergs formodning, idet der for ethvert $\Delta(G)$ og ethvert $m \geq 2$ gælder, at

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \;\Rightarrow\; \chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$$

(se Lemma 3.12), mens det modsatte

$$\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2 \;\Rightarrow\; \chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1}$$

gælder, hvis og kun hvis $m \geq \Delta(G)$ (se Lemma 4.10). Det er altså bevist, at Goldbergs formodning er sand for $\Delta(G) \leq 11$.

3.2 En svagere udgave af Goldbergs formodning

I dette afsnit bevises (3.1) med $m = 7$ (Sætning 3.15).

Lemma 3.3 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x, y)$, og lad φ være en k-farvning af $G - e$, hvor $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$ og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$. Da gælder*

G kan ikke k-farves $\Rightarrow$ den maksimale alternerende (α,β)-vej fra x ender i y

Bevis Se beviset for Lemma 1.2. □

Definition 3.4 *Lad G være en multigraf med en kritisk kant $e \in E(x,y)$, og lad φ være en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$. Lad $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$ og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$.*

Den maksimale alternerende (α,β)-vej fra x kaldes en forbindelseskæde, *fordi den forbinder x og y. $K_{\alpha\beta}$ bruges til at betegne både vejen og knuderne i vejen.*

Lad k være antallet af knuder i den længste forbindelseskæde m.h.t. φ, d.v.s.

$$k = \max_{\alpha\in\overline{\varphi}(x),\,\beta\in\overline{\varphi}(y)} \{|K_{\alpha\beta}|\}.$$

Hvis G er kritisk, da er k_{max} defineret som den maksimale værdi af k for alle kanter $e \in E(G)$ og alle $(\chi'(G)-1)$-farvninger af $G-e$.

Lemma 3.5 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x,y)$. Lad $k \geq \Delta(G)+1$, og lad φ være en k-farvning af $G-e$, hvor $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$ og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$. Da gælder*

$$G \text{ kan ikke } k\text{-farves} \;\Rightarrow\; \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v) = \emptyset \text{ for alle } u,v \in K_{\alpha\beta}$$

Bevis Antag til modstrid, at G ikke kan k-farves, og at der eksisterer to knuder $u,v \in K_{\alpha\beta}$ og en farve γ, så $\gamma \in \overline{\varphi}(u)\cap\overline{\varphi}(v)$. Da γ mangler ved både u og v, er $\gamma \neq \alpha,\beta$, idet $\alpha \in \varphi(y)$, $\beta \in \varphi(x)$ og $\alpha,\beta \in \varphi(z)$ for alle $z \in K_{\alpha\beta} \setminus \{x,y\}$.

Beviset er ved induktion over afstanden mellem u og v i $K_{\alpha\beta}$.

Antag som basis, at u og v er naboer i $K_{\alpha\beta}$. Da kan kanten mellem u og v i $K_{\alpha\beta}$ omfarves med γ, hvorefter $K_{\alpha\beta}$ slutter i u i modstrid med Lemma 3.3.

Antag nu, at u og v ikke er naboer i $K_{\alpha\beta}$, og at der ikke findes nogen knude mellem u og v i $K_{\alpha\beta}$, som mangler γ. Nu vælges en knude z, som ligger imellem u og v i $K_{\alpha\beta}$. Da $k \geq \Delta(G)+1$, findes der en farve $\delta \in \overline{\varphi}(z)$, $z \neq \alpha,\beta,\gamma$. Den maksimale alternerende (γ,δ)-vej fra z kan ikke ende i både u og v, så ved at ombytte γ og δ langs vejen opnås, at γ mangler ved både z og mindst én af knuderne u og v. Dermed er afstanden mellem de to knuder, som mangler γ, blevet reduceret. □

Som et korollar af Lemma 3.5 fås

Korollar 3.6 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x,y)$, og lad φ være en k-farvning af $G-e$, hvor $k \geq \Delta(G)+1$. Lad $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$ og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$, lad $u,v \in K_{\alpha\beta}$, og lad $\gamma \in \overline{\varphi}(u)$ og $\delta \in \overline{\varphi}(v)$, hvor γ og δ begge er forskellige fra både α og β. Da gælder*

$$G \text{ kan ikke } k\text{-farves} \;\Rightarrow\; \text{den maksimale alternerende } (\gamma,\delta)\text{-vej fra } u \text{ slutter i } v$$

Bevis Antag, at G ikke kan k-farves. Hvis den maksimale alternerende (γ,δ)-vej fra u *ikke* ender i v, kan man ved at ombytte γ og δ langs vejen opnå, at $\delta \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)$. Da u og v stadig begge tilhører $K_{\alpha\beta}$, er dette i modstrid med Lemma 3.5. □

Definition 3.7 *Lad G være en multigraf med en kritisk kant $e \in E(x,y)$, og lad φ være en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$. Da betegner K_φ mængden af knuder givet ved*

$$K_\varphi = \bigcup_{\alpha \in \overline{\varphi}(x),\, \beta \in \overline{\varphi}(y)} K_{\alpha\beta}.$$

Hvis G er kritisk, da er K_{max} defineret som den maksimale værdi af $|K_\varphi|$ for alle kanter $e \in E(G)$ og alle $(\chi'(G)-1)$-farvninger φ af $G-e$.

Lemma 3.8 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x,y)$, og lad φ være en k-farvning af $G-e$, hvor $k \geq \Delta(G)+1$. Da gælder*

$$G \text{ kan ikke } k\text{-farves} \;\Rightarrow\; \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v) = \emptyset \text{ for alle } u, v \in K_\varphi$$

Bevis Antag til modstrid, at G ikke kan k-farves, og at der findes to knuder $u \in K_{\alpha\beta}$ og $v \in K_{\gamma\delta}$ og en farve $\xi \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)$. Iflg. Lemma 3.5 er $\xi \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Lad s betegne x's nabo i $K_{\alpha\beta}$, og lad t betegne x's nabo i $K_{\gamma\delta}$. Nu opnås, at $\xi \in \overline{\varphi}(s) \cap \overline{\varphi}(t)$ på flg. måde. Hvis $u = s$, mangler ξ allerede ved s. Antag derfor, at $u \neq s$. Da $k \geq \Delta(G)+1$, eksisterer der en farve $\varepsilon \in \overline{\varphi}(s)$. Iflg. Lemma 3.5 er $\varepsilon \neq \xi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, og den maksimale alternerende (ξ,ε)-vej fra u ender iflg. korollar 3.6 i s. Ved at ombytte ξ og ε langs denne vej opnås, at ξ mangler ved s. Heraf fås, at $s \neq t$, da $s = t \Rightarrow s \in K_{\gamma\delta}$, hvilket er i modstrid med Lemma 3.5, idet der nu gælder, at $\xi \in \overline{\varphi}(s) \cap \overline{\varphi}(v)$. På tilsvarende vis opnås nu, at ξ mangler ved t. Den maksimale alternerende (α,ξ)-vej fra x kan ikke ende i både s og t. Antag uden tab af generalitet, at den maksimale alternerende (α,ξ)-vej fra x ikke ender i s. Ved at ombytte farverne langs denne vej opnås da, at $\xi \in \overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(s)$, hvorefter β-kanten mellem x og s kan farves med ξ. Nu haves $\beta \in \overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y)$, hvilket er i modstrid med, at G ikke kan k-farves. □

Lemma 3.9 *Lad G være en multigraf med en kritisk kant $e \in E(x,y)$. Antag, at $\chi'(G) \geq \Delta(G)+2$, og lad φ være en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$. Lad $V \subseteq V(G)$ være en mængde af knuder, som indeholder x og y, og hvorom der gælder, at $\overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v) = \emptyset$ for alle $u, v \in V$. Da gælder*

$$|V| \leq \frac{\chi'(G)-3}{\chi'(G)-\Delta(G)-1}$$

Bevis Der er $\chi'(G)-1$ farver, og hver farve mangler ved højst én knude i V. Der mangler mindst $\chi'(G)-1-\Delta(G)+1=\chi'(G)-\Delta(G)$ farver ved hver af x og y, og ved hver af de andre knuder i V mangler der mindst $\chi'(G)-1-\Delta(G)$ farver. D.v.s. $|V|(\chi'(G)-\Delta(G)-1)+2 \leq \chi'(G)-1$.

$$\begin{aligned} & |V|(\chi'(G)-\Delta(G)-1)+2 \;\leq\; \chi'(G)-1 \\ \Updownarrow \quad & \\ & |V| \;\leq\; \frac{\chi'(G)-3}{\chi'(G)-\Delta(G)-1}, \text{ da } \chi'(G) > \Delta(G)+1 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.10 *Lad for $\chi' \geq \Delta+2$ funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ være defineret ved*

$$f(\chi') = \frac{\chi'-3}{\chi'-\Delta-1}.$$

For $\Delta \geq 3$ er f monotont faldende.

Bevis

$$\frac{df}{d\chi'} = \frac{(\chi'-\Delta-1)-(\chi'-3)}{(\chi'-\Delta-1)^2} = \frac{2-\Delta}{(\chi'-\Delta-1)^2} < 0, \text{ for } \Delta \geq 3$$

□

Lemma 3.11 *For enhver multigraf G og ethvert $m \neq 1$ gælder*

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \quad \Rightarrow \quad \Delta(G) \geq 3.$$

Bevis For en graf G med maksimumvalens $\Delta(G)=1$ er $\chi'(G)=1$, og for en multigraf G med $\Delta(G)=2$ er $\chi'(G) \leq 3$.

Indsættes $\Delta(G)=1$ og $\Delta(G)=2$ i uligheden $\chi' > \frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1}$, fås

$$\begin{aligned} \Delta(G)=1: \;& \chi'(G) > \frac{2m-3}{m-1} = \frac{m-1}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} = 1 + \frac{m-2}{m-1} \geq 1, \text{ for } m \neq 1 \\ \Delta(G)=2: \;& \chi'(G) > \frac{3m-3}{m-1} = 3, \text{ for } m \neq 1 \end{aligned}$$

Ingen af delene kan lade sig gøre. Heraf følger lemmaet. □

Lemma 3.12 *For enhver multigraf G og ethvert $m \geq 2$ gælder*

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \quad \Rightarrow \quad \chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$$

Bevis For ethvert $m \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} & \chi' > \frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1} \quad = \Delta + \frac{1}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1} \\ 3.11 \Downarrow \quad & \\ & \chi' > \Delta + \frac{3}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} = \Delta + 1 + \frac{1}{m-1} \\ \Downarrow \quad & \\ & \chi' \geq \Delta + 2 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.13 *Lad G være en multigraf med $\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1}$. Lad $e \in E(x,y)$ være en kritisk kant i G, og lad φ være en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$. Lad $V \subseteq V(G)$ være en mængde af knuder, som indeholder x og y, og hvorom der gælder, at $\overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v) = \emptyset$ for alle $u, v \in V$. Da gælder for ethvert $m \geq 2$, at*

$$|V| < m$$

Bevis Iflg. Lemma 3.12 er $\chi'(G) \geq \Delta + 2$ for $m \geq 2$. For $m \geq 2$ gælder derfor flg.

$$\begin{aligned} |V| \quad & \overset{3.9}{\leq} \quad \frac{\chi'(G) - 3}{\chi'(G) - \Delta(G) - 1} \\ & \overset{3.10+3.11}{<} \quad \frac{m\Delta(G) + m - 3 - 3(m-1)}{m\Delta(G) + m - 3 - (\Delta(G)+1)(m-1)} \\ & = \quad \frac{m(\Delta(G) - 2)}{\Delta(G) - 2} \\ & = \quad m \end{aligned}$$

□

Lemma 3.14 *Lad $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ være en monotont voksende funktion. Da gælder*

$$\begin{aligned} & \chi'(G) = w(G) \text{ for alle kritiske multigrafer } G \text{ med } \chi'(G) > f(\Delta(G)) \\ \Downarrow \quad & \\ & \chi'(G) = w(G) \text{ for alle multigrafer } G \text{ med } \chi'(G) > f(\Delta(G)) \text{ og } \chi'(G) \geq \Delta(G) + 1 \end{aligned}$$

Bevis Enhver multigraf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 1$ har en kritisk delgraf H med $\chi'(H) = \chi'(G)$. Da $\Delta(H) \leq \Delta(G)$, er $f(\Delta(H)) \leq f(\Delta(G))$. D.v.s. $\chi'(G) > f(\Delta(G)) \Rightarrow \chi'(H) > f(\Delta(H))$. Da $\chi'(G) \geq w(G) \geq w(H)$ gælder flg.

$$\begin{aligned}
& \chi'(H) = w(H) \\
\Updownarrow\ & \\
& \chi'(G) \geq w(G) \geq w(H) = \chi'(H) = \chi'(G) \\
\Downarrow\ & \\
& \chi'(G) \geq w(G) \geq \chi'(G) \\
\Updownarrow\ & \\
& \chi'(G) = w(G)
\end{aligned}$$

□

Sætning 3.15 *For enhver multigraf G gælder*

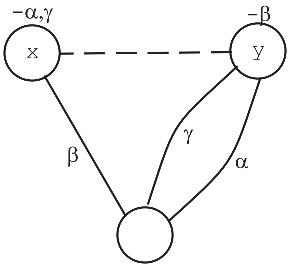
$$\chi'(G) > \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3} \ \Rightarrow\ \chi'(G) = w(G)$$

Bevis Iflg. Lemma 3.14 er det tilstrækkeligt at bevise sætningen for kritiske grafer. Antag derfor, at G er kritisk, og $\chi'(G) > \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3}$. Iflg. Lemma 3.12 er $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$. Af Lemma 3.5 og 3.13 fås derfor, at $k_{max} < 7$, og af Lemma 3.8 og 3.13, at $K_{max} < 7$. k_{max} må være ulige, for den første og sidste kant i en forbindelseskæde har forskellige farver, så enhver forbindelseskæde har et lige antal kanter og dermed et ulige antal knuder. Det betyder, at $k_{max} = 3$ eller $k_{max} = 5$. For begge tilfælde vises flg. to punkter, hvoraf det første bruges til at bevise det andet:

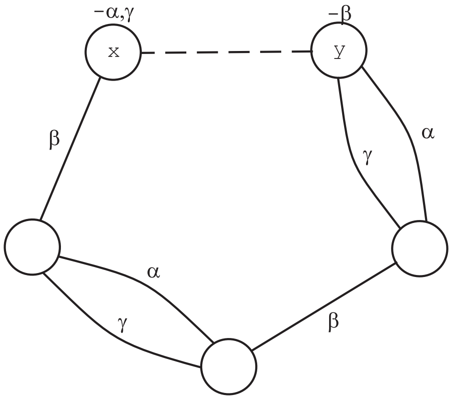
1. For en vilkårlig kant $e \in E(G)$ og en vilkårlig $(\chi'(G) - 1)$-farvning af $G - e$ gælder, at hvis en farve γ mangler ved en knude i en forbindelseskæde K af længde k_{max}, da er der ingen γ-kant, som forlader K.
2. For en vilkårlig kant $e \in E(G)$, en vilkårlig $(\chi'(G) - 1)$-farvning af $G - e$, en vilkårlig forbindelseskæde K af længde k_{max} og en vilkårlig farve γ gælder, at højst én γ-kant forlader K.

Der eksisterer en kant $e \in E(G)$, en $(\chi'(G) - 1)$-farvning φ af $G - e$ og en forbindelseskæde K m.h.t. φ, så $|K| = k_{max}$. Konsekvensen af punkt 2 kombineret med Lemma 3.5 er, at delgrafen $H \subseteq G$ induceret af knuderne i K indeholder netop $\frac{1}{2}(k_{max} - 1)$ kanter af hver farve. H indeholder altså $\frac{1}{2}(k_{max} - 1)(\chi'(G) - 1)$ farvede kanter og 1 ufarvet. D.v.s.

$$\begin{aligned}
w(G) &\geq \left\lceil \frac{\frac{1}{2}(k_{max} - 1)(\chi'(G) - 1) + 1}{\frac{1}{2}(k_{max} - 1)} \right\rceil \\
&= \left\lceil \chi'(G) - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(k_{max} - 1)} \right\rceil \\
&= \chi'(G),
\end{aligned}$$



Figur 3.3: $K_{\alpha\beta} = K_{\gamma\beta}$, $k_{max} = 3$



Figur 3.4: $K_{\alpha\beta} = K_{\gamma\beta}$, $k_{max} = 5$

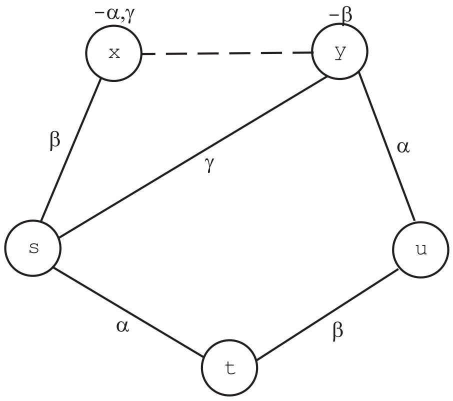
hvilket betyder, at $\chi'(G) = w(G)$.

Bevis for punkt 1 Antag til modstrid, at der for en kant $e \in E(x,y) \subset E(G)$ og en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$ findes en forbindelseskæde $K_{\alpha\beta}$ af længde k_{max} og en farve γ, så γ mangler ved en knude i $K_{\alpha\beta}$, samtidig med at der findes en γ-kant, som forlader $K_{\alpha\beta}$. Dette tilfælde kan reduceres til, at γ mangler ved x. Man kan nemlig fjerne farven fra en vilkårlig kant i $K_{\alpha\beta}$ og farve de resterende kanter i $K_{\alpha\beta} \cup \{e\}$ med skiftevis α og β uden at ændre på, at farvningen er ægte.

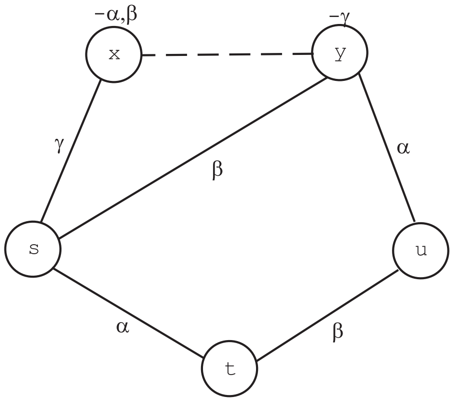
Derefter haves $\alpha, \gamma \in \overline{\varphi}(x)$ og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$. Der er tre muligheder: $K_{\alpha\beta} = K_{\gamma\beta}$, $K_{\gamma\beta} \subset K_{\alpha\beta}$ eller $K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Hvis $K_{\alpha\beta} = K_{\gamma\beta}$, er γ p.g.a. kanterne i $K_{\gamma\beta}$ repræsenteret ved alle knuder i $K_{\alpha\beta} \setminus \{x\}$. (Se figur 3.3 og 3.4. γ kan selvfølgelig være lig α. I det tilfælde smelter α- og γ-kanterne sammen.) Der kan altså ikke være en γ-kant, som forlader $K_{\alpha\beta}$.

Hvis $K_{\gamma\beta} \subset K_{\alpha\beta}$, er $k_{max} = 5$, og $K_{\gamma\beta}$ er placeret i forhold til $K_{\alpha\beta}$ som vist i figur 3.5. Hvis der er en γ-kant mellem t og u, kan der ikke være en γ-kant, som forlader $K_{\alpha\beta}$. Antag derfor, at der ikke er nogen γ-kant mellem t og u. Ombyt nu β og γ langs $K_{\gamma\beta}$. Derefter



Figur 3.5: $K_{\gamma\beta} \subset K_{\alpha\beta}$



Figur 3.6: $|K_{\alpha\gamma}| \geq 7$

ser de samme kanter og knuder ud som vist i figur 3.6. Knuderne x, s, t, u og y er alle indeholdt i $K_{\alpha\gamma}$, og da der ikke er nogen γ-kant mellem t og u, må der gælde, at $|K_{\alpha\gamma}| > 5$ i modstrid med, at $k_{max} \leq 5$.

Da β-kanten fra x deles af $K_{\gamma\beta}$ og $K_{\alpha\beta}$, er $|K_{\gamma\beta} \cap K_{\alpha\beta}| \geq 3$. Det betyder, at

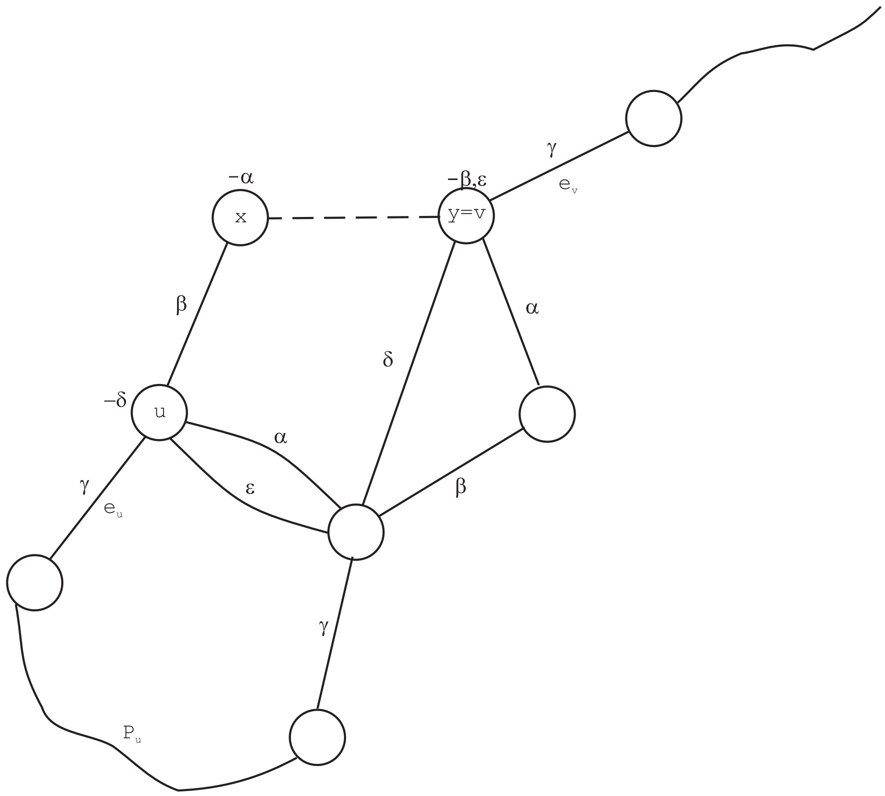
$$(K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta} \neq \emptyset \wedge k_{max} = 3) \Rightarrow |K_{\gamma\beta}| > k_{max}.$$

$K_{\alpha\beta}$ og $K_{\gamma\beta}$ deler nødvendigvis et ulige antal knuder. Da en forbindelseskæde indeholder et ulige antal knuder, betyder det, at $K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta} \neq \emptyset \Rightarrow |K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta}| \geq 2$. D.v.s.

$$(K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta} \neq \emptyset \wedge k_{max} = 5) \Rightarrow |K_{\gamma\beta} \cup K_{\alpha\beta}| \geq 7 > K_{max}.$$

Hermed er punkt 1 bevist.

Bevis for punkt 2 Antag til modstrid, at der eksisterer en kritisk kant $e \in E(x,y) \subset E(G)$, en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$, en forbindelseskæde $K_{\alpha\beta}$ og en farve γ, så mere end



Figur 3.7: Sådan kunne situationen se ud, før farverne ombyttes langs $P_{\delta\epsilon}$ og $P_{\gamma\delta}$.

én γ-kant forlader $K_{\alpha\beta}$. Iflg. punkt 1 mangler γ ikke ved nogen knude i $K_{\alpha\beta}$. Da $|K_{\alpha\beta}|$ er ulige, er der derfor mindst 3 γ-kanter, som forlader $K_{\alpha\beta}$. Vælg en tilfældig af disse kanter, og kald den e_u. Kald knuden i $K_{\alpha\beta}$, som e_u er incident med, u. Ved u mangler en farve δ, som iflg. Lemma 3.5 er forskellig fra både α og β. Kald den maksimale alternerende (γ,δ)-vej fra u P_u.

Hvis P_u indeholder netop én (d.v.s. e_u) af de γ-kanter, som forlader $K_{\alpha\beta}$, ombyttes farverne langs P_u, hvorefter γ mangler ved u. Da der stadig eksisterer mindst to γ-kanter, som forlader $K_{\alpha\beta}$, er dette i strid med punkt 1

Antag derfor, at P_u indeholder mere end én af de γ-kanter, som forlader $K_{\alpha\beta}$. Den af disse kanter, som er placeret længst fra e_u på P_u kaldes e_v, og den knude i $K_{\alpha\beta}$, som e_v er incident med, kaldes v. Ved v mangler en farve $\varepsilon \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Først ombyttes farverne langs den maksimale alternerende (δ,ε)-vej $P_{\delta\epsilon}$ fra v. Nu mangler δ ved v, og farverne langs den maksimale alternerende (γ,δ)-vej $P_{\gamma\delta}$ fra v kan ombyttes, hvorefter γ mangler ved v.

Situationen før de to farveombytninger kunne f.eks. se ud som i figur 3.7. Farven δ er iflg. Lemma 3.5 repræsenteret ved alle knuder i $K_{\alpha\beta} \setminus \{u\}$. Da γ findes ved alle knuder i $K_{\alpha\beta}$, kan P_u derfor ikke ende ved en knude i $K_{\alpha\beta}$. Da der iflg. punkt 1 ikke findes nogen δ-kant, som forlader $K_{\alpha\beta}$, må P_u forlade $K_{\alpha\beta}$ for sidste gang langs en γ-kant. Da heller ingen ε-kant forlader $K_{\alpha\beta}$, betyder det, at $P_{\delta\epsilon}$ udelukkende indeholder knuder, der tilhører $K_{\alpha\beta}$. Dermed har $P_{\delta\epsilon}$ og $P_{\gamma\delta}$ ikke andre fælles knuder end v. Det betyder, at $P_{\gamma\delta}$ er identisk med den del af P_u, som starter i v. Den del af P_u, som starter i u og slutter i knuden før v, er altså uændret efter de to farveskift, og dermed er der stadig mindst to γ-kanter, som forlader $K_{\alpha\beta}$. Det er i strid med punkt 1. Hermed er punkt 2 bevist. $\square$

3.3 Forbindelse til Vizings Sætning

Hvis Goldbergs formodning er sand, da medfører den Vizings Sætning for simple grafer (Sætning 1.13). Det ses af nedenstående udregning.

Antag, at G er en simpel graf, og lad $H \subseteq G$.

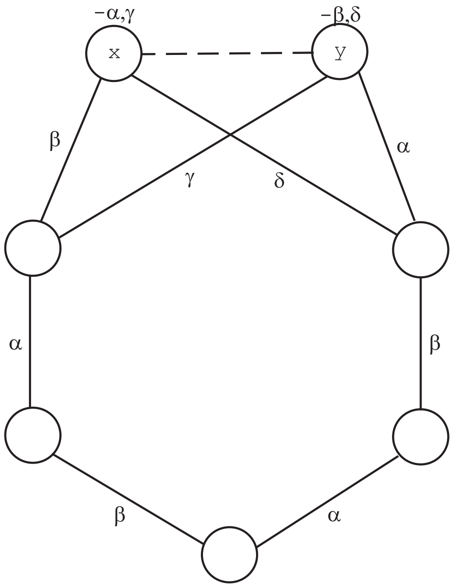
Hvis $|V(H)|$ er ulige, er $\lfloor\frac{1}{2}|V(H)|\rfloor = \frac{1}{2}(|V(H)|-1)$. D.v.s.

$$\begin{aligned}
\left\lceil\frac{|E(H)|}{\lfloor\frac{1}{2}\,|V(H)|\rfloor}\right\rceil &= \left\lceil\frac{|E(H)|}{\frac{1}{2}\,(|V(H)|-1)}\right\rceil \\
&\leq \left\lceil\frac{\frac{1}{2}\,\Delta(H)\,|V(H)|}{\frac{1}{2}\,(|V(H)|-1)}\right\rceil \\
&= \left\lceil\frac{\Delta(H)\,(|V(H)|-1)+\Delta(H)}{|V(H)|-1}\right\rceil \\
&= \left\lceil\Delta(H)+\frac{\Delta(H)}{|V(H)|-1}\right\rceil \\
&\leq \left\lceil\Delta(H)+\frac{|V(H)|-1}{|V(H)|-1}\right\rceil \\
&= \Delta(H)+1 \\
&\leq \Delta(G)+1
\end{aligned}$$

Hvis $|V(H)|$ er lige, er $\lfloor\frac{1}{2}|V(H)|\rfloor = \frac{1}{2}|V(H)|$. D.v.s.

$$\begin{aligned}
\left\lceil\frac{|E(H)|}{\lfloor\frac{1}{2}\,|V(H)|\rfloor}\right\rceil &= \left\lceil\frac{|E(H)|}{\frac{1}{2}\,|V(H)|}\right\rceil \\
&\leq \left\lceil\frac{\frac{1}{2}\,\Delta(H)\,|V(H)|}{\frac{1}{2}\,|V(H)|}\right\rceil \\
&= \Delta(H) \\
&\leq \Delta(G)
\end{aligned}$$

Der gælder altså, at $w(G) \leq \Delta(G)+1$. D.v.s. der findes ingen simple grafer med $w \geq \Delta+2$. Iflg. Goldbergs formodning findes der dermed ingen simple grafer med $\chi' \geq \Delta + 2$.



Figur 3.8: $|K_{\alpha\gamma}| \geq 5$ (figuren benyttes i fodnoten).

3.4 Bemærkninger

I [3] bevises (3.1) fra side 46 med $m = 9$. Beviset for Sætning 3.15 anvender de samme principper som beviset i [3], men er betydeligt kortere. Resultaterne i dette kapitel er så generelle, at (3.1) med $m = 9$ kan vises udelukkende ud fra disse. Det, der gør beviset i [3] længere end beviset for Sætning 3.15, er, at der for $m = 9$ er 3 mulige værdier af k_{max}: 3, 5 eller 7. Tilfældene $k_{max} = 3$ og $k_{max} = 7$ svarer til tilfældene $k_{max} = 3$ og $k_{max} = 5$ i beviset for Sætning 3.15 [1]. For $k_{max} = 5$ kan man ikke udelukke $K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Da ses på $T = K_{\gamma\beta} \cup K_{\alpha\beta}$ ($K_{max} = 7 \Rightarrow |T| = 7$). Påstandene 1. og 2. i beviset for Sætning 3.15 vises da med T i $K_{\alpha\beta}$'s sted. Da haves, at delgrafen $H \subseteq G$ induceret af knuderne i T indeholder netop 3 kanter af hver farve. D.v.s.

$$w(G) \geq \lceil \frac{3(\chi'(G) - 1) + 1}{\lfloor \frac{1}{2} \times 7 \rfloor} \rceil = \lceil \frac{3(\chi'(G) - 1) + 1}{3} \rceil = \chi'(G).$$

I [10] bevises (3.1) med $m = 11$. Beviset i [10] benytter de samme principper som beviserne for (3.1) med $m = 7$ og $m = 9$, men nøjes ikke med disse.

[1] Tilfældet $k_{max} = 3$ kan behandles helt som tilfældet $k_{max} = 3$ i beviset for Sætning 3.15. For $k_{max} = 7$ kan der på samme måde som i tilfældet $k_{max} = 5$ i beviset for punkt 1 i beviset for Sætning 3.15 argumenteres for, at hverken $K_{\alpha\beta} = K_{\gamma\beta}$ eller $K_{\gamma\beta} \setminus K_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ kan lade sig gøre, hvis der både er en knude i $K_{\alpha\beta}$, som mangler γ, og en γ-kant, som forlader $K_{\alpha\beta}$. D.v.s. $|K_{\gamma\beta}| = |K_{\alpha\beta} \cap K_{\gamma\beta}|$ er lig 3 eller 5. Af samme grund som $|K_{\alpha\beta} \cap K_{\gamma\beta}|$ ikke kan være lig 3, hvis $m = 7$, kan $|K_{\alpha\beta} \cap K_{\gamma\beta}|$ ikke være lig 5, hvis $m = 9$. D.v.s. $|K_{\gamma\beta}| = 3$. Men der mangler en farve $\delta \neq \beta$ ved y. $|K_{\alpha\delta}|$ må være lig 3 af samme grund som $|K_{\gamma\beta}| = 3$. Situationen er som vist i figur 3.8. Det ses, at $|K_{\delta\gamma}| > 3$, hvilket er i modstrid med ovenstående argumentation.

Iflg. [14] er det i [11] bevist, at Goldbergs formodning er sand for alle multigrafer, som ikke indeholder K_5^- (K_5 minus en kant) som en minor.

Kapitel 4

Flere formodninger

I dette kapitel behandles en række formodninger, som hver især har forbindelse til Goldbergs formodning.

Den første er Andersens formodning. Andersens formodning er ækvivalent med Goldbergs og siger, at hvis G er en kritisk graf med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$, da findes der for enhver kant $e \in E(G)$ en $(\chi'(G) - 1)$-farvning af $G - e$, hvor intet par af knuder mangler den samme farve. Hvis Andersens formodning er sand, indeholder enhver kritisk graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ et ulige antal knuder.

Jakobsens formodning er en følge af Andersens formodning og siger, at enhver graf G med $\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1}$, hvor m er ulige og mindst 3, indeholder højst $m-2$ knuder. Hvis Jakobsens formodning er sand, indeholder enhver kritisk graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ færre end $\Delta(G)$ knuder.

Af Seymours formodninger er den første ækvivalent med Goldbergs formodning, mens de to sidste, som er ækvivalente, er en svagere udgave af Goldbergs formodning. I afsnittet om Seymours formodninger nævnes desuden to formodninger — fremsat af henholdsvis Tutte og Fulkerson — som har relation til Seymours formodninger.

4.1 Andersens formodning

I [2] formuleres følgende formodning.

Formodning 4.1 (Andersen) *For enhver* kritisk *multigraf G gælder*

$\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$

$\Downarrow$

For enhver kant $e \in E(G)$ eksisterer der en $(\chi'(G) - 1)$-farvning φ af $G - e$, så $\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset$ for alle $x, y \in V(G)$.

I [3] bevises en sætning, der er ækvivalent med den følgende.

Sætning 4.2 *Goldbergs og Andersens formodninger er ækvivalente.*

Bevis Goldbergs formodning er iflg. Lemma 3.14 ækvivalent med "For enhver *kritisk* multigraf G gælder $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2 \Rightarrow \chi'(G) = w(G)$".

Jeg vil derfor vise, at hvis G er kritisk, da er $\chi'(G) = w(G)$, hvis og kun hvis der for alle kanter $e \in E(G)$ eksisterer en $(\chi'(G) - 1)$-farvning φ af $G - e$, så $\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset$ for alle $x, y \in V(G)$.

Antag først, at G er kritisk, og $\chi'(G) = w(G)$. Da er $\chi'(H) < \chi'(G)$ for alle $H \subset G$ (bemærk, at $H \subset G \Rightarrow E(H) \subset E(G)$ iflg. definitionen s. 115). D.v.s. $w(H) \leq \chi'(H) < \chi'(G) = w(G)$ for alle $H \subset G$, hvilket må betyde, at $\chi'(G) = w(G) = \lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \rceil$.

$$
\begin{aligned}
& \chi'(G) = \lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \rceil \\
\Downarrow \quad & \\
& \chi'(G) - 1 < \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \\
\Downarrow \quad & \\
& |E(G)| > (\chi'(G) - 1) \lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor \\
\Downarrow \quad & \\
& |E(G)| \geq (\chi'(G) - 1) \lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1
\end{aligned}
$$

For en vilkårlig kant $e \in E(G)$ gælder, at $G - e$ kan farves med $\chi'(G) - 1$ farver. Da hver farve kan anvendes på maksimalt $\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor$ kanter, kan G højst have $(\chi'(G) - 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1$ kanter. Sammenholdt med ovenstående udregning giver det $|E(G)| = (\chi'(G) - 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1$. Det betyder, at hver farve anvendes på netop $\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor$ kanter. Dermed kan hver farve mangle ved højst én knude.

Antag nu, at G er kritisk, og at der for alle kanter $e \in E(G)$ eksisterer en $(\chi'(G) - 1)$-farvning φ af $G - e$, så $\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset$ for alle $x, y \in V(G)$. Da G er kritisk, er $E(G)$ ikke tom. D.v.s. der eksisterer en kant $e \in E(G)$ og en $(\chi'(G) - 1)$-farvning φ af $G - e$, så $\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset$ for alle $x, y \in V(G)$. Da hver af de $\chi'(G) - 1$ farver mangler ved højst én knude, anvendes hver farve på $\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor$ kanter. Der er altså mindst $(\chi'(G) - 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor$ farvede kanter, og

$$
\begin{aligned}
& |E(G)| \geq (\chi'(G) - 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1 \\
\Downarrow \quad & \\
& w(G) \geq \lceil \frac{(\chi'(G) - 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \rceil = \lceil \chi'(G) - 1 + \frac{1}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \rceil = \chi'(G)
\end{aligned}
$$

D.v.s. $\chi'(G) = w(G)$. □

Da det er bevist, at Goldbergs formodning er sand for $\Delta \leq 11$ (se s. 46), er Andersens formodning altså sand for $\Delta \leq 11$.

4.1.1 Udvidelser af viftebegrebet

Der er to begreber fra kapitel 1, som er interessante i forbindelse med Andersens formodning: vifter og acceptable veje. Hvis G er en kritisk graf med $\chi'(G) \geq \Delta(G)+2$, vil der for enhver kant $e \in E(G)$ og enhver $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$ gælde, at både en vifte (plus endepunkterne til kanterne i viften) og en acceptabel vej udgør en delgraf af G, hvori intet par af knuder mangler den samme farve. Det kunne være interessant at kombinere vifter og acceptable veje i et forsøg på at opnå en struktur, som indeholder flere knuder end en maksimal vifte eller acceptabel vej alene, og som for en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$ ikke indeholder to knuder, der mangler den samme farve — i håb om, at et sådant forsøg kunne være et lille skridt på vejen mod at bevise Andersens formodning.

Lad $e \in E(x,y)$ være en kant i G. En måde at kombinere begreberne vifte og acceptabel vej på kunne være at definere en struktur, som indeholder både den maksimale vifte ved x, den maksimale vifte ved y og så mange knudedisjunkte (bortset fra x og y) acceptable veje som muligt. Da G er kritisk, og $\chi'(G) \geq \Delta(G)+2$, vil denne struktur ifølge Sætning 4.4 ikke indeholde to knuder, som mangler den samme farve. Det er dog kun en lille udvidelse i forhold til de to oprindelige begreber, og jeg har ikke fundet eksempler på kritiske grafer med $\chi' \geq \Delta+2$, hvor knuderne indeholdt i denne struktur ikke alle var indeholdt i en enkelt acceptabel vej.

Først udledes et lemma, der svarer til Lemma 2 i [2].

Lemma 4.3 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x,y)$. Antag, at der eksisterer en k-farvning φ af $G-e$, hvor $k \geq \Delta(G)+1$. Lad F_x være en vifte ved x m.h.t. φ, og lad F_y være en vifte ved y m.h.t. φ. Lad $V = V(F_x) \cup V(F_y)$. Da gælder*

$$\big[\,\exists u,v \in V, u \neq v \;:\; \exists \alpha \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)\,\big] \;\Rightarrow\; G \textit{ kan } k\textit{-farves.}$$

Bevis Antag til modstrid, at G ikke kan k-farves, og at der findes to knuder $u,v \in V$ og en farve α, så $\alpha \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)$. Da G ikke kan k-farves, kan u og v iflg. Lemma 1.6 og 1.7 ikke begge tilhøre $V(F_x)$ eller $V(F_y)$. Antag derfor, at $u \in V(F_x) \setminus V(F_y)$ og $v \in V(F_y) \setminus V(F_x)$.

Da $k \geq \Delta(G)+1$, mangler der to forskellige farver β og δ ved x. Da G ikke kan k-farves, ender den maksimale alternerende (α,β)-vej fra u iflg. beviset for Lemma 1.7 i x. Tilsvarende for den maksimale alternerende (α,δ)-vej fra u.

Det vises nu, at det samme gælder for mindst én af de to veje $P_{\alpha\beta}$ og $P_{\alpha\delta}$, hvor $P_{\alpha\beta}$ er den maksimale alternerende (α,β)-vej fra v, og $P_{\alpha\delta}$ er den maksimale alternerende (α,δ)-vej fra v. Det er i modstrid med, at højst én alternerende (α,β)-vej og højst én alternerende (α,δ)-vej kan ende i x.

Iflg. Lemma 1.6 og 1.7 er β og δ repræsenteret ved alle knuder i $V(F_y) \setminus \{x\}$. Kald β-kanten ved y e_β, og kald δ-kanten ved y e_δ. Lad e_v være en kant i F_y incident med v.

Da e_v er indeholdt i en vifte F_y, eksisterer der en ordnet mængde af kanter $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, så $\varphi(e_i) \in \overline{\varphi}(x_{i-1})$, hvor $e_i \in E(y, x_i)$, $2 \leq i \leq n$, og hvor $e_1 = e$ og $e_n = e_v$. Iflg. Lemma 1.6 og 1.7 er α repræsenteret ved alle knuder i $V(F_y) \setminus \{v\}$. Dermed er ingen af kanterne i E farvet med α. Da β og δ desuden er repræsenteret ved alle knuder i $V(F_y) \setminus \{x\}$, kan hverken $P_{\alpha\beta}$ eller $P_{\alpha\delta}$ slutte i en knude i $V(F_y) \setminus \{x\}$.

Hvis $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i x, kan man ved at ombytte farverne langs $P_{\alpha\beta}$ opnå, at $\beta \in \overline{\varphi}(v) \cap \overline{\varphi}(x)$. Hvis $P_{\alpha\beta}$ ikke ender i x, må der derfor gælde, at $e_\beta \in P_{\alpha\beta}$ og $e_\beta \in E$, for ellers udgør E stadig en vifte efter farveombytningen, og dermed kan G iflg. Lemma 1.7 k-farves.

D.v.s. hvis $P_{\alpha\beta}$ ikke ender i x, da er $e_\beta \in E$. Antag nu, at $e_\beta \in E$. Da β og δ er repræsenteret ved alle knuder i $V(F_y) \setminus \{x\}$, kan e_β og e_δ ikke begge være indeholdt i E, d.v.s. $e_\delta \notin E$. Dermed ender $P_{\alpha\delta}$ iflg. Lemma 1.7 i x. □

Sætning 4.4 *Lad G være en multigraf med en kant $e \in E(x, y)$. Antag, at der eksisterer en k-farvning φ af $G - e$, hvor $k \geq \Delta(G) + 1$.*
Lad F_x være en vifte ved x m.h.t. φ, og lad F_y være en vifte ved y m.h.t. φ.
Lad $P_1, P_2, \ldots, P_m$ være acceptable veje m.h.t. φ, så $V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}$ for $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$, og lad
$V = V(F_x) \cup V(F_y) \cup V(P_1) \cup V(P_2) \cup \ldots \cup V(P_m)$. Da gælder

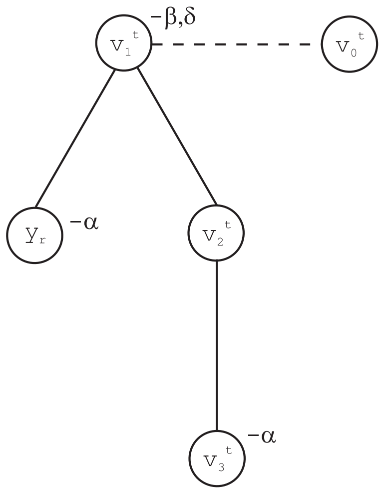
$$\left[\exists u, v \in V, u \neq v \;:\; \exists \alpha \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)\right] \;\Rightarrow\; G \textit{ kan } k\textit{-farves.}$$

Bevis Antag, der findes to knuder $u, v \in V$ og en farve α, så $\alpha \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)$. Hvis $u, v \in V(F_x) \cup V(F_y)$, kan G iflg. Lemma 4.3 k-farves, og hvis der findes et i, $1 \leq i \leq m$, så $u, v \in P_i$, kan G iflg. Lemma 1.35 ligeledes k-farves.

Altså er det tilstrækkeligt at bevise sætningen for flg. to tilfælde.

1. u er indeholdt i en acceptabel vej P_t, $v \in V(F_x)$, $u \notin V(F_x)$, og $v \notin P_t$.
2. De to knuder er indeholdt i hver sin acceptable vej.

Ideen i beviset er nu, at de to knuder, som mangler farven α, "bevæges baglæns" i strukturen mod x, indtil de er indeholdt i den samme vifte eller acceptable vej. Det er selvfølgelig ikke i bogstavelig forstand knuderne, der flyttes, men farvningen, der ændres. Efter hver ændring af farvningen skal der gælde, at farvningen stadig er ægte. Det opnås ved udelukkende at benytte farveombytninger langs maksimale alternerende veje. Hvis de to knuder er indeholdt i acceptable veje, er det derudover nødvendigt at sikre, at de to veje efter



Figur 4.1: Basistilfælde, $v_1^t = x$, $v_0^t = y_1$.

hver farveombytning stadig er acceptable. Tilhører den ene knude en acceptabel vej og den anden en vifte, er det tilsvarende nødvendigt at sikre, at vejen forbliver acceptabel, og viften forbliver en vifte.

Lad $F = F_x = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, hvor $e_i \in E(x, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, og hvor $e_1 = e$, d.v.s. $y_1 = y$. Lad kanterne i P_j være $e_1^j \in E(v_0^j, v_1^j)$, $e_2^j \in E(v_1^j, v_2^j)$, ... , $e_{n_j} \in E(v_{n_j-1}^j, v_{n_j}^j)$ i den nævnte rækkefølge, $1 \leq j \leq m$.

Nu bevises sætningen for det første af de to tilfælde opremset på s. 62.

1) u TILHØRER EN ACCEPTABEL VEJ, OG v ER ENDEPUNKT TIL EN KANT I VIFTEN.

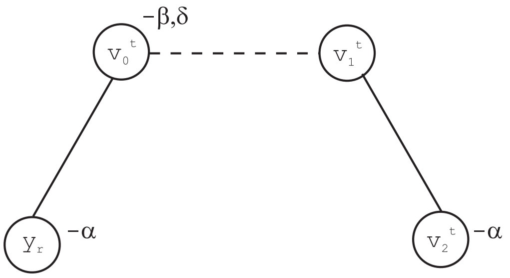
Lad $v = y_r$ (v er altså endepunkt til den r'te kant i viften), og lad $F' = (e_1, e_2, \ldots, e_r)$. Lad $u = v_s^t$, og kald den del af P_t, som starter i v_0^t og slutter i v_s^t, P_t'. Antag, at s er valgt mindst muligt, så $\alpha \in \overline{\varphi}(v_s^t)$. D.v.s. $\alpha \in \varphi(v_i^t)$ for alle $i < s$.

Da $v \notin P_t$, er $v \neq x, y_1$, og da $u \notin V(F)$, er $s \geq 2$. Hvis $v_0^t = y_1$ og $s = 2$, mangler farven på e_s^t ved y_1. D.v.s. e_s^t tilhører den maksimale vifte ved x. Det samme gør e_r. D.v.s. hvis $v_0^t = y_1$ og $s = 2$, kan G iflg. Lemma 1.7 k-farves. Antag derfor, at $s \geq 2$, hvis $v_0^t = x$, og at $s \geq 3$, hvis $v_0^t = y_1$.

Beviset er ved induktion over s.

Basistilfælde:
Hvis $v_0^t = y_1$, lad $s = 3$. Se evt. figur 4.1.
Hvis $v_0^t = x$, lad $s = 2$. Se evt. figur 4.2.

Ved x mangler en farve β. Den maksimale alternerende (α,β)-vej $P_{\alpha\beta}$ fra x kan ikke ende i både v_s^t og y_r. Ved at ombytte farverne langs $P_{\alpha\beta}$ kan man altså opnå, at α mangler ved både x og mindst én af knuderne y_r og v_s^t.



Figur 4.2: Basistilfælde, $v_0^t = x$, $v_1^t = y_1$.

Efter farveombytningen er F' stadig en vifte. Det ses af følgende argumentation. Da $\beta \in \overline{\varphi}(x)$, indeholder F ingen β-kanter. Hvis der ud over x findes et endepunkt til en kant i viften, som mangler β, kan G iflg. Lemma 1.6 k-farves, og hvis der ud over y_r findes et endepunkt til en kant i viften, som mangler α, kan G iflg. Lemma 1.6 eller 1.7 k-farves. Det kan derfor antages, at β er repræsenteret ved alle endepunkter til kanter i viften bortset fra x, og at α er repræsenteret ved alle endepunkter til kanter i $F' \setminus \{e_r\}$. Dermed er ingen kant i F' farvet med α. Altså indeholder $P_{\alpha\beta}$ ingen af kanterne i F', og $P_{\alpha\beta}$ kan ikke slutte i et endepunkt til en kant i F bortset fra i y_r. Dermed har kanterne $e_1, e_2, \ldots, e_r$ samme farve som før farveombytningen, og knuderne $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ mangler de samme farver som før farveombytningen. Altså er F' stadig en vifte.

Hvis $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i y_r, kan G derfor iflg. Lemma 1.6 k-farves.

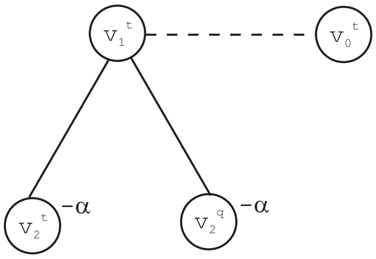
Hvis $P_{\alpha\beta}$ derimod ender i y_r, kan man ved at ombytte α og β langs $P_{\alpha\beta}$ opnå, at α mangler ved både x og v_s^t.

Hvis $\varphi(e_s^t) \neq \beta$, er ingen kant i P_t' farvet med β, og da P_t er acceptabel, er ingen kant i P_t' farvet med α. Altså er ingen kant i P_t' indeholdt i $P_{\alpha\beta}$. Da $P_{\alpha\beta}$ ikke ender i en knude i P_t, er P_t' dermed uændret efter farveombytningen, bortset fra, at β ikke længere mangler ved v_1^t. Hvis e_s^t ikke er farvet med β, er P_t' derfor stadig acceptabel efter farveombytningen. Iflg. Lemma 1.35 kan G dermed k-farves.

Antag nu, at $\varphi(e_s^t) = \beta$. Da $k \geq \Delta(G)+1$, mangler der en farve $\delta \neq \beta$ ved x. I stedet for at ombytte farverne langs $P_{\alpha\beta}$ ombyttes farverne langs den maksimale alternerende (α,δ)-vej $P_{\alpha\delta}$ fra x. Hvis $P_{\alpha\delta}$ *ikke* ender i y_r, fås nu af Lemma 1.6, at G kan k-farves. Hvis $P_{\alpha\delta}$ derimod ender i y_r, da mangler α ved x og v_s^t. Da $\varphi(e_s^t) = \beta$, er ingen kant i P_t' farvet med δ. Dermed er P_t' stadig acceptabel efter farveombytningen. G kan derfor iflg. Lemma 1.35 k-farves.

Induktionsskridt:

Ved v_{s-1}^t mangler en farve β. Den maksimale alternerende (α,β)-vej $P_{\alpha\beta}$ fra v_{s-1}^t kan ikke ende i både y_r og v_s^t. Ved at ombytte farverne langs $P_{\alpha\beta}$ opnås derfor, at α mangler ved både v_{s-1}^t og mindst én af knuderne y_r og v_s^t.



Figur 4.3: Basistilfælde, $v_1^t = v_1^q$, $v_0^t = v_0^q$.

Efter farveombytningen er P_t' stadig acceptabel. Det ses af det følgende. Det kan antages, at β er repræsenteret ved alle knuder i P_t' bortset fra v_{s-1}^t, for ellers ville β mangle ved to knuder i den samme acceptable vej. Det kan tilsvarende antages, at α er repræsenteret ved samtlige knuder i P_t' bortset fra v_s^t. Det betyder, at $P_{\alpha\beta}$ ikke kan ende ved en knude i P_t' bortset fra v_s^t. Da P_t er acceptabel, betyder det desuden, at ingen kant i P_t' er farvet med α eller β. Dermed er ingen kanter i P_t' indeholdt i $P_{\alpha\beta}$. D.v.s. alle kanter i P_t' har den samme farve, og alle knuder i P_t' bortset fra v_{s-1}^t og evt. v_s^t mangler de samme farver før og efter farveombytningen. Dermed er P_t' stadig acceptabel efter farveombytningen. Hvis $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i v_s^t, kan G altså iflg. Lemma 1.35 k-farves.

Efter farveombytningen er F' stadig en vifte. Det ses af det følgende. Det kan antages, at β ikke mangler ved noget endepunkt til en kant i viften, for da kunne s være valgt mindre. Det kan desuden antages, at α ikke mangler ved andre endepunkter til kanter i viften end y_r, for ellers kan G iflg. Lemma 1.6 eller 1.7 k-farves. Dermed er ingen kanter i F' farvet med hverken α eller β, og $P_{\alpha\beta}$ kan ikke ende i noget endepunkt til en kant i F' bortset fra y_r. Altså vil F' stadig være en vifte efter farveombytningen. Hvis $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i y_r, er s altså blevet reduceret med 1.

Nu bevises det andet af de to tilfælde opremset på s. 62.

2) u OG v TILHØRER HVER SIN ACCEPTABLE VEJ.

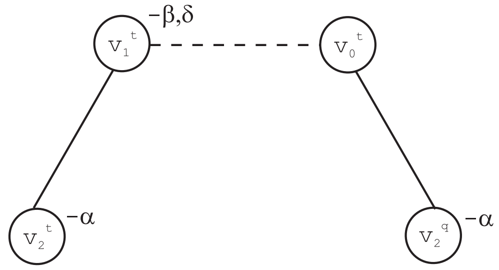
Der eksisterer tal s, t, p, q, hvor $t \neq q$, $1 \leq t, q \leq m$, $1 \leq s \leq n_t$, og $1 \leq p \leq n_q$, så $u = v_s^t$ og $v = v_p^q$. Hvis $s \leq 1$ eller $p \leq 1$, tilhører v_s^t og v_p^q den samme acceptable vej. Det antages derfor, at $s, p \geq 2$.

Kald delvejen af P_t, som starter i v_0^t og ender i v_s^t, P_t', og kald delvejen af P_q, som starter i v_0^q og ender i v_p^q, P_q'.

Beviset er ved dobbelt induktion over s og p.

Basistilfælde: $s = p = 2$.

Hvis $v_0^t = v_0^q$ (d.v.s. begge veje starter i x eller begge veje starter i y_1), mangler $\varphi(e_2^t)$ og $\varphi(e_2^q)$ begge ved v_0^t. D.v.s. v_2^t og v_2^q er begge endepunkter til kanter i den maksimale vifte ved v_1^t. Dermed kan G iflg. Lemma 1.7 k-farves. Se evt. figur 4.3.



Figur 4.4: Basistilfælde, $v_1^t = v_0^q$, $v_0^t = v_1^q$.

Hvis derimod $v_0^t \neq v_0^q$ (d.v.s. den ene vej starter i x, og den anden starter i y_1), bruges samme teknik som i basistilfældet for det tilfælde, hvor den ene knude tilhører en acceptabel vej, og den anden tilhører en vifte (se evt. figur 4.4):

Ved v_1^t mangler en farve β. Kald den maksimale alternerende (α,β)-vej fra v_1^t $P_{\alpha\beta}$. Hvis $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i v_2^t, ombyttes α og β langs $P_{\alpha\beta}$. Derefter mangler α ved v_1^t og v_2^t. Kanten e_2^t er den eneste farvede kant i P_t', og den er hverken farvet med α eller β. Dermed er P_t' stadig acceptabel efter farveombytningen. Iflg. Lemma 1.35 kan G derfor k-farves.

Hvis $P_{\alpha\beta}$ derimod ender i v_2^t, kan man ved at ombytte α og β langs $P_{\alpha\beta}$ opnå, at α mangler ved både v_0^q og v_2^q.

Hvis $\varphi(e_2^q) \neq \beta$, er P_q' stadig acceptabel efter farveombytningen. I det tilfælde kan G altså iflg. Lemma 1.35 k-farves.

Antag nu, at $\varphi(e_2^q) = \beta$. Da $k \geq \Delta(G)+1$, mangler der en farve $\delta \neq \beta$ ved v_1^t. I stedet for at ombytte farverne langs $P_{\alpha\beta}$ ombyttes farverne langs den maksimale alternerende (α,δ)-vej $P_{\alpha\delta}$ fra v_1^t. Hvis $P_{\alpha\delta}$ *ikke* ender i v_2^t, fås nu af Lemma 1.35, at G kan k-farves. Hvis $P_{\alpha\delta}$ derimod ender i v_2^t, da mangler α ved v_0^q og v_2^q. Da $\varphi(e_2^q) = \beta \neq \delta$, er P_q' stadig acceptabel. Dermed kan G iflg. Lemma 1.35 k-farves.

Induktionsskridt: $s > 2$ eller $p > 2$.
Antag, at $s \geq p$ (ellers omdøbes P_t og P_q).

Ved v_{s-1}^t mangler en farve β. Den maksimale alternerende (α,β)-vej $P_{\alpha\beta}$ fra v_{s-1}^t kan ikke ende i både v_s^t og v_p^q. Ved at ombytte farverne langs $P_{\alpha\beta}$ opnås derfor, at α mangler ved v_{s-1}^t og mindst én af knuderne v_s^t og v_p^q. P_t' og P_q' er stadig acceptable veje af følgende grund. Det kan antages, at α er repræsenteret ved alle knuder i P_t' og P_q' bortset fra v_s^t og v_p^q, for ellers kunne s og/eller p være valgt mindre. Det betyder, at ingen kant i P_t' eller P_q' kan være farvet med α, eftersom de to veje er acceptable. Det kan desuden antages, at β er repræsenteret ved alle knuder i P_t' bortset fra v_{s-1}^t, for ellers kan G iflg. Lemma 1.35 k-farves. Det kan ligeledes antages, at β er repræsenteret ved alle knuder i P_q', for ellers kunne s (og evt. p) være valgt mindre. Det betyder, at ingen kant i P_t' eller P_q' kan være farvet med β. Altså er ingen kant i P_t' eller P_q' indeholdt i $P_{\alpha\beta}$, og $P_{\alpha\beta}$ ikke ender i nogen knude i $P'_t \setminus \{v^t_s\}$ eller $P'_q \setminus \{v^q_p\}$. Dermed er begge veje stadig acceptable efter farveombytningen. Iflg. Lemma 1.35 kan G derfor k-farves. □

I [2] foretages anden form for udvidelse af viftebegrebet: i Theorem 3 kombineres vifter og forbindelseskæder på samme måde, som Sætning 4.4 i dette afsnit kombinerer vifter og acceptable veje. Den følgende sætning svarer til Theorem 3.

Sætning 4.5 *Lad G være en multigraf med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ med en kritisk kant $e \in E(x,y)$. Lad φ være en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G - e$. Lad F_x være en vifte ved x m.h.t. φ, og lad F_y være en vifte ved y m.h.t. φ. Lad K_φ være defineret som i def. 3.7, og lad $V = V(F_x) \cup V(F_y) \cup K_\varphi$. Da gælder*

$$\overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v) = \emptyset \text{ for alle } u, v \in V.$$

Bevis Antag til modstrid, at der findes to knuder $u, v \in V$ og en farve α, så $\alpha \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)$. Der eksisterer desuden en farve $\beta \in \overline{\varphi}(x)$. Da e er kritisk, er $\alpha \neq \beta$. Desuden kan u og v iflg. Lemma 4.3 ikke begge tilhøre $V(F_x) \cup V(F_y)$, og iflg. Lemma 3.8 kan de ikke begge tilhøre K_φ. Antag derfor, at $u \in V(F_x) \setminus K_\varphi$, og $v \in K_\varphi \setminus V(F_x)$.

Der mangler en farve $\delta \neq \alpha, \beta$ ved x og en farve $\gamma \neq \alpha, \beta, \delta$ ved y, så $v \in K_{\gamma\delta}$. Iflg. Korollar 3.6 ender den maksimale alternerende (α,β)-vej fra v i x. Iflg. beviset for Lemma 1.7 ender den maksimale alternerende (α,β)-vej fra u ligeledes i x. Det er i modstrid med, at kun én alternerende (α,β)-vej kan ende i x. □

Ligesom jeg ikke for strukturen beskrevet i Sætning 4.4 har fundet eksempler på kritiske grafer med $\chi' \geq \Delta + 2$, hvor knuderne i strukturen ikke alle er indeholdt i en enkelt maksimal acceptabel vej, har jeg ikke fundet eksempler på sådanne grafer, hvor knuderne i strukturen beskrevet i Sætning 4.5 ikke alle er indeholdt i en enkelt forbindelseskæde.

4.2 Formodningen om kritiske multigrafer

På s. 270 i [12] formuleres, hvad der senere blev kendt som "formodningen om kritiske multigrafer":

Formodning 4.6 *For enhver kritisk multigraf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ er $|V(G)|$ ulige.*

I [2] bemærker Andersen, at formodningen er sand, hvis Andersens formodning er sand (Sætning 4.7). Da det er bevist, at Goldbergs — og dermed Andersens — formodning er sand for $\Delta \leq 11$ (se s. 46), er formodningen altså sand for $\Delta \leq 11$.

Formodningen er ikke sand for grafer med $\chi' = \Delta + 1$. Iflg. [14, s. 193] er der fundet eksempler på grafer med $\chi' = \Delta + 1$ og et lige antal knuder for $\Delta = 3$ og $\Delta = 4$, men ikke for $\Delta \geq 5$. Iflg. [12] er det bevist, at alle kritiske grafer med højst 10 knuder har et ulige antal knuder.

Sætning 4.7 *Hvis Andersens formodning er sand, indeholder enhver kritisk graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ et ulige antal knuder.*

Bevis Lad φ være en farvning som beskrevet i Andersens formodning. Ved enhver knude $v \in V(G)$ mangler mindst én farve, da $\chi'(G) - 1 > \Delta(G)$. Denne farve er repræsenteret ved enhver anden knude i grafen. I en ægte farvning er en farve altid repræsenteret ved et lige antal knuder. G må derfor indeholde et ulige antal knuder. □

I en ægte farvning af en graf med et ulige antal knuder mangler hver farve ved mindst én knude. Andersens formodning kunne altså formuleres som "for enhver kritisk multigraf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ og for enhver kant $e \in E(G)$ eksisterer der en $(\chi'(G) - 1)$-farvning af $G - e$, hvor hver af de $\chi'(G) - 1$ farver mangler ved netop én knude".

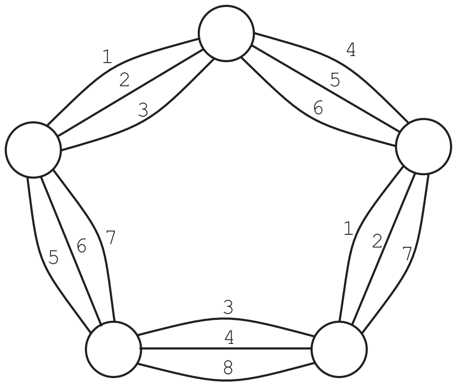
4.3 Jakobsens formodning

Iflg. [14] formuleres følgende formodning i [13].

Formodning 4.8 (Jakobsen) *For enhver* kritisk *multigraf G og ethvert ulige $m \geq 3$ gælder*

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \quad \Rightarrow \quad |V(G)| \leq m - 2$$

Det bemærkes i [12], at formodningen er bedst mulig, hvis den er sand. Det illustreres af grafen G i figur 4.5. Grafen kan som vist farves med 8 farver — d.v.s. $\chi'(G) \leq 8$. På den anden side gælder $\chi'(G) \geq w(G) \geq \lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \rceil = \lceil \frac{15}{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} \rceil = 8$. D.v.s. $\chi'(G) = 8$. Farven 8 er kun anvendt på en enkelt kant. D.v.s. fjernes denne kant, kan resten af grafen farves med 7 farver. Af symmetrigrunde gælder det en vilkårlig kant i grafen. Da $\Delta(G) = 6 < \chi'(G)$, er grafen altså kritisk.



Figur 4.5: Jakobsens formodning er bedst mulig.

For $m = 5$ gælder:

$$\chi'(G) = \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \;\wedge\; |V| > m-2.$$

For $m = 7$ gælder:

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \;\wedge\; |V| = m-2.$$

D.v.s. hverken

$$\chi' \geq \frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1},\; m \text{ ulige},\; m \geq 3 \;\Rightarrow\; |V| \leq m-2$$

eller

$$\chi' > \frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1},\; m \text{ ulige},\; m \geq 3 \;\Rightarrow\; |V| < m-2$$

gælder generelt for kritiske grafer.

I [2] bevises følgende sætning.

Sætning 4.9 *Hvis Andersens formodning er sand, da er Jakobsens formodning sand.*

Bevis Antag, at Andersens formodning er sand, og lad G være en kritisk graf med $\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1}$, hvor m er ulige, og $m \geq 3$. Iflg. Lemma 3.12 er $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$. Der eksisterer derfor en kant $e \in E(x, y) \subset E(G)$ og en $(\chi'(G) - 1)$-farvning af $G - e$, som opfylder, at ingen farve mangler ved mere end én knude. Af Lemma 3.13 fås derfor, at $|V(G)| < m$. Da $|V(G)|$ iflg. Sætning 4.7 er ulige, betyder det, at $|V(G)| \leq m-2$. □

Da det er bevist, at Goldbergs — og dermed Andersens — formodning er sand for $\Delta \leq 11$ (se s. 46), er Jakobsens formodning altså sand for $\Delta \leq 11$.

Nu følger et lemma, der bl.a. bruges til at bevise Sætning 4.11.

Lemma 4.10 *Lad G være en graf med $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$. Da gælder*

$$\chi'(G) > \frac{m}{m-1}\Delta(G) + \frac{m-3}{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad m \geq \Delta(G).$$

Bevis

$$\begin{array}{l} \Delta(G) + 2 > \dfrac{m}{m-1}\Delta(G) + \dfrac{m-3}{m-1} \\ \Updownarrow \\ (\Delta(G)+2)(m-1) > m\Delta(G) + m - 3 \\ \Updownarrow \\ m(\Delta(G) + 2 - \Delta(G) - 1) > \Delta(G) + 2 - 3 \\ \Updownarrow \\ m > \Delta(G) - 1 \\ \Updownarrow \\ m \geq \Delta(G) \end{array}$$

□

Sætning 4.11 *Lad G være en* kritisk *multigraf med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$. Hvis Jakobsens formodning er sand, gælder flg. om antallet af knuder i G*

$$|V(G)| \leq \Delta(G) - 2, \text{ hvis } \Delta(G) \text{ er ulige}$$
$$|V(G)| \leq \Delta(G) - 1, \text{ hvis } \Delta(G) \text{ er lige}$$

Bevis Af Lemma 4.10 følger, at $m = \Delta(G)$ opfylder forudsætningen i Jakobsens formodning, hvis $\Delta(G)$ er ulige, og $m = \Delta(G) + 1$ opfylder forudsætningen, hvis $\Delta(G)$ er lige. Heraf følger sætningen. □

Hvis Jakobsens formodning er sand, vil antallet af knuder i en kritisk graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ altså være mindre end $\Delta(G)$. D.v.s. for en given værdi af $\Delta(G)$ findes der et endeligt antal grafer af denne type. Hvis også Andersens formodning er sand, vil antallet af knuder i en sådan graf desuden være ulige.

4.4 Seymours formodninger

På s. 430 i [15] fremsættes flg. formodning.

Formodning 4.12 *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) \leq \max\{\Delta(G) + 1, w(G)\}$$

Formodningen er ækvivalent med Goldbergs formodning (Formodning 3.2):

$$\begin{array}{l} \chi' \leq \max\{\Delta + 1, w\} \\ \Updownarrow \\ (\chi' > \Delta + 1 \Rightarrow \chi' \leq w) \wedge (\chi' > w \Rightarrow \chi' \leq \Delta + 1) \\ \Updownarrow \\ \chi' \geq \Delta + 2 \Rightarrow \chi' \leq w \end{array}$$

På s. 431 i [15] foreslås en svagere udgave af formodningen:

Formodning 4.13 *For enhver multigraf G gælder*

$$\chi'(G) \leq \max\{\Delta(G), w(G)\} + 1$$

Nu følger en definition, som er motiveret af spørgsmålet "Hvornår kan en r-regulær graf r-farves?". Definitionen anvendes i Formodning 4.17, som er ækvivalent med Formodning 4.13.

Definition 4.14 *Lad $r \geq 0$ være et heltal. En r-*graf *defineres da som en ikke-tom, r-regulær multigraf G med flg. egenskab. For enhver delmængde $X \subseteq V(G)$, som opfylder, at $|X|$ er ulige, er $d(X) \geq r$.*

Da $d(V(G)) = 0$ for enhver graf G, har en r-graf altså et lige antal knuder.

Hvis en r-regulær graf G kan r-farves, kan G 1-faktoriseres. D.v.s. hvis X er en delmængde af knuderne i G, og $|X|$ er ulige, da må der for hver 1-faktor F være mindst én kant $e \in E(F)$, som forbinder X med $V(G) \setminus X$. Det betyder, at $d(X) \geq r$. En r-regulær graf, som er r-farvelig, må altså være en r-graf. Derimod er en r-graf ikke nødvendigvis r-farvelig.

Et eksempel på en 3-graf, som ikke er 3-farvelig, er Petersens graf (figur 1.8). Petersens graf er 3-regulær og indeholder et lige antal knuder. Derudover kan man let overbevise sig om, at man ikke ved at fjerne højst to kanter kan dele grafen i flere sammenhængskomponenter, hvilket betyder, at grafen er 3-kant-sammenhængende. Dermed er Petersens graf en 3-graf, men iflg. argumentationen på s. 23 kan Petersens graf ikke 3-farves.

Formodning 4.15 (Tutte) *Enhver 3-graf, der ikke indeholder Petersens graf som en minor, kan 3-farves.*[1]

[1]Ved DREI '98 Graph Theory & Combinatorial Optimization, Graph Coloring, 2.–7. august 1998, DIMACS, Rutgers University, N. J. USA annoncerede Robin Thomas et bevis for Tuttes formodning. Beviset er udarbejdet i samarbejde med N. Robertson, D. P. Sanders og P. D. Seymour, men endnu ikke publiceret.

Formodning 4.16 (Fulkerson) *Antag, G er en 3-graf, og at H er grafen opnået ved at erstatte hver kant $e \in E(x,y)$ i G med to parallelle kanter mellem x og y. Da er H 6-farvelig.*

Det er nu konstateret, at der findes r-grafer, som ikke er r-farvelige. Eksemplet var Petersens graf, og Tuttes formodning foreslår, at den altid optræder som minor i 3-grafer, som ikke kan 3-farves. Den følgende formodning foreslår, at der på den anden side ikke findes r-grafer, som kræver mere end $r+1$ farver.

Formodning 4.17 *For enhver r-graf G gælder*

$$\chi'(G) \leq r+1$$

Målet er nu at vise, at Formodning 4.13 og 4.17 er ækvivalente. Til det formål udledes to lemmaer, hvoraf det sidste (Lemma 4.19) svarer til (3.9) i [15].

Lemma 4.18 *For enhver r-graf G gælder, at $w(G) = r$.*

Bevis Hvis $|V(G)| = 0$, er $w(G) = r = 0$. Antag derfor, at $|V(G)| \geq 2$. Hvis $H \subseteq G$, og $|V(H)|$ er ulige, gælder

$$\left\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{|E(H-x)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \right\rceil = \left\lceil \frac{|E(H-x)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H-x)| \rfloor} \right\rceil \text{ for alle } x \in V(H).$$

Eller sagt med ord: Hvis $|V(H)|$ er ulige, og der fjernes en knude fra H, falder $|E(H)|$ måske, men $\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor$ er uændret. D.v.s. $\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \rceil$ antager sit maksimum i $H = G$ og/eller $H \subseteq G$ med $|V(H)|$ ulige.

For enhver delgraf $H \subseteq G$ med $|V(H)|$ ulige gælder

$$\begin{aligned}
& r|V(H)| = \sum_{x \in H} d_G(x) \geq 2|E(H)| + r \\
\Downarrow \quad & \\
& r(|V(H)| - 1) \geq 2|E(H)| \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \leq r \\
\Updownarrow \quad & \\
& \left\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor} \right\rceil \leq r, \text{ da } r \text{ er et heltal.}
\end{aligned}$$

Da $|V(G)| \geq 2$ og lige, gælder

$$\lceil \frac{|E(G)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor} \rceil = \lceil \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|} \rceil = \lceil \frac{\frac{1}{2}r|V(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|} \rceil = r.$$

Heraf følger, at $w(G) = r$. □

Lemma 4.19 *Lad G være en multigraf og $r \geq 0$ et heltal. Da gælder*

$$\begin{array}{c} G \text{ er en delgraf af en } r\text{-graf} \\ \Updownarrow \\ \max\{\Delta(G), w(G)\} \leq r \end{array}$$

Bevis For enhver multigraf H gælder, at $w(H) \geq w(G)$ for enhver delgraf $G \subseteq H$. P.g.a. Lemma 4.18 kan en multigraf G derfor kun være en delgraf af en r-graf, hvis $\max\{\Delta(G), w(G)\} \leq r$.

På den anden side er betingelsen $\max\{\Delta(G), w(G)\} \leq r$ tilstrækkelig til, at G er en delgraf af en r-graf. Det bevises nu. Antag, at G er en multigraf, hvorom der gælder, at $\max\{\Delta(G), w(G)\} \leq r$. Antag desuden, at $|V(G)|$ er lige. Hvis $|V(G)|$ er ulige føjes blot en isoleret knude til G — det ændrer hverken $\Delta(G)$ eller $w(G)$.

Hvis $r = 0$, er G selv en 0-graf. Hvis $r = 1$, konstrueres en 1-graf ved at føje kanter til G, indtil $d(x) = 1$ for alle $x \in G$. Hvis $r = 2$, består G af disjunkte veje og kredse. For en ulige kreds C gælder, at $\lceil \frac{|E(C)|}{\lfloor \frac{1}{2}|V(C)| \rfloor} \rceil = \lceil \frac{|V(C)|}{\frac{1}{2}(|V(C)|-1)} \rceil = 3 > w(G)$. D.v.s. G indeholder ingen ulige kredse. Ved at føje en kant eller en knude og to kanter til hver vej i G kan man derfor konstruere en graf H, som udelukkende består af lige kredse. H er 2-regulær og indeholder et lige antal knuder. For alle $X \subseteq V(H)$ med $|X|$ ulige gælder, at der findes en kreds C, så $X \cap V(C) \neq \emptyset$ og $(V(H) \setminus X) \cap V(C) \neq \emptyset$. D.v.s. $d(X) \geq 2$. Altså er H en 2-graf.

Hvis $r \geq 3$, konstrueres en $(r-1)$-kant-sammenhængende graf G', og der tilføjes kanter mellem G og G', så den resulterende graf H bliver en r-graf. For at være en r-graf, skal H være r-regulær. Specielt skal hver knude i G have valens r. D.v.s. hvis d er antallet af kanter mellem G og G', skal d være givet ved $d = r|V(G)| - \sum_{x \in V(G)} d(x) = r|V(G)| - 2|E(G)|$. Da $|V(G)|$ er lige, er d ligeledes lige.

G' konstrueres, så den indeholder netop d knuder. G' ser ud på flg. måde.
Hvis $d = 0$, er G' den tomme graf. D.v.s. $V(G') = \emptyset$.
Hvis $d > 0$, $r \geq 3$, og r er ulige, er G' en ringgraf med $\frac{r-1}{2}$ kanter mellem hvert par af naboknuder.
Hvis $d > 0$, $r \geq 4$, og r er lige, konstrueres G' på flg. måde. Først konstrueres en ringgraf med $\frac{r}{2} - 1$ kanter mellem hvert par af naboknuder. Derefter tilføjes en kant mellem hvert

af de $\frac{d}{2}$ par af modstående knuder i ringen.
Hver knude i G' har nu valens $r-1$.

Hver knude i G' forbindes med en knude i G, så hver knude i G får valens r. På den måde får hver knude i G' ligeledes valens r. Det står derfor kun tilbage at vise, at $d(X) \geq r$ for alle $X \subset V(H)$ med et ulige antal knuder. Antag til modstrid, at der eksisterer en mængde af knuder $X \subseteq V(H)$, så $|X|$ er ulige, og $d(X) \leq r-1$.

Da H er r-regulær, er $d(X) = r|X| - 2|E(X)|$. Da $|X|$ er ulige, har $d(X)$ derfor samme paritet som r. D.v.s. $d(X) \leq r-2$. Da G' er $(r-1)$-kant-sammenhængende, er $d(Y) \geq r-1$ for enhver delmængde $Y \subseteq V(H)$, der opfylder $Y \cap V(G') \neq \emptyset$ og $V(G') \setminus Y \neq \emptyset$. D.v.s. X opfylder $X \cap V(G') = \emptyset$ eller $V(G') \subseteq X$. Da $d(X) = d(V(H) \setminus X)$, kan muligheden $V(G') \subseteq X$ udelukkes uden tab af generalitet. D.v.s. det kan antages, at $X \subseteq V(G)$. Det benyttes derfor, at $w(G) \leq r$.

$$
\begin{aligned}
& w(G) \leq r \\
\Downarrow\ & \left\lceil \frac{|E(X)|}{\frac{1}{2}(|X|-1)} \right\rceil \leq r \\
\Updownarrow\ & \frac{|E(X)|}{\frac{1}{2}(|X|-1)} \leq r \\
\Updownarrow\ & |E(X)| \leq \frac{1}{2}r|X| - \frac{1}{2}r \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Da H er r-regulær, gælder desuden

$$
\begin{aligned}
& r|X| = d(X) + 2|E(X)| \\
\Updownarrow\ & |E(X)| = \frac{1}{2}r|X| - \frac{1}{2}d(X) \\
(1) \Downarrow\ & \frac{1}{2}r|X| - \frac{1}{2}d(X) \leq \frac{1}{2}r|X| - \frac{1}{2}r \\
\Updownarrow\ & d(X) \geq r
\end{aligned}
$$

Den sidste ulighed er i modstrid med $d(X) \leq r-1$. Altså eksisterer X ikke. □

Nu kan den følgende sætning let vises.

Sætning 4.20 *Formodning 4.13 og Formodning 4.17 er ækvivalente.*

Bevis For en r-graf G er $w(G) = r$ iflg. Lemma 4.18. D.v.s. $\max\{\Delta(G), w(G)\} = r$. Hvis Formodning 4.13 er sand, er Formodning 4.17 dermed også sand.

Enhver multigraf G med $\max\{\Delta(G), w(G)\} = r$ er iflg. Lemma 4.19 delgraf af en r-graf H. Hvis Formodning 4.17 er sand, kan H og dermed G farves med $r+1 = \max\{\Delta(G), w(G)\}+1$ farver. D.v.s. så er Formodning 4.13 også sand. □

4.5 Bemærkninger

Andersens formodning

I [3] bevises, at en kritisk multigraf G har $\chi'(G) = w(G)$, hvis og kun hvis der *eksisterer* en kant $e \in E(G)$ og en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$, så $\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y)$ for alle $x, y \in V(G)$. Det er ækvivalent med Sætning 4.2. Af anden del af beviset for Sætning 4.2 ses nemlig, at $\chi'(G) = w(G)$, blot der eksisterer en kant $e \in E(G)$ og en $(\chi'(G)-1)$-farvning af $G-e$, så $\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y)$ for alle $x, y \in V(G)$. D.v.s.

$$\begin{array}{ll} & \exists e \in E(G) : \exists (\chi'(G)-1)\text{-farvning } \varphi \text{ af } G-e : (\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset \;\; \forall x, y \in V(G)) \\ \Downarrow & \\ & \chi'(G) = w(G) \\ \Downarrow & \\ & \forall e \in E(G) : \exists (\chi'(G)-1)\text{-farvning } \varphi \text{ af } G-e : (\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset \;\; \forall x, y \in V(G)) \\ \Downarrow & \\ & \exists e \in E(G) : \exists (\chi'(G)-1)\text{-farvning } \varphi \text{ af } G-e : (\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset \;\; \forall x, y \in V(G)) \end{array}$$

Den første implikation følger altså af anden del af beviset for Sætning 4.2. Den anden implikation følger af første del af beviset for Sætning 4.2, og den sidste implikation er sand, fordi $E(G) \neq \emptyset$, da G er kritisk. Af de tre implikationer tilsammen fås

$$\begin{array}{ll} & \exists e \in E(G) : \exists (\chi'(G)-1)\text{-farvning } \varphi \text{ af } G-e : (\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset \;\; \forall x, y \in V(G)) \\ \Updownarrow & \\ & \forall e \in E(G) : \exists (\chi'(G)-1)\text{-farvning } \varphi \text{ af } G-e : (\overline{\varphi}(x) \cap \overline{\varphi}(y) = \emptyset \;\; \forall x, y \in V(G)) \end{array}$$

Beviset for Sætning 4.2 svarer til beviset for den tilsvarende sætning i [3]

Seymours formodninger

I formodningerne i [15] svarende til Formodning 4.12 og 4.13 anvender Seymour $\Gamma(G)$ defineret ved

$$\Gamma(G) = \max_{H \subseteq G,\, |V(H)|>1 \text{ og ulige}} \left\{ \frac{|E(H)|}{\frac{1}{2}(|V(H)|-1)} \right\}, \text{ hvis } |V(G)| \geq 3$$
$$\Gamma(G) = 0, \text{ ellers}$$

i stedet for $w(G)$. Det ses af det følgende, at for $|V(G)| \geq 3$ er $w(G) = \lceil \Gamma(G) \rceil$. For alle interessante grafer er det derfor uden betydning, om man bruger $w(G)$ eller $\Gamma(G)$, idet $\chi'(G) \leq \Gamma(G) \;\Leftrightarrow\; \chi'(G) \leq \lceil \Gamma(G) \rceil$.

Hvis $H \subseteq G$, antager $\lceil |E(H)| / \lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor \rceil$ sit maksimum i $H = G$ og/eller $H \subseteq G$ med $|V(H)|$ ulige (se evt. starten af beviset for Lemma 4.18). Det følger derfor, at $w(G) = \lceil \Gamma(G) \rceil$, hvis $|V(G)|$ er ulige. Det følger tilsvarende, at

$$w(G) = \max\{\lceil \Gamma(G) \rceil, \lceil \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|} \rceil\},$$

hvis $|V(G)|$ er lige. Det står derfor kun tilbage at vise, at $\lceil\Gamma(G)\rceil \geq \lceil\frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|}\rceil$, hvis $|V(G)|$ er lige.

Antag nu, at G er en multigraf med $|V(G)|$ lige, og lad x være en knude med minimumvalens i G. Da gælder

$$\Gamma(G) \geq \frac{|E(G-x)|}{\lfloor\frac{1}{2}|V(G-x)|\rfloor} = \frac{|E(G)|-d(x)}{\frac{1}{2}|V(G)|-1}.$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} & \frac{|E(G)|-d(x)}{\frac{1}{2}|V(G)|-1} \geq \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|} \\ \Downarrow \quad & \\ & \Gamma(G) \geq \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|} \\ \Downarrow \quad & \\ & \lceil\Gamma(G)\rceil \geq \lceil\frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|}\rceil, \end{aligned}$$

og $\frac{|E(G)|-d(x)}{\frac{1}{2}|V(G)|-1} \geq \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|}$ er altid opfyldt:

$$\begin{aligned} & \frac{|E(G)|-d(x)}{\frac{1}{2}|V(G)|-1} \geq \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}|V(G)|} \\ \Updownarrow \quad & \\ & \frac{1}{2}|V(G)||E(G)| - \frac{1}{2}|V(G)|d(x) \geq \frac{1}{2}|V(G)||E(G)| - |E(G)| \\ \Updownarrow \quad & \\ & |E(G)| \geq \frac{1}{2}|V(G)|d(x) \end{aligned}$$

Den sidste ulighed er sand p.g.a. måden x er valgt på, idet $|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v) \geq \frac{1}{2}|V(G)|d(x)$.

Altså er $w(G) = \lceil\Gamma(G)\rceil$ for alle multigrafer G med mindst 3 knuder.

Tuttes og Fulkersons formodninger

Tuttes og Fulkersons formodninger, som de er udtrykt i [15], taler om 3-regulære grafer uden broer, hvor Formodning 4.15 og 4.16 bruger ordet 3-grafer, men mængden af 3-grafer er netop mængden af 3-regulære grafer uden broer. Det ses af følgende argumentation.

Hvis r er et ulige heltal, vil der for enhver r-regulær graf G og enhver mængde $X \subseteq V(G)$ gælde, at $|X|$ er ulige, hvis og kun hvis $d(X)$ er ulige.

D.v.s. hvis en 3-regulær graf indeholder en bro, må de to sammenhængskomponenter, som opstår, hvis broen fjernes, hver især indeholde et ulige antal knuder. Dermed er grafen ikke en 3-graf.

Modsat vil en 3-regulær graf G, som ikke er en 3-graf, indeholde en bro. Hvis der findes en mængde $X \subseteq V(G)$, så $|X|$ er ulige, og $d(X) < 3$, er $d(X)$ nemlig lig 1.

Kapitel 5

Grafer med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$

Kapitel 3 og 4 drejede sig næsten udelukkende om grafer med $\chi' \geq \Delta + 2$. Det kunne være interessant at undersøge, hvordan sådanne grafer ser ud. For at starte et sted ses på grafer med $\chi' = \Delta + 2$. For sådanne grafer er $\mu \geq 2$ iflg. Sætning 1.14. For yderligere at afgrænse problemet indskrænkes mængden til grafer, hvor $\chi' = \Delta + 2$, og $\mu = 2$.

5.1 Grafer med $\Delta \leq 5$

For $\Delta \leq 3$ findes grafer med $\chi' \geq \Delta + 2$ ikke. Det følger af Shannons Sætning, som siger, at $\chi' \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$:

$$
\begin{aligned}
& \Delta + 2 \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor \\
\Downarrow \quad & \\
& \Delta + 2 \leq \frac{3}{2}\Delta \\
\Updownarrow \quad & \\
& \Delta \geq 4
\end{aligned}
$$

For $\Delta = 4$ er $\Delta + 2 = \frac{3}{2}\Delta$. Iflg. Sætning 1.32 findes der derfor netop én graf med $\chi' = \Delta + 2$: grafen med netop 3 knuder og 2 kanter mellem hvert par af knuder.

For $\Delta = 5$ er $\Delta + 2 = \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$. Dermed indeholder enhver graf med $\Delta = 5$ og $\chi' = \Delta + 2$ iflg. Sætning 1.33 en delgraf med netop 3 knuder, hvor det ene par af knuder er forbundet af 3 kanter, mens de to andre par hver især er forbundet af 2 kanter. D.v.s. for grafer med $\Delta = 5$ og $\chi' = \Delta + 2$ er $\mu \geq 3$.

5.2 Grafer med $\Delta \geq 6$

For enhver multigraf med $\mu = 2$ er $w \leq \chi' \leq \Delta + 2$. D.v.s. $w = \Delta + 2 \Rightarrow \chi' = \Delta + 2$. For at $w = \Delta + 2$ kan være opfyldt, skal grafen have en delgraf med tilstrækkeligt mange kanter i forhold til antallet af knuder. Der ses derfor på, hvor mange kanter der er "plads til" i en graf med et givet antal knuder, en given maksimumvalens og en multiplicitet lig 2.

Lad $m_{max}(\Delta, \mu, n)$ betegne det største antal kanter, en multigraf med n knuder, maksimumvalens Δ og multiplicitet μ kan indeholde. Da er m_{max} givet ved

$$m_{max}(\Delta, \mu, n) = \min\{\lfloor \frac{1}{2}\, n\, \Delta \rfloor,\ \frac{1}{2}\, \mu\, n\, (n-1)\}$$

D.v.s. for $\mu = 2$ fås

$$m_{max}(\Delta, 2, n) = \min\{\lfloor \frac{1}{2}\, n\, \Delta \rfloor,\ n\, (n-1)\}$$

Det undersøges nu, hvornår

$$\lceil \frac{m_{max}(\Delta, 2, n)}{\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor} \rceil = \Delta + 2.$$

D.v.s. hvornår

$$\lceil \frac{\lfloor \frac{1}{2} n \Delta \rfloor}{\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \quad \wedge \quad \lceil \frac{n(n-1)}{\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2.$$

For n lige er $\lfloor \frac{1}{2} n \Delta \rfloor / \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor = \Delta$. D.v.s. for n lige er $\lceil m_{max}(\Delta, 2, n) / \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor \rceil \leq \Delta$.

For n og Δ ulige gælder flg.

$$\begin{aligned}
& \lceil \frac{\lfloor \frac{1}{2} n \Delta \rfloor}{\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \\
\Updownarrow \\
& \frac{\lfloor \frac{1}{2} n \Delta \rfloor}{\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \\
& \frac{\frac{1}{2}(n\Delta - 1)}{\frac{1}{2}(n-1)} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \\
& \frac{n\Delta - 1}{n - 1} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \\
& n\Delta - 1 > (\Delta + 1)(n - 1) \\
\Updownarrow \\
& n < \Delta \\
\Updownarrow \\
& n \leq \Delta - 2, \text{ da } n \text{ og } \Delta \text{ begge er ulige.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \lceil \frac{n(n-1)}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{n(n-1)}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{n(n-1)}{\frac{1}{2}(n-1)} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \quad & \\
& 2n > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \quad & \\
& n > \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2} \\
\Updownarrow \quad & \\
& n \geq \frac{1}{2}\Delta + \frac{3}{2}, \text{ da } \Delta \text{ er ulige}
\end{aligned}
$$

D.v.s.

$$
\begin{aligned}
& \lceil \frac{m_{max}(\Delta, 2, n)}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{1}{2}\Delta + \frac{3}{2} \leq n \leq \Delta - 2
\end{aligned}
$$

Ovenstående ulighed har løsninger, hvis og kun hvis $\Delta \geq 7$. D.v.s.

$$
(\lceil \frac{m_{max}(\Delta, 2, n)}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \rceil = \Delta + 2 \text{ og } \Delta \text{ ulige}) \; \Leftrightarrow \; \Delta \geq 7.
$$

D.v.s. for alle ulige $\Delta \geq 7$ findes der grafer med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$. Hvis Goldbergs formodning er sand, betyder udregningerne samtidig, at der ikke findes grafer med Δ ulige, $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$ for $\Delta < 7$, hvilket stemmer overens med resultaterne fra afsnit 5.1.

For Δ lige og n ulige gælder flg.

$$
\begin{aligned}
& \lceil \frac{\lfloor \frac{1}{2}n\Delta \rfloor}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{\lfloor \frac{1}{2}n\Delta \rfloor}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{\frac{1}{2}n\Delta}{\frac{1}{2}(n-1)} > \Delta + 1 \\
\Updownarrow \quad & \\
& n\Delta > (\Delta + 1)(n-1) \\
\Updownarrow \quad & \\
& n < \Delta + 1 \\
\Updownarrow \quad & \\
& n \leq \Delta - 1, \text{ da } n \text{ er ulige, og } \Delta \text{ er lige.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lceil \frac{n(n-1)}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \\
\Updownarrow& \\
&n > \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2} \quad \text{(se udregningen for } n \text{ og } \Delta \text{ ulige)} \\
\Updownarrow& \\
&n \geq \frac{1}{2}\Delta + 1, \text{ da } \Delta \text{ lige}
\end{aligned}
$$

D.v.s.

$$
\begin{aligned}
&\lceil \frac{m_{max}(\Delta, 2, n)}{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \rceil \geq \Delta + 2 \\
\Updownarrow\ &\frac{1}{2}\Delta + 1 \leq n \leq \Delta - 1
\end{aligned}
$$

Ovenstående ulighed har løsninger, netop når $\Delta \geq 4$. D.v.s. for alle lige $\Delta \geq 4$ findes der grafer med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$.

Hvis Goldbergs formodning er sand, gælder der iflg. udregningerne i dette afsnit for enhver graf G med $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$ og $\mu(G) = 2$, at $|V(G)| \geq \lceil \frac{1}{2}\Delta(G) + 1 \rceil$. For $\Delta(G) \leq 11$ er Goldbergs formodning sand (se s. 46). D.v.s. hvis $\Delta(G) \leq 11$, er $|V(G)| \geq \lceil \frac{1}{2}\Delta(G) + 1 \rceil$.

Hvis Jakobsens formodning er sand, har enhver kritisk graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ iflg. Sætning 4.11 højst $\Delta(G) - 1$ knuder, hvis $\Delta(G)$ er lige, og højst $\Delta(G) - 2$ knuder, hvis $\Delta(G)$ er ulige. Hvis Andersens formodning er sand, har G iflg. Sætning 4.7 et ulige antal knuder.

Det ses af første del af beviset for Sætning 4.2, at hvis Goldbergs formodning er sand, da er $|E(G)| = (\Delta(G) + 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1$ for alle kritiske grafer G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$.

Da Goldbergs formodning er sand for $\Delta \leq 11$, fås nu af Sætning 4.2 og 4.9, at for enhver kritisk graf G med $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$ og $\Delta(G) \leq 11$ er $|V(G)| \leq \Delta(G) - 1$ og ulige, og $|E(G)| = (\Delta(G) + 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1$.

I en kritisk graf G med $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$ og $\mu(G) = 2$ gælder der iflg. Lemma 1.24 for alle knuder $x \in V(G)$, at $d_{N_2}(x) \geq \Delta(G) + 2$. D.v.s. enhver knude $x \in V(G)$ har to naboer z_1 og z_2, så $\lfloor \frac{1}{2}(\, d(z_1) + \mu(x, z_1) + d(z_2) + \mu(x, z_2)\,) \rfloor \geq \Delta(G) + 2$. Da $\mu(x, z_1), \mu(x, z_2) \leq 2$, betyder det, at $\mu(x, z_1) = \mu(x, z_2) = 2$, og $d(z_1) = d(z_2) = \Delta(G)$. Dermed indeholder G en ringgraf R, hvori hver knude har valens $\Delta(G)$, og hvert par af naboknuder er forbundet af to kanter. For enhver multigraf G med $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$ og $\mu(G) = 2$ gælder, at G indeholder en kritisk delgraf H med $\chi'(H) = \Delta(G) + 2 = \Delta(H) + 2$. Dermed indeholder G en delgraf som R. Hvis Jakobsens formodning er sand, følger det af det ovenstående og Sætning 4.11, at G indeholder en delgraf som R med højst $\Delta(G) - 1$ knuder, hvis $\Delta(G)$ er lige, og højst $\Delta(G) - 2$ knuder, hvis $\Delta(G)$ er ulige.

Iflg. Sætning 1.38 indeholder enhver graf med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$ en 2-trekant.

5.3 Opsummering

For $\Delta \leq 3$ og $\Delta = 5$ findes der ingen grafer med $\chi' = \Delta + 2$.

For $\Delta = 4$ findes der netop én graf med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$. Den har netop 3 knuder, og hvert par af knuder er forbundet af 2 kanter.

For alle $\Delta \geq 6$ findes der grafer med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$.

Enhver *kritisk* multigraf G med $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$ opfylder flg.

- Hvis $\Delta(G) \leq 11$, er $|V(G)| \leq \Delta(G) - 1$ og ulige.
- Hvis Goldbergs formodning er sand, er $|V(G)| \leq \Delta(G) - 1$ og ulige.
- Hvis Goldbergs formodning er sand, er $|E(G)| = (\Delta(G) + 1)\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \rfloor + 1$.

Enhver multigraf G med $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$ og $\mu(G) = 2$ opfylder flg.

- Hvis $\Delta(G) \leq 11$, er $|V(G)| \geq \lceil \frac{1}{2}\Delta(G) + 1 \rceil$.
- Hvis Goldbergs formodning er sand, er $|V(G)| \geq \lceil \frac{1}{2}\Delta(G) + 1 \rceil$.
- G indeholder en ringgraf R, hvori alle knuder har valens $\Delta(G)$, og hvert par af naboknuder er forbundet af to kanter.
- Hvis Jakobsens formodning er sand, indeholder G en delgraf som R med højst $\Delta(G) - 1$ knuder, hvis $\Delta(G)$ er lige, og højst $\Delta(G) - 2$ knuder, hvis $\Delta(G)$ er ulige.
- G indeholder en 2-trekant.

Kapitel 6

En algoritme til kantfarvning af multigrafer

I dette kapitel beskrives en algoritme *FarvGraf*, der i tid $O(|E|\,(|V| + \Delta))$ og med pladsforbrug $O(|E|)$ farver en multigraf $G = (V, E)$ med $\max\{\chi'(G), \lfloor \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3} \rfloor\}$ farver. Algoritmen er inspireret af algoritmen beskrevet i [9]. I afsnit 6.1 beskrives algoritmen *FarvGraf* v.h.a. pseudokode. I afsnit 6.2 gives uddybende forklaringer samtidig med, at algoritmens korrekthed bevises. I afsnit 6.3 gives nogle af implementationsdetaljerne for at bestemme algoritmens tidskompleksitet og pladsforbrug.

Til at beskrive, hvor tæt en approksimationsalgoritme A er på at være optimal, kan man anvende to størrelser "det absolutte forhold" R_A og "det asymptotiske forhold" R_A^∞. Lad ${\chi'}_A(G)$ være det antal farver, som algoritmen A behøver for at farve grafen G, og lad $R_A(G) = {\chi'}_A(G)/\chi'(G)$. Da defineres

$$R_A = \sup_{\text{Alle multigrafer } G} \{R_A(G)\}, \text{ og}$$

$$R_A^\infty = \inf \{r \geq 1 \mid \exists n \in \mathbb{N} : R_A(G) \leq r \text{ for alle multigrafer } G \text{ med } \chi'(G) \geq n\}.$$

Algoritmen *FarvGraf*, som dette kapitel handler om, tilhører en familie af algoritmer, som farver en vilkårlig multigraf med $\max\{\chi', \lfloor \frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1} \rfloor\} \leq \lfloor \frac{m}{m-1}\chi' + \frac{m-3}{m-1} \rfloor$ farver. For *FarvGraf* er $m = 7$. Algoritmer med $m = 9$ og $m = 11$ er beskrevet i [9] og [10]. Iflg. Korollar 2.6 er de alle optimale m.h.t. det absolutte forhold:

$$
\begin{aligned}
& \lfloor \frac{m}{m-1}\chi' + \frac{m-3}{m-1} \rfloor \;\leq\; \frac{4}{3}\chi' \\
\Updownarrow \quad & \frac{m}{m-1}\chi' + \frac{m-3}{m-1} - 1 \;<\; \frac{4}{3}\chi' \\
\Updownarrow \quad & (\frac{4}{3} - \frac{m}{m-1})\chi' + 1 - \frac{m-3}{m-1} \;>\; 0 \\
\Updownarrow \quad & (\frac{1}{3} - \frac{1}{m-1})\chi' + \frac{2}{m-1} \;>\; 0
\end{aligned}
$$

For $m \geq 4$ er $(\frac{1}{3} - \frac{1}{m-1}) \geq 0$, og for $m \geq 2$ er $\frac{2}{m-1} > 0$. Altså anvender algoritmerne højst $\frac{4}{3}\chi'$ farver. I overensstemmelse med Korollar 2.6 kan ingen algoritme i denne familie garantere at farve en multigraf G, hvor $\Delta(G) = 3$, med færre end 4 farver:

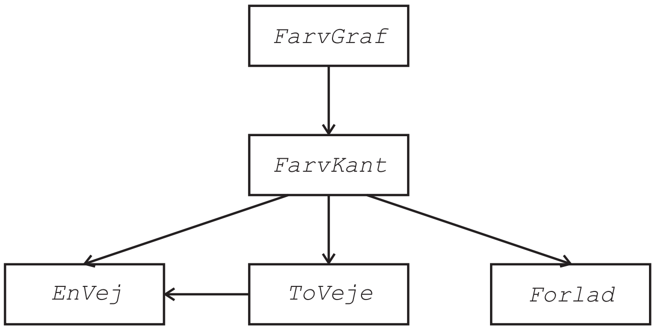
$$
\begin{aligned}
& \lfloor \frac{m}{m-1} \times 3 + \frac{m-3}{m-1} \rfloor \geq 4 \\
\Updownarrow \quad & \lfloor \frac{3}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} \rfloor \geq 1 \\
\Updownarrow \quad & \lfloor \frac{1}{m-1} \rfloor \geq 0 \\
\Updownarrow \quad & 0 \geq 0
\end{aligned}
$$

Det absolutte forhold er altså $\frac{4}{3}$. M.h.t. til det asymptotiske forhold opfører algoritmerne sig imidlertid forskelligt, idet $R^{\infty}_{FarvGraf} = \frac{7}{6}$, mens tallet for de to andre algoritmer er h.h.v. $\frac{9}{8}$ og $\frac{11}{10}$.

6.1 Algoritmen

Med $P_{\alpha\beta}$ menes den maksimale alternerende (α,β)-vej, som starter i x, men som ikke nødvendigvis slutter i y. $P_{\alpha\beta}$ bruges også til at betegne knuderne i vejen — d.v.s. $P_{\alpha\beta} \setminus P_{\gamma\beta}$ betyder de knuder, som er i $P_{\alpha\beta}$ og ikke i $P_{\gamma\beta}$, og $|P_{\alpha\beta}|$ betyder antallet af knuder i $P_{\alpha\beta}$.

I figur 6.1 vises strukturen i algoritmen *FarvGraf*. Pilene illustrerer mulige underrutinekald.



Figur 6.1: Kontrol-flow

<u>*FarvGraf*</u>(G)
Hvis $\Delta(G) \leq 2$
Farv kanterne i G v.h.a. dybde-først-søgning
Ellers
$q \leftarrow \lfloor \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3} \rfloor$ $\{\ \Phi = \{1, 2, \ldots, q\}\ \}$
$V(G') \leftarrow V(G)$
$E(G') \leftarrow \emptyset$
For hver kant $e \in E(G)$
$E(G') \leftarrow E(G') \cup \{e\}$
Kald e's endepunkter x og y
Vælg $\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, q\}$, så $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$ og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$, og om muligt så $\alpha = \beta$
FarvKant(G', x, y, e, α, β, q)

<u>*FarvKant*</u>(G', x, y, e, α, β, q)
EnVej(G', x, y, e, α, β, succes)
Hvis $\neg$ succes $\{P_{\alpha\beta}$ ender i y, og $|P_{\alpha\beta}| \leq 5\}$
$\gamma \leftarrow$ *Forlad*(G', x, y, e, α, β, succes)
Hvis succes $\{e$ kan farves med en af farverne $1, 2, \ldots, q\}$
EnVej(G', x, y, e, γ, β, succes)
Hvis $\neg$ succes $\{P_{\gamma\beta}$ ender i y, $|P_{\gamma\beta}| \leq 5$, og $|P_{\alpha\beta}| = 5\}$
Hvis $|P_{\gamma\beta}| = 3$ $\{P_{\gamma\beta} \subset P_{\alpha\beta}\}$
Ombyt γ og β langs $P_{\gamma\beta}$ $\{P_{\alpha\gamma}$ ender *ikke* i y, eller $|P_{\alpha\gamma}| > 5,\}$
EnVej(G', x, y, e, α, γ, succes) $\{$så *EnVej* vil farve $e\}$
Ellers hvis $|P_{\gamma\beta}| = 5$ $\{|P_{\alpha\beta} \cup P_{\gamma\beta}| = 7,\ \}$
$\{$d.v.s. $\exists u \in P_{\alpha\beta} \setminus P_{\gamma\beta}, v \in P_{\gamma\beta} \setminus P_{\alpha\beta} : \exists \delta \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v),\}$
ToVeje(G', x, y, e, α, β, γ) $\{$så *ToVeje* farver $e\}$
Ellers $\{G'$ kan ikke farves med q farver$\}$
$q \leftarrow q + 1$ $\{\Phi$ udvides med en ekstra farve$\}$
Farv e med q

EnVej(G', x, y, e, α, β, succes)
Hvis $\alpha = \beta$
    Farv e med α
    succes $\leftarrow$ sand
Ellers hvis $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i y
    Ombyt α og β langs $P_{\alpha\beta}$
    Farv e med β
    succes $\leftarrow$ sand
Ellers hvis $\exists u, v \in P_{\alpha\beta}, u \neq v, \gamma \in \{1, 2, \ldots, q\} : \gamma \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v)$
    Anvend teknikken beskrevet i beviset for Lemma 3.5 til at opnå, at $P_{\alpha\beta}$ *ikke* ender i y
    {Det er muligt, da $q \geq \Delta(G) + 1$}
    Ombyt α og β langs $P_{\alpha\beta}$
    Farv e med β
    succes $\leftarrow$ sand
Ellers
    succes $\leftarrow$ falsk

Forlad(G', x, y, e, α, β, succes)
Hvis der findes en farve γ, som mangler ved en knude i $P_{\alpha\beta}$, og som farver en kant, som forlader $P_{\alpha\beta}$
    Kald knuden, som γ mangler ved, u
Ellers hvis der eksisterer en farve γ, der farver 2 kanter, som forlader $P_{\alpha\beta}$
    Anvend teknikken beskrevet i beviset for punkt 2 i beviset for Sætning 3.15 til at opnå, at γ mangler ved en knude u i $P_{\alpha\beta}$ og farver en kant, som forlader $P_{\alpha\beta}$
Ellers
    succes $\leftarrow$ falsk
    dummy $\leftarrow \alpha$
    returner(dummy)
Hvis $u \neq x$
    Kald den knude, der kommer lige før u i $P_{\alpha\beta}$, v
    Kald kanten mellem u og v i $P_{\alpha\beta}$ e_{ny}
    Fjern farven fra e_{ny}
    Farv de resterende kanter i $P_{\alpha\beta} \cup \{e\}$ skiftevis med α og β (β først)
    $x \leftarrow u$
    $y \leftarrow v$
    $e \leftarrow e_{\text{ny}}$
succes $\leftarrow$ sand
returner(γ)

<u>*ToVeje*</u>(G', x, y, e, α, β, γ)
Lad farven δ mangle ved en knude $u \in P_{\alpha\beta} \setminus P_{\gamma\beta}$ og en knude $v \in P_{\gamma\beta} \setminus P_{\alpha\beta}$
{*ToVeje* bliver kun kaldt, hvis δ, u og v eksisterer}
Lad s være x's nabo i $P_{\alpha\beta}$ og $P_{\gamma\beta}$
Lad $\varepsilon \in \overline{\varphi}(s)$ {ε eksisterer, idet $q \geq \Delta(G)+1$}
Kald den maksimale alternerende (δ,ε)-vej fra s P_s
Ombyt δ og ε langs P_s
Hvis P_s *ikke* ender i u {$\delta \in \overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(s)$, og $u, s \in P_{\alpha\beta}$}
    EnVej(x, y, e, α, β, succes)
Ellers {P_s ender *ikke* i v — d.v.s. $\delta \in \overline{\varphi}(v) \cap \overline{\varphi}(s)$, og $v, s \in P_{\gamma\beta}$}
    EnVej(x, y, e, γ, β, succes)

6.2 Algoritmens korrekthed

Hvis $\Delta(G) \leq 2$, består G af disjunkte veje og/eller kredse. I det tilfælde kan G let farves optimalt — f.eks. v.h.a. dybde-først-søgning.

Hvis $\Delta(G) \geq 3$, afsættes i første omgang $q = \lfloor \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3} \rfloor$ farver til at farve G med. Da $\Delta(G) \geq 3$, er $q \geq \Delta(G)+1$. Kanterne i G farves én for én evt. ved at ændre på farvningen af nogle af de allerede farvede kanter.

Til enhver tid betegner G' grafen bestående af knuderne i G, de hidtil farvede kanter og den aktuelle ufarvede kant. Kun når G' ikke kan farves med q farver — d.v.s. $\chi'(G') = q+1$ — tages en ny farve $q \leftarrow q+1$ i brug. D.v.s. hvis $\chi'(G) > \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3}$, anvendes netop $\chi'(G)$ farver, og ellers anvendes $\lfloor \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3} \rfloor \leq \lfloor \frac{7}{6}\chi'(G) + \frac{2}{3} \rfloor$ farver.

Når en ny kant $e \in E(x,y)$ skal farves, vælges en farve $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$ og en farve $\beta \in \overline{\varphi}(y)$. Hvis det er muligt, vælges de to farver, så $\alpha = \beta$. Rutinen *FarvKant* farver e med en af farverne $1, 2, \ldots, q$, hvis det er muligt — d.v.s. hvis G' kan farves med q farver. Først kaldes rutinen *EnVej*, som farver e, hvis $\alpha = \beta$, hvis $P_{\alpha\beta}$ ikke ender i y, eller hvis $P_{\alpha\beta}$ indeholder to knuder, som mangler den samme farve.

Da $q + 1 > \frac{7}{6}\Delta(G) + \frac{2}{3}$, kan $\chi'(G)$ i Lemma 3.13 erstattes af $q+1$, idet antagelsen om, at e er kritisk kun bruges til at opnå, at grafen kan $(\chi'(G)-1)$-farves. Heraf fås, at $(\overline{\varphi}(u) \cap \overline{\varphi}(v) = \emptyset$ for alle $u, v \in P_{\alpha\beta}) \Rightarrow |P_{\alpha\beta}| < 7$. D.v.s. hvis *EnVej* ikke farver e, da er $\alpha \neq \beta$, $P_{\alpha\beta}$ ender i y, og $|P_{\alpha\beta}| \leq 5$.

Hvis det ikke lykkes *EnVej* at farve e, kaldes rutinen *Forlad*. Hvis der findes en farve γ, som mangler ved en knude i $P_{\alpha\beta}$, og som farver en kant, der forlader $P_{\alpha\beta}$, eller hvis der findes en farve γ, som farver mindst to kanter, der forlader $P_{\alpha\beta}$, vil γ, når *Forlad* returnerer, mangle ved x og farve en kant, som forlader $P_{\alpha\beta}$. Dette kan lade sig gøre iflg. beviset for Sætning 3.15. Hvis det lykkes *Forlad*-rutinen at opnå, at en farve γ mangler ved x og farver en kant, som forlader $P_{\alpha\beta}$, sætter den succes lig sand. Ellers sætter den succes lig falsk.

Der gælder, at e kan farves med en af farverne $1, 2, \ldots, q$, hvis og kun hvis *Forlad* returnerer sand. Det kan vises på følgende måde. *Forlad* bliver kun kaldt, hvis intet par af knuder i $P_{\alpha\beta}$ mangler den samme farve. Lad H være delgrafen af G' induceret af knuderne i $P_{\alpha\beta}$. Da $|V(H)|$ er ulige, kan hver farve anvendes på højst $\frac{1}{2}(|V(H)|-1)$ af kanterne i H. D.v.s. hvis e kan farves med en af farverne $1, 2, \ldots, q$, da er $q \geq |E(H)|/(\frac{1}{2}(|V(H)|-1))$, og

$$q \geq \frac{|E(H)|}{\frac{1}{2}(|V(H)|-1)}$$
$$\Updownarrow$$
$$|E(H)| \leq q\frac{1}{2}(|V(H)|-1).$$

H indeholder altså højst $q\frac{1}{2}(|V(H)|-1)-1$ farvede kanter. Der må derfor være en farve γ, som farver højst $\frac{1}{2}(|V(H)|-1)-1$ af kanterne. D.v.s. γ-kanterne i H er incidente med højst $|V(H)|-3$ af knuderne i H. Da hver farve mangler ved højst én af knuderne i H, må der altså være mindst to γ-kanter, som forlader $P_{\alpha\beta}$. D.v.s. hvis *Forlad* sætter succes lig med falsk, da kan q-farvningen ikke udvides til at omfatte e.

Hvis derimod *Forlad* sætter succes lig sand, da er der, når *Forlad* returnerer, en farve γ, som mangler ved en knude i $P_{\alpha\beta}$, og som farver en kant, som forlader $P_{\alpha\beta}$. Iflg. punkt 1 i beviset for Sætning 3.15 kan e dermed inkluderes i q-farvningen.

Hvis *Forlad* returnerer falsk, gør *FarvKant* derfor det samme, og q sættes lig $q+1$, hvorefter e farves med q.

Hvis *Forlad* derimod returnerer sand, kaldes *EnVej* nu med γ og β i stedet for α og β. Hvis det stadig ikke lykkes at farve e, indeholder $P_{\gamma\beta}$ ligesom $P_{\alpha\beta}$ højst 5 knuder. Hvis $P_{\alpha\beta} \subseteq P_{\gamma\beta}$, kan der ikke være nogen γ-kanter, som forlader $P_{\alpha\beta}$. Der må derfor gælde, at $|P_{\alpha\beta}| = 5$ og $|P_{\alpha\beta} \setminus P_{\gamma\beta}| = 2$.

Hvis $|P_{\gamma\beta}| = 3$, svarer det til tilfældet $K_{\gamma\beta} \subset K_{\alpha\beta}$ i beviset for punkt 1 i beviset for Sætning 3.15. Ved at ombytte γ og β langs $P_{\gamma\beta}$ kan man opnå, at $|P_{\alpha\gamma}| > 5$, eller at $P_{\alpha\gamma}$ ikke ender i y. D.v.s. enten ender $P_{\alpha\gamma}$ ikke i y, eller også indeholder $P_{\alpha\gamma}$ to knuder, som mangler den samme farve. D.v.s. e kan nu farves v.h.a. rutinen *EnVej*.

Hvis $|P_{\gamma\beta}| = 5$, er $|P_{\alpha\beta} \cup P_{\gamma\beta}| = 7$. Iflg. Lemma 3.13 vil der derfor være to forskellige knuder $u, v \in P_{\alpha\beta} \cup P_{\gamma\beta}$, som mangler den samme farve δ. Dermed kan e iflg. Lemma 3.8 inkluderes i q-farvningen. Det klares af rutinen *ToVeje*.

ToVeje bliver kun kaldt, hvis *EnVej* fejlede i at farve e, både da den blev kaldt med α og β, og da den blev kaldt med γ og β. Dermed er der ikke to forskellige knuder i $P_{\alpha\beta}$, der mangler den samme farve. Det samme gælder $P_{\gamma\beta}$. Det betyder, at x's nabo s i $P_{\alpha\beta}$ og $P_{\gamma\beta}$

er forskellig fra både u og v, idet $s \in P_{\alpha\beta} \cap P_{\gamma\beta}$. Det betyder også, at $\delta \neq \alpha, \beta, \gamma$, og at $\varepsilon \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dermed indeholder den maksimale alternerende (δ,ε)-vej P_s ikke nogen af kanterne i $P_{\alpha\beta}$ eller $P_{\gamma\beta}$. D.v.s. efter at farverne er blevet ombyttet langs P_s, gælder der stadig, at $u \in P_{\alpha\beta}$ og $v \in P_{\gamma\beta}$.

6.3 Algoritmens tidskompleksitet og pladsforbrug

I dette afsnit analyseres algoritmens pladsforbrug og tidskompleksitet. Der gives så mange implementationsdetaljer, som det er nødvendigt for analysen. Der anvendes O-notation og tages ikke hensyn til, hvilke konstanter der ligger gemt i denne (men de er ikke store). Derfor gøres der ikke noget ud af optimering.

Lad i dette afsnit $n = |V(G)|$ og $m = |E(G)|$.

6.3.1 Datastrukturer

Grafen G repræsenteres v.h.a. adjacenslister. D.v.s. knuderne nummereres fra 1 til n, og for hver knude v opbevares en liste med $d(v)$ elementer, som hver indeholder nummeret på en nabo til v. For at have hurtig adgang til de enkelte adjacenslister benyttes et array med n pladser. På den i'te plads i dette array opbevares en pointer til starten af adjacenslisten for knude nr. i.

For hver farve $\delta \in \Phi$ opretholdes en liste bestående af de kanter, som er farvet med δ. Desuden opretholdes en liste bestående af de kanter, som endnu ikke er blevet farvet. Disse $q + 1$ lister kaldes *farvelister* og er dobbeltkædede. Hvert element i en farveliste har en pointer til starten af listen, hvor farven er angivet. For at have hurtig adgang til de enkelte farvelister benyttes et array med $q + 1$ pladser. På den i'te plads i dette array opbevares en pointer til starten af farvelisten for farven i, hvis $1 \leq i \leq q$, og til listen af ufarvede kanter, hvis $i = q + 1$.

Antag, at knuderne u og v er naboer i G. Da findes en repræsentation af kanten mellem u og v i u's og v's adjacenslister og i en af farvelisterne. Mellem hvert par af disse tre elementer findes en pointer i hver retning.

Undervejs i algoritmen anvendes *farvearrays*. Et farvearray knyttes til en bestemt knude v, og er et array A_v af længde q, hvor $A_v[i] = 1$, hvis $i \in \varphi(v)$, og $A_v[i] = 0$ ellers.

6.3.2 Tidskompleksitet

De grundlæggende operationer

Den aktuelle ufarvede kant e kan farves med en farve α i tid $O(1)$ på flg. måde. Først slettes elementet svarende til e i listen af ufarvede kanter og indsættes i α-listen. Dette kan gøres i tid $O(1)$. V.h.a. af pointerne fra dette element til de to tilsvarende i adjacenslisterne, kan man i tid $O(1)$ få adgang til og opdatere pointerne fra disse to elementer til elementet i farvelisten.

For en mængde V af knuder kan man i tid $O(|V|\,\Delta)$ identificere to knuder i V og en farve, der mangler ved begge knuder, eller afgøre, at intet par af knuder i V mangler den samme farve. Til dette formål oprettes et farvearray A_v for hver knude $v \in V$. For hver knude $v \in V$ skrives 0 på hver plads i A_v. Derefter løbes v's adjacensliste igennem, og for hver kant e i listen skrives 1 på plads nr. $\varphi(e)$ i A_v. Derefter undersøges det plads for plads, om der er to arrays, der indeholder et 0 på den samme plads. Hver adjacensliste har længde $O(\Delta)$, og iflg. Sætning 1.31 er $q \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$.

En alternerende (α,β)-vej kan findes i tid $O(n)$ på flg. måde. Først konstrueres grafen $G'[\alpha,\beta]$ bestående af knuderne i G og de kanter i G, som indtil videre er blevet farvet med enten α eller β. $G'[\alpha,\beta]$ repræsenteres ligesom G v.h.a. adjacenslister. Hver kant i $G'[\alpha,\beta]$ har en pointer til den tilsvarende kant i farvelisten. Da farvningen af G' hele tiden er ægte, indeholder $G'[\alpha,\beta]$ højst n kanter. Ved at løbe α-farvelisten og β-farvelisten igennem og tilføje kanterne til $G'[\alpha,\beta]$ i den rækkefølge, de forekommer i i de to farvelister, kan $G'[\alpha,\beta]$ altså konstrueres i tid $O(n)$. Da $G'[\alpha,\beta]$ indeholder maksimalt n kanter, og hver adjacensliste i G' indeholder højst to elementer, kan $P_{\alpha\beta}$ nu findes i tid $O(n)$. Ved hjælp af pointerne fra kanterne i $G'[\alpha,\beta]$ til de tilsvarende kanter i farvelisterne kan hver kant omfarves i tid $O(1)$. Det *at ombytte farverne langs en alternerende vej kan dermed gøres i tid $O(n)$.*

FarvGraf

Ved at tælle elementerne i adjacenslisterne og for hver ny liste sammenligne længden med længden af den hidtil længste liste kan man i tid $O(m)$ beregne $\Delta(G)$, hvis $\Delta(G)$ ikke allerede er blevet beregnet og gemt, samtidig med at adjacenslisterne blev bygget.

Hvis $\Delta(G) \leq 2$, farves grafen i tid $O(m+n)$ ved hjælp af f.eks. dybde-først-søgning ([16, s. 477–479]). Antag derfor, at $\Delta(G) \geq 3$.

I starten befinder alle kanterne i G sig i farvelisten for de kanter, der endnu ikke er farvede. Herfra tages de én for én.

For hver kant $e \in E(x, y) \subseteq E(G)$ bestemmes farver α og β, så $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$, og $\beta \in \overline{\varphi}(y)$, og om muligt så $\alpha = \beta$. Det kan gøres i tid $O(\Delta)$.

For hver kant i G kaldes *Farvkant* 1 gang.

For at bevise, at tidskompleksiten for *FarvGraf* er $O(m(n + \Delta))$, er det altså tilstrækkeligt at vise, at tidskompleksiteten af *FarvKant* er $O(n + \Delta)$.

FarvKant

Rutinen *FarvKant* udfører en eller flere af flg. handlinger.

- Rutinen *EnVej* kaldes højst 3 gange.
- Rutinen *Forlad* kaldes højst 1 gang.
- Rutinen *ToVeje* kaldes højst 1 gang.
- Højst to maksimale alternerende veje identificeres. Det kan gøres i tid $O(n)$.
- Farverne ombyttes langs højst én alternerende vej. Det kan gøres i tid $O(n)$.
- Den aktuelle ufarvede kant farves. Det kan gøres i tid $O(1)$.

Resten af rutinen *FarvKant* kan udføres i tid $O(1)$.

I det følgende vises, at tidskompleksiteten af hver af de tre rutiner, som *FarvGraf* kalder, er $O(n + \Delta)$. Dermed er kompleksiteten af *FarvKant* $O(n + \Delta)$.

EnVej

Rutinen *EnVej* udfører en eller flere af flg. handlinger.

- Den aktuelle ufarvede kant farves i tid $O(1)$.
- Den maksimale alternerende (α,β)-vej $P_{\alpha\beta}$ fra x findes. Det kan gøres i tid $O(n)$.
- Farverne ombyttes langs $P_{\alpha\beta}$. Det tager ligeledes tid $O(n)$.
- To knuder u og v i $P_{\alpha\beta}$, som mangler den samme farve γ, identificeres, eller det konstateres, at u og v ikke findes. Det kan gøres i tid $O(\Delta)$.

- Der vælges en knude z imellem u og v i $P_{\alpha\beta}$, og en farve δ, som mangler ved z. Det kan gøres i tid $O(\Delta)$. Den maksimale alternerende (γ,δ)-vej fra z findes, og γ og δ ombyttes langs denne. Dette kan gøres i tid $O(n)$. Højst én af knuderne u og v er lig x eller y, og der er derfor højst 2 knuder mellem u og v i $P_{\alpha\beta}$. D.v.s. z er nabo til enten u eller v. Dermed vælges z kun én gang. Alt i alt tager denne handling altså tid $O(n + \Delta)$.

Resten af rutinen *EnVej* kan udføres i konstant tid. Rutinen kan altså alt i alt udføres i tid $O(n + \Delta)$.

Forlad

Rutinen *Forlad* udfører en eller flere af flg. handlinger.

- Det undersøges, om der findes en farve γ, som mangler ved en knude i $P_{\alpha\beta}$, og som farver en kant, der forlader $P_{\alpha\beta}$. Det kan gøres i tid $O(\Delta)$ på flg. måde. Der konstrueres et farvearray A_v for hver knude $v \in P_{\alpha\beta}$. Der er højst 5 knuder i $P_{\alpha\beta}$, så dette kan gøres i tid $O(\Delta)$. Desuden opbygges et lignende array A_P for hele $P_{\alpha\beta}$. Først skrives 0 på hver af de q pladser i A_P. For hver knude u i $P_{\alpha\beta}$ gøres derefter følgende. For hver kant e i adjacenslisten undersøges det, om endepunktet $v \neq u$ tilhører $P_{\alpha\beta}$. Da $|P_{\alpha\beta}| \leq 5$, kan det gøres i tid $O(1)$. Hvis $v \notin P_{\alpha\beta}$, skrives 1 på plads nr. $\varphi(e)$ i A_P. Adjacenslisterne har længde $O(\Delta)$, så A_P kan konstrueres i tid $O(\Delta)$. For hvert i, $1 \leq i \leq q$, hvor $A_P[i] = 1$, undersøges det, om et af de fem andre arrays har et 0 på plads i. Dette kan ligeledes gøres i tid $O(\Delta)$.
- Det undersøges, om der eksisterer en farve γ, som farver to kanter, der forlader $P_{\alpha\beta}$. Ved for hver knude i $P_{\alpha\beta}$ at lave arrays som A_P i det foregående punkt kan dette gøres i tid $O(\Delta)$.
- V.h.a. teknikken beskrevet i beviset for punkt 2 i beviset for Sætning 3.15 opnås, at γ mangler ved en knude i $P_{\alpha\beta}$ og farver en kant, som forlader $P_{\alpha\beta}$. Det indebærer følgende.

  For en eller to knuder afgøres det, hvilke farver der mangler ved den pågældende knude. Det tager tid $O(\Delta)$.

  Der findes en eller tre maksimale alternerende veje, og farverne ombyttes langs en eller to af vejene. Det tager tid $O(n)$.

  For den ene alternerende vej afgøres det eventuelt, hvilken af vejens γ-kanter, der er placeret som den sidste på vejen. Det kan afgøres, samtidig med at vejen findes, ved hele tiden at huske den sidste γ-kant, som er blevet inkluderet i vejen.

Resten af rutinen kan udføres i konstant tid. Rutinen *Forlad* kan altså alt i alt udføres i tid $O(n + \Delta)$.

ToVeje

Hvis *ToVeje* bliver kaldt, betyder det, at der ikke findes to knuder i $P_{\alpha\beta}$ eller to knuder i $P_{\gamma\beta}$, som mangler den samme farve, men at der i $P_{\alpha\beta}$ og $P_{\gamma\beta}$ tilsammen findes to knuder, der mangler den samme farve. Desuden er $|P_{\alpha\beta}| = |P_{\gamma\beta}| = 5$, og da de to veje deler netop 3 knuder, betyder det, at $|P_{\alpha\beta} \setminus P_{\gamma\beta}| = |P_{\gamma\beta} \setminus P_{\alpha\beta}| = 2$. De to knuder, der mangler den samme farve, skal altså søges blandt 4 knuder. De to knuder u og v og farven δ, som mangler ved u og v, kan dermed findes i tid $O(\Delta)$.

Når u og v er identificerede, findes en maksimal alternerende vej, og farverne ombyttes langs vejen. Det tager tid $O(n)$. Derefter kaldes *EnVej*, hvilket tager tid $O(n + \Delta)$.

Tidskompleksiteten for *ToVeje* er altså $O(n + \Delta)$.

6.3.3 Pladsforbrug

I analysen af algoritmens pladsforbrug antages det, at en pointer optager $O(1)$ plads.

Adjacenslisterne, der repræsenterer G, indeholder tilsammen $2m$ elementer af konstant størrelse, og farvelisterne indeholder tilsammen m elementer ligeledes af konstant størrelse. Derudover anvendes undervejs i algoritmen $O(1)$ farvearrays ad gangen. Længden af et farvearray tilhører $O(\Delta)$ og dermed $O(m)$. Endelig konstrueres der af og til maksimale alternerende veje. En sådan vej indeholder højst m kanter, og der anvendes kun et konstant antal af disse veje ad gangen. Det giver i alt et pladsforbrug på $O(m)$.

6.4 Muligheder for at generalisere algoritmen

I [9] og [10] beskrives algoritmer, der ligesom algoritmen *FarvGraf* har køretid $O(|E|(|V| + \Delta))$ og pladsforbrug $O(|E|)$, og som anvender $\max\{\chi', \lfloor \frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1} \rfloor\}$ farver for h.h.v. $m = 9$ og $m = 11$. Fælles for de tre algoritmer er, at de for hver kant e i grafen enten farver e med en af de q farver, der allerede er i brug, eller identificerer et certifikat for, at grafen ikke kan q-farves, i form af en delgraf H, så $q < |E(H)|/\lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor$. For $m \geq \Delta$ er startværdien af q lig $\Delta + 1$. D.v.s. hvis det samme princip kan bruges for vilkårligt store m, da gælder der for enhver multigraf G, at den enten kan farves med $\Delta(G) + 1$ farver eller indeholder en delgraf H, så $\chi'(G) = \lceil\, |E(H)| \,/\, \lfloor \frac{1}{2}|V(H)| \rfloor \,\rceil$. D.v.s. da er Goldbergs formodning sand.

Desværre er algoritmen i [10] langt mere kompliceret end algoritmen i [9], som igen er betydeligt mere kompliceret end algoritmen *FarvGraf* beskrevet i dette kapitel. D.v.s. hvis der findes algoritmer af samme slags for større værdier af m, må man forvente, at de vil være meget besværlige at konstruere.

Ligesom rutinen *FarvKant* i dette kapitel evt. ombytter farverne langs $P_{\gamma\beta}$ for at opnå, at $P_{\alpha\gamma}$ enten indeholder mere end 5 knuder eller ikke ender i y, benytter algoritmen i [9] sig af forskellige rutiner, der enten farver den aktuelle ufarvede kant e, eller ud fra en given forbindelseskæde skaber en, der er længere eller ikke ender i y. For hver ny forbindelseskæde undersøges det, om knuderne i den nye forbindelseskæde inducerer en delgraf, der viser, at $\chi' > q$. Denne proces stopper senest, når den nye forbindelseskæde indeholder mindst m knuder, for da findes der to knuder i kæden, der mangler den samme farve, og dermed er der en kendt polynomiel algoritme til at inkludere e i q-farvningen.

Forfatterne til [9] foreslår i deres konklusion, at der findes en polynomiel algoritme, der for et vilkårligt stort m farver multigrafer med $\max\{\chi', \lfloor\frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1}\rfloor\}$ farver. D.v.s. at der findes en polynomiel algoritme, der farver multigrafer med $\max\{\chi', \Delta + 1\}$ farver. Det kræver en lidt anden slags algoritme end *FarvGraf* og de to algoritmer i [9] og [10], idet disse algoritmer behandler forbindelseskæder af forskellig længde forskelligt. Men forfatterne til [9] gør opmærksom på, at hvis der findes en polynomiel algoritme, der for en vilkårlig forbindelseskæde enten udvider kæden eller farver den aktuelle ufarvede kant, da findes der en polynomiel algoritme, som for et vilkårligt stort m farver enhver multigraf med $\max\{\chi', \lfloor\frac{m}{m-1}\Delta + \frac{m-3}{m-1}\rfloor\}$ farver — også selvom m er større end antallet af knuder i grafen. Det ses af følgende iagttagelser.

Hvis en forbindelseskæde indeholder samtlige knuder i G, og der ikke findes to knuder i kæden, som mangler den samme farve, da er q farver ikke tilstrækkeligt til at farve grafen. I dette tilfælde gælder nemlig, at

$$\begin{aligned}
& 2 + \sum_{v \in V(G)} (q - d(v)) \leq q \\
\Updownarrow \quad & \\
& 2 + |V(G)|\, q - 2|E(G)| \leq q \\
\Updownarrow \quad & q(|V(G)| - 1) \leq 2|E(G)| - 2 \\
\Updownarrow \quad & \\
& q \leq \frac{|E(G)|}{\frac{1}{2}(|V(G)| - 1)} - \frac{2}{|V(G)| - 1}
\end{aligned}$$

Da $|V(G)|$ i dette tilfælde er ulige (en forbindelseskæde indeholder altid et ulige antal knuder), betyder ovenstående, at

$$q \leq \frac{|E(G)|}{\lfloor\frac{1}{2}|V(G)|\rfloor} - \frac{2}{|V(G)| - 1} < \lceil\frac{|E(G)|}{\lfloor\frac{1}{2}|V(G)|\rfloor}\rceil \leq \chi'.$$

D.v.s. grafen kan ikke q-farves.

Hvis en forbindelseskæde indeholder samtlige knuder i G pånær én, og der ikke findes to knuder i kæden, som mangler den samme farve, da er q farver ligeledes utilstrækkeligt til at farve grafen: Hvis en farve γ mangler ved en knude i en forbindelseskæde, vil der være enten mindst to eller ingen γ-kanter, som forlader kæden. Hvis en forbindelseskæde K indeholder alle knuder i grafen pånær én, da kan der ikke være to kanter af samme farve, som forlader K. Hvis forbindelseskæden ikke indeholder to knuder, der mangler den samme farve, ses det derfor af argumentationen i afsnit 6.2, at grafen ikke kan q-farves.

D.v.s. hvis en forbindelseskæde indeholder alle knuder i grafen (evt. pånær én), da gælder der enten, at grafen ikke kan farves med q farver — d.v.s. en ny farve kan tages i brug — eller at q-farvningen kan udvides til at omfatte den aktuelle ufarvede kant v.h.a. en kendt polynomiel rutine.

6.5 Bemærkninger

Iflg. [10] findes der i [8] en beskrivelse af en polynomiel algoritme, som farver multigrafer med $\max\{\chi', \lfloor\frac{5}{4}\Delta + \frac{1}{2}\rfloor\}$ farver (men den er skrevet på japansk).

I [9] og [10] findes der, som tidligere bemærket, beskrivelser af algoritmer, som i tid $O(|E|(|V| + \Delta))$ og med pladsforbrug $O(|E|)$ farver en multigraf $G = (V, E)$ med henholdsvis $\max\{\chi', \lfloor\frac{9}{8}\Delta + \frac{3}{4}\rfloor\}$ $\max\{\chi', \lfloor\frac{11}{10}\Delta + \frac{4}{5}\rfloor\}$ farver.

Kapitel 7

Listefarvning

Det er klart, at det listekantkromatiske tal for enhver multigraf G er mindst lige så stort som det kantkromatiske tal, idet samtlige farvelister kunne bestå af tallene $1, 2, \dots, \chi'(G)$. Det vides ikke, om det listekantkromatiske tal i nogle tilfælde kan være større end det kantkromatiske tal, men iflg. [14] er flg. formodning tilsyneladende blevet formuleret uafhængigt af Vizing (i 1975), af Gupta, af Albertson og Collins og af Bollobás og Harris (i 1985) og er kendt som listefarvningsformodningen.

Formodning 7.1 *For enhver multigraf G gælder, at $\chi'_{liste}(G) = \chi'(G)$.*

I dette kapitel vises, at for todelte grafer er formodningen sand (Sætning 7.8) — d.v.s. enhver todelt graf er Δ-listekantfarvelig. Derefter vises Sætning 7.10, som er stærkere end Sætning 7.8, idet den siger, at hvis $f(e) = \max\{d(x), d(y)\}$ for alle kanter $e \in E(x, y)$ i en todelt graf G, da er G f-listefarvelig. Ved hjælp af dette resultat vises, at hvis $f(e) = \max\{d(x), d(y)\} + \lfloor \frac{1}{2} \min\{d(x), d(y)\} \rfloor$ for alle kanter $e \in E(x, y)$ i en vilkårlig graf G, da er G f-listefarvelig (Sætning 7.12). D.v.s. det listekantkromatiske tal er ligesom det kantkromatiske tal begrænset af $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$.

Fremstillingen i dette kapitel ligger tæt op ad [17].

7.1 Todelte grafer

I dette afsnit ses på todelte grafer. For en todelt graf med todeling (X, Y) skelnes der mellem de to mængder X og Y. Det er uden betydning, hvilken af de to mængder, der kaldes X, og hvilken, der kaldes Y; man skal bare være konsekvent. Når der skrives $e \in E(x, y)$, antages det, at $x \in X$, og $y \in Y$.

Definition 7.2 *Lad G være en todelt graf med todeling (X, Y), lad $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$ være en farvning af G, og lad e_1 og e_2 være kanter i G. Da siges e_1 at* se *e_2, hvis e_1 og e_2 har et fælles endepunkt i X, og $\varphi(e_1) > \varphi(e_2)$, eller hvis e_1 og e_2 har et fælles endepunkt i Y, og $\varphi(e_1) < \varphi(e_2)$. "$e_1$ ser e_2" skrives også $e_1 \to e_2$.*

Definition 7.3 *Lad G være en todelt graf, og lad $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$ være en farvning af G. En* kerne *i G m.h.t. φ er en pardannelse M, så alle kanter i $G - M$ ser mindst én kant i M.*

Lemma 7.4 *Lad G være en todelt graf, og lad $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$ være en farvning af G. Da har G en kerne m.h.t. til φ.*

Bevis Antag, at G har todeling (X, Y). Beviset er ved induktion over $|E(G)|$.

Hvis G indeholder netop én kant e, udgør e en kerne for G.

Antag nu, at $|E(G)| > 1$, og at $G - e$ har en kerne m.h.t. φ for alle $e \in E(G)$.

Lad for enhver knude $v \in V(G)$ e_v være givet ved $\varphi(e_v) = \min_{e \in E(v)}\{\varphi(e)\}$, og lad $M = \{e_x | x \in X\}$. For enhver kant $e \in E(x, y) \subseteq E(G) \setminus E(M)$ gælder, at e ser e_x. Hvis M er en pardannelse, er M derfor en kerne.

Hvis M derimod *ikke* er en pardannelse, findes der et par af kanter $e_{x_1}, e_{x_2} \in E(M)$, som har et fælles endepunkt $y \in Y$. Antag uden tab af generalitet, at $\varphi(e_{x_2}) > \varphi(e_{x_1})$. Da er $\varphi(e_{x_2}) > \varphi(e_y)$. Iflg. induktionshypotesen har $G - e_y$ en kerne K. Enten er e_{x_2} indeholdt i K, eller også ser e_{x_2} en kant i K. I begge tilfælde er K ligeledes en kerne for G. Det ses af det følgende.

Hvis $e_{x_2} \in E(K)$, er K en kerne for G, idet e_y ser e_{x_2}. Hvis $e_{x_2} \notin E(K)$, ser e_{x_2} en kant $e \in E(K)$. Der findes ingen kant $e' \in E(x_2)$, så $\varphi(e') < \varphi(e_{x_2})$. D.v.s. $e \in E(y)$, og $\varphi(e) > \varphi(e_{x_2}) > \varphi(e_y)$. D.v.s. e_y ser også e. Dermed er K en kerne for G. $\square$

Lemma 7.5 *Lad G være en todelt graf, og lad f og g være afbildninger af $E(G)$ ind i $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Da gælder for enhver farvning $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$, at*

$$\begin{array}{l} f(e) \;\geq\; g(e) + \sum_{e \to e'} g(e') \;\; \textit{for alle } e \in E(G) \\ \Downarrow \\ G \textit{ er } (f, g)\textit{-listefarvelig.} \end{array}$$

Bevis Beviset er ved induktion over $\sum_{e \in E(G)} g(e)$.

Lad for enhver kant $e \in E(G)$ A_e betegne e's farveliste. D.v.s. $|A_e| = f(e)$.

Hvis $\sum_{e \in E(G)} g(e) = 0$, er G (f,g)-listefarvelig for enhver funktion $f : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Antag nu, at $\sum_{e \in E(G)} g(e) > 0$, og at G er (f, g')-listefarvelig for alle funktioner $g' : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ med $\sum_{e \in E(G)} g'(e) < \sum_{e \in E(G)} g(e)$.

Antag desuden, at $f(e) \geq g(e) + \sum_{e \to e'} g(e')$ for alle $e \in E(G)$. Da findes der en farve α og en kant $e \in E(G)$, så $\alpha \in A_e$. Lad $E_\alpha = \{e \mid \alpha \in A_e\}$, lad $G_\alpha = (V(G), E_\alpha)$, og lad K_α være en kerne i G_α — iflg. Lemma 7.4 eksisterer K_α.

Hver kant e i K_α tildeles farven α, α fjernes fra A_e, $f(e)$ sættes lig $f(e) - 1$, og $g(e)$ sættes lig $g(e) - 1$. For enhver kant e i K_α er både $f(e)$ og $g(e)$ altså reduceret med netop 1, og $\sum_{e \to e'} g(e')$ er uændret. D.v.s. $f(e) \geq g(e) + \sum_{e \to e'} g(e')$ gælder stadig for enhver kant $e \in K_\alpha$.

Herefter kan α ikke anvendes på nogen anden kant i E_α, så for enhver kant $e \in E_\alpha \setminus E(K_\alpha)$ fjernes α fra A_e, og $f(e)$ sættes lig $f(e) - 1$. Til gengæld er $\sum_{e \to e'} g(e')$ reduceret med mindst 1 for hver af disse kanter, fordi de hver især ser mindst én kant, som tilhører K_α.

For alle kanter $e \in E(G) \setminus E_\alpha$ er $f(e)$ og $g(e)$ uændrede, og $\sum_{e \to e'} g(e')$ er enten uændret eller reduceret.

D.v.s. $f(e) \geq g(e) + \sum_{e \to e'} g(e')$ for alle $e \in E(G)$. Da α er fjernet fra alle farvelister, haves altså nu et problem helt tilsvarende det oprindelige, men hvor $\sum_{e \in E(G)} g(e)$ er reduceret. Dermed kan G ifølge induktionshypotesen (f,g)-listefarves. □

Definition 7.6 *Lad G være en todelt graf, og lad φ være en farvning af G. Da angiver $s_\varphi(e)$ for enhver kant $e \in E(G)$ antallet af kanter, som e ser.*

Korollar 7.7 *Lad G være en todelt graf, lad φ være en farvning af G, og lad f være en afbildning af $E(G)$ ind i $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Da gælder*

$$\begin{array}{l} s_\varphi(e) < f(e) \ \ \textit{for alle kanter } e \in E(G) \\ \Downarrow \\ G \textit{ er } f\textit{-listefarvelig} \end{array}$$

Bevis Antag, at $s_\varphi(e) < f(e)$ for alle $e \in E(G)$. Lad $g(e) = 1$ for alle $e \in E(G)$. Da er $g(e) + \sum_{e \to e'} g(e) = 1 + s_\varphi(e)$ for alle $e \in E(G)$. D.v.s. $f(e) \geq g(e) + \sum_{e \to e'} g(e)$ for alle $e \in E(G)$. Derfor er G iflg. Lemma 7.5 (f,g)-listefarvelig og dermed f-listefarvelig. □

Nu er det let at vise, at Formodning 7.1 er sand for todelte grafer.

Sætning 7.8 *For enhver* todelt *graf G er $\chi'_{liste}(G) = \chi'(G)$.*

Bevis Lad G have todeling (X, Y), og lad $\varphi : E(G) \to \{1, 2, \ldots, \chi'(G)\}$ være en farvning af G. Da gælder for enhver kant $e \in E(x, y) \subseteq E(G)$, at $s_\varphi(e) \leq (\varphi(e) - 1) + (\chi'(G) - \varphi(e)) = \chi'(G) - 1 < \chi'(G)$. Iflg. Korollar 7.7 er G dermed $\chi'(G)$-listefarvelig. □

Lemma 7.9 *Lad G være en todelt graf med todeling (X, Y), hvor Y ikke indeholder nogen isolerede knuder. Da gælder, at*

$$\begin{array}{l} |X| \leq |Y| \\ \Downarrow \\ \textit{Der eksisterer en ikke-tom delmængde } Z \subseteq Y \textit{ og en pardannelse } M \textit{ i } G, \textit{ så} \\ V(M) = Z \cup N(Z) \end{array}$$

Bevis Antag, at $|X| \leq |Y|$. Da er det klart, at $|N(Y)| \leq |X| \leq |Y|$. Lad Z være en minimal ikke-tom delmængde af Y, så $|N(Z)| \leq |Z|$. Da Y ikke indeholder isolerede knuder, og $Z \neq \emptyset$, er $N(Z) \neq \emptyset$. D.v.s. hvis $|Z| = 1$, er $|N(Z)| = 1$. For $|Z| > 1$ gælder ligeledes, at $|N(Z)| = |Z|$, for hvis $|N(Z)| < |Z|$, og $|Z| > 1$, vil der for enhver knude $z \in Z$ gælde, at $Z' = Z \setminus \{z\}$ opfylder, at $|N(Z')| \leq |Z'|$, og $Z' \neq \emptyset$, hvilket er i modstrid med, at Z er minimal. Altså gælder der, at $|N(Z)| = |Z|$, og $|N(V)| \geq |V|$ for alle $V \subseteq Z$. Iflg. Halls Sætning [18, s. 100] indeholder delgrafen af G induceret af knuderne i $Z \cup N(Z)$ derfor en perfekt pardannelse. □

Sætning 7.10 *Lad G være en todelt graf med todeling (X, Y), og lad*

$$f(e) = \max\{d(x), d(y)\} \textit{ for alle kanter } e \in E(x, y) \textit{ i } G.$$

Da er G f-listefarvelig.

Bevis Ved induktion over $|E(G)|$ vises, at der eksisterer en farvning $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$, så $s_\varphi(e) < f(e)$ for alle kanter $e \in E(G)$. Sætningen følger da af Korollar 7.7.

Hvis $E(G) = \emptyset$, er $s_\varphi(e) < f(e)$ for enhver farvning $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$ opfyldt for alle kanter $e \in E(G)$.

Antag nu, at $E(G) \neq \emptyset$, og at der for alle delgrafer $H \subset G$ eksisterer en farvning φ af H, så $s_\varphi(e) < f(e)$ for alle $e \in E(H)$.

Lad X' og Y' være X og Y, hvorfra alle isolerede knuder er fjernet. Antag uden tab af generalitet, at $|X'| \leq |Y'|$. Iflg. Lemma 7.9 eksisterer der en ikke-tom delmængde Z af

Y' og en pardannelse M, så $V(M) = Z \cup N(Z)$. Lad $f'(e) = \max\{d_{G-M}(x),\ d_{G-M}(y)\}$ for alle $e \in E(x,y) \subseteq E(G-M)$. Iflg. induktionshypotesen har $G-M$ en farvning φ', hvor $s_{\varphi'}(e) < f'(e)$ for alle $e \in E(G-M)$. Lad farvningen φ være defineret ved, at $\varphi(e) = \varphi'(e)$, hvis $e \in E(G-M)$, og $\varphi(e) = \max\{\varphi(E(G-M))\} + 1$, hvis $e \in E(M)$. Da er $s_\varphi(e) \leq s_{\varphi'}(e) + 1$ for alle $e \in E(x,y) \subseteq E(G-M)$, fordi der er højst én kant i M, som er incident med y. Hvis $s_\varphi(e) = s_{\varphi'}(e) + 1$ for en kant $e \in E(x,y)$, da er y indeholdt i $V(M)$. I det tilfælde er også x indeholdt i $V(M)$ p.g.a. måden, M er valgt på. Altså er $f(e) = f'(e) + 1$. D.v.s. $s_\varphi(e) < f(e)$ for alle $e \in E(G-M)$. For alle $e \in E(x,y)$ i M er $s_\varphi(e) = d(y) - 1 < f(e)$. □

7.2 Multigrafer

Hovedresultatet i dette afsnit, Sætning 7.12, følger af Sætning 7.10. Først vises et lemma:

Lemma 7.11 *Lad F, G og H være multigrafer, lad F være todelt og $G = F + H$, og lad*

$$f(e) = \max\{d_G(x) + d_H(y),\ d_H(x) + d_G(y)\} \text{ for alle kanter } e \in E(x,y) \text{ i } G.$$

Da er G f-listefarvelig.

Bevis Det kan antages, at $E(F) \cap E(H) = \emptyset$. Det vises nu, hvordan G kan f-listefarves ved først at farve kanterne i H og derefter kanterne i F.

Da $d_H(v) \leq d_G(v)$ for alle $v \in V(H)$, er $f(e) \geq d_H(x) + d_H(y)$ for alle $e \in E(x,y)$ i H. Derfor kan H f-listefarves, for selvom alle kanter incidente med et par af knuder x og y undtagen én kant $e \in E(x,y)$ er blevet farvet, har e stadig mindst to farver til rådighed. Efter at kanterne i H er blevet farvet, har hver kant $e \in E(x,y)$ i F mindst $f(e) - (d_H(x) + d_H(y)) = \max\{d_G(x) + d_H(y) - (d_H(x) + d_H(y)),\ d_H(x) + d_G(y) - (d_H(x) + d_H(y))\} = \max\{d_F(x), d_F(y)\}$ farver til rådighed. Iflg. Sætning 7.10 kan kanterne i F derfor farves med de farver, der er tilbage i listerne. □

Sætning 7.12 *Lad G være en multigraf, og lad*

$$f(e) = \max\{d(x), d(y)\} + \lfloor \frac{1}{2} \min\{d(x), d(y)\} \rfloor \text{ for alle kanter } e \in E(x,y) \text{ i } G.$$

Da er G f-listefarvelig. D.v.s.

$$\chi'_{liste}(G) \leq \lfloor \frac{3}{2} \Delta(G) \rfloor$$

Bevis Lad $E(X,Y)$ være et maksimum snit i G, og lad $F = (V(G), E(X,Y))$. F er todelt, og for alle knuder $v \in V(G)$ gælder, at $d_F(v) \geq \frac{1}{2}d_G(v)$, for hvis der eksisterer en knude $v \in V(G)$, så $d_F(v) < \frac{1}{2}d_G(v)$, ville $|E(X,Y)|$ blive større, hvis man flyttede v fra den ene side af snittet til den anden, hvilket ville være i modstrid med, at $E(X,Y)$ er et maksimum snit. Lad $H = (V(G), E(G-F))$. Da gælder altså $d_H(v) \leq \frac{1}{2}d_G(v)$ for alle $v \in V(H)$. Lad nu $f(e) = \max\{d_G(x), d_G(y)\} + \lfloor \frac{1}{2}\min\{d(x), d(y)\}\rfloor = \max\{d_G(x) + \lfloor\frac{1}{2}d_G(y)\rfloor, d_G(y) + \lfloor\frac{1}{2}d_G(x)\rfloor\} \geq \max\{d_G(x) + d_H(y),\ d_H(x) + d_G(y)\}$ for alle kanter $e \in E(x,y)$ i G. Iflg. Lemma 7.11 er G f-listefarvelig. D.v.s. $\chi'_{\text{liste}}(G) \leq \Delta(G) + \lfloor\frac{1}{2}\Delta(G)\rfloor = \lfloor\frac{3}{2}\Delta(G)\rfloor$. □

Kapitel 8

Intervalfarvning af todelte grafer

Kantfarvning af grafer kan bruges til at modellere simple planlægningsproblemer. En variant af kantfarvning, som kan være anvendelig i denne forbindelse er intervalfarvning.

Et eksempel er en forældrekonsultation i folkeskolen eller gymnasiet. Til en forældrekonsultation taler hvert forældrepar med et antal af deres barns lærere én for én. Som regel er der afsat et vist tidsrum — f.eks. 10 minutter — til hver samtale. Det er ønskeligt, at hele forløbet afvikles over så kort tid som muligt, og at hverken forældrepar eller lærere har venteperioder mellem hver samtale.

Planlægningen af en forældrekonsultation kan formuleres som en intervalfarvning af en todelt graf G med todeling (X, Y), hvor knuderne i X svarer til lærerne, og knuderne i Y svarer til forældreparrene. To knuder $x \in X$ og $y \in Y$ forbindes med en kant, hvis og kun hvis forældreparret svarende til y skal snakke med læreren svarende til knuden x. Hver farve svarer til et tidsinterval. Det gælder da om at farve G med så få farver som muligt, så farverne ved hver knude danner et interval.

For en biregulær todelt graf med todeling (X, Y) bruges i dette kapitel d_X og d_Y til at betegne valensen af knuderne i henholdsvis X og Y.

Om intervalfarvning af todelte grafer vides følgende.

- Der findes todelte grafer, som ikke kan intervalfarves.
- Ingen biregulær todelt graf G med todeling (X, Y) kan intervalfarves med færre end $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver.
- Enhver regulær todelt graf kan intervalfarves v.h.a. Δ farver.
- Enhver komplet todelt graf med todeling (X, Y) kan intervalfarves med $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver.

- Enhver biregulær todelt graf G med todeling (X, Y) og $d_X = 2$ kan intervalfarves med $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver.

I afsnit 8.1–8.5 uddybes ovenstående 5 punkter, og i afsnit 8.6 undersøges mulighederne for at intervalfarve ikke-komplette biregulære todelte grafer med $d_X = 3$ og $d_Y = 4$ med $d_X + d_Y - \gcd(X, Y) = 6$ farver, idet disse grafer udgør de simpleste uløste tilfælde af intervalfarvningsproblemet for biregulære todelte grafer.

8.1 En todelt graf, som ikke kan intervalfarves

Bjarne Toft har vist, at man ud fra en endelig affin plan af orden 3 kan konstruere en todelt graf, som ikke kan intervalfarves.

En endelig affin plan P af orden 3 har 9 punkter og 12 linier. Gennem hvert punkt går netop 4 linier, og hver linie består af 3 punkter. Hvis man konstruerer en todelt graf G med todeling (X, Y), hvor knuderne i X svarer til punkterne i P, og knuderne i Y svarer til linierne i P, og to knuder x og y forbindes med en kant, hvis og kun hvis punktet svarende til x ligger på linien svarende til y, da fås en biregulær todelt graf med $d_X = 4$ og $d_Y = 3$. Tilføjes nu en knude z til X, som er forbundet med én kant til hver knude i Y, opnås en graf G, som ikke kan intervalfarves. Det ses af det følgende.

Antag til modstrid, at der findes en intervalfarvning φ af G. Da kan det uden tab af generalitet antages, at $\varphi(z) = \{1, 2, \ldots, 12\}$ (det er kun et spørgsmål om, hvad farverne kaldes; der skal være 12 på hinanden flg. farver ved z). Kald linien svarende til knuden forbundet til z med en i-kant l_i. Hvis to linier i P ikke er parallelle, da skærer de hinanden i netop ét punkt i P. D.v.s. for to knuder i $y_1, y_2 \in Y$ svarende til to ikke-parallelle linier i P findes der netop én knude i $X \setminus \{z\}$, som er forbundet til både y_1 og y_2. Hver linie i P er parallel med netop 2 andre linier. D.v.s. hvis l_1, l_{11} og l_{12} er parrallelle, da er l_2 ikke parallel med l_{12}. Modsat gælder, at hvis l_2 er parallel med l_{12}, da er l_1 ikke parallel med både l_{11} og l_{12}. D.v.s. der findes to knuder $y_1, y_2 \in Y$ og en knude $x \in X$ forbundet til både y_1 og y_2, så mindst ét af følgende tre udsagn er sandt "$1 \in \varphi(y_1)$, og $11 \in \varphi(y_2)$", "$1 \in \varphi(y_1)$, og $12 \in \varphi(y_2)$" eller "$2 \in \varphi(y_1)$, og $12 \in \varphi(y_2)$". D.v.s. der findes kanter $e_1 \in E(y_1)$ og $e_2 \in E(y_2)$, så $\varphi(e_2) - \varphi(e_1) \geq 10$. Da $d_Y = 4$, betyder det, at $\min\{\varphi(y_2)\} - \max\{\varphi(y_1)\} \geq 10 - 3 - 3 = 4$. Hvis farvningen skal udgøre et interval ved x, skal der altså være mindst 5 farver repræsenteret ved x, hvilket er umuligt, da $d_X = 4$. Altså kan G ikke intervalfarves.

G indeholder 22 knuder, og $\Delta(G) = 12$. Dermed er G det mindste kendte eksempel på en biregulær todelt graf, som ikke kan intervalfarves. Enhver biregulær todelt graf med $\Delta \leq 3$ kan iflg. [19] intervalfarves. For $4 \leq \Delta \leq 11$ vides det ikke, om der findes biregulære todelte grafer, som ikke kan intervalfarves.

Det, der kendetegner grafen beskrevet i dette afsnit og alle andre kendte eksempler på todelte grafer, som ikke kan intervalfarves, er, at der i den ene af mængderne i todelingen findes knuder både af høj og af lav valens.

I øvrigt er det iflg. [14] bevist i [22], at det er et NP-komplet problem at afgøre, om en given todelt graf kan intervalfarves.

8.2 En nedre grænse

Hvis en biregulær todelt graf G med todeling (X, Y) kan intervalfarves, kræver det mindst $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver. Det bevises i [21] ved hjælp af tælleargumenter. Ideen i beviset er følgende. Hvis man ønsker at farve G med k farver, er der $k - d_X + 1$ mulige intervaller, som kan optræde ved en knude i X. Lad α_i være det antal knuder i X, som intervallet $[i; i + d_X - 1]$ optræder ved. Lad tilsvarende β_i være det antal knuder i Y, som intervallet $[i; i + d_Y - 1]$ optræder ved. Da en farve optræder det samme antal gange ved knuder i X som ved knuder i Y, kan der opstilles ligninger, for hvordan disse α'er og β'er afhænger af hinanden. I artiklen vises det, at dette ligningssystem ikke har nogen løsning, medmindre $k \geq d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$.

Som det ses af de følgende afsnit, kan både biregulære todelte grafer med $d_X = 2$, regulære todelte grafer og komplette todelte grafer intervalfarves med $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver. Den nævnte nedre grænse er altså bedst mulig.

Der findes på den anden side også biregulære todelte grafer, som *ikke* kan intervalfarves med $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver. Et eksempel kan konstrueres ud fra grafen G bestående af to disjunkte kopier af K_7 ([19], [21]). G indeholder 42 kanter, som deles i 7 disjunkte mængder $E_1, E_2, \ldots, E_7$, der hver indeholder 6 kanter. Ved at tilføje 7 knuder $x_1, x_2, \ldots, x_7$ og tilføje x_i til hver kant i E_i opnås en 3-uniform, 6-regulær hypergraf H, som kan 3-faktoriseres, hvis og kun hvis G kan 3-faktoriseres. G kan *ikke* 3-faktoriseres, for det ville indebære, at kanterne i K_7 kunne deles i to lige store mængder, hvilket er umuligt, da K_7 indeholder et ulige antal kanter.

Nu konstrueres en biregulær todelt graf B med todeling (X, Y), hvor $Y = V(H)$. For hver kant $e \in E(H)$ indeholder X en knude, som forbindes med én kant til hver af de tre knuder i e. D.v.s. $|X| = 42$, $|Y| = 21$, $d_X = 3$, og $d_Y = 6$. Hvis B kan intervalfarves med $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y) = 6$ farver, vil intervallet $[1; 6]$ være repræsenteret ved hver knude i Y. Da 21 kanter altså er farvet med farven 1, må intervallet $[1; 3]$ være repræsenteret ved 21 af knuderne i X, og intervallet $[4; 6]$ må være repræsenteret ved de resterende 21 knuder i X. Intervalfarvningen kan altså kun eksistere, hvis X kan deles op i to lige store, disjunkte mængder X_1 og X_2, så $|E(y) \cap E(X_1)| = |E(y) \cap E(X_2)| = 3$ for alle $y \in Y$, d.v.s. hvis H kan faktoriseres i to 3-faktorer. Det er allerede konstateret, at G og dermed H ikke kan 3-faktoriseres. D.v.s. B kan *ikke* intervalfarves v.h.a. kun 6 farver.

8.3 Regulære todelte grafer

Regulære todelte grafer kan iflg. Sætning 1.4 kantfarves med Δ farver. Hvis en regulær graf Δ-farves, vil hver farve optræde ved hver knude — d.v.s. farverne repræsenteret ved hver knude udgør et interval. Altså kan regulære todelt grafer intervalfarves med Δ farver.

8.4 Komplette todelte grafer

I [19] bevises det, at en komplet todelt graf med todeling (X, Y) kan farves med $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y)$ farver. Det vises ved at beskrive, hvordan en sådan graf G kan farves med $d_X + d_Y - d$ farver for ethvert heltal d, som går op i både d_X og d_Y.

Mængden X indeholder d_Y knuder, som inddeles i d_Y/d mængder hver bestående af d knuder. Kald disse mængder $X_1, X_2, \dots, X_{d_Y/d}$. Del på samme måde knuderne i Y op i mængderne $Y_1, Y_2, \dots, Y_{d_X/d}$. Delgrafen G_{ij} af G induceret af knuderne i X_i og Y_j er en d-regulær todelt graf, som iflg. Sætning 1.4 kan farves med d farver. En sådan farvning er en intervalfarvning af G_{ij}, idet hver farve er repræsenteret ved hver knude i G_{ij}. Hvis kanterne mellem X_i og Y_1 tildeles farverne $[(i-1)d+1;\ id]$ for $1 \leq i \leq d_Y/d$, udgør farverne anvendt ved hver knude i X og ved hver knude i Y_1 et interval. Denne farvning kan udvides, så farverne $[(i-1)d+(j-1)d+1;\ id+(j-1)d]$ anvendes på kanterne i G_{ij} for $1 \leq i \leq d_Y/d$ og $1 \leq j \leq d_X/d$. D.v.s. kanterne mellem X_i og Y_1 er farvet med $[(i-1)d+1;\ id]$, kanterne mellem X_i og Y_2 er farvet med $[id+1;\ (i+1)d]$ o.s.v.. Kanterne mellem X_1 og Y_j er farvet med $[(j-1)d+1;\ jd]$, kanterne mellem X_2 og Y_j er farvet med $[jd+1;\ (j+1)d]$ o.s.v.. På den måde bliver alle kanter i G farvet, farverne ved hver knude udgør stadig et interval, og der er anvendt $(d_Y/d)d + ((d_X/d) - 1)d = d_Y + d_X - d$ farver.

8.5 Biregulære todelte grafer, hvor den ene valens er 2

I [19] bevises, at enhver biregulær todelt graf G med todeling (X, Y), hvor $d_X = 2$, og d_Y er lige, kan intervalfarves med d_Y farver. Beviset er baseret på Petersens 2-faktor-sætning, som siger, at enhver d-regulær graf, hvor d er lige, kan 2-faktoriseres.

Ud fra G konstrueres en graf H ved for hver knude $x \in X$ at sammentrække den ene af de to kanter incidente med x. Hvis man opfatter H som en 2-uniform, d_Y-regulær hypergraf, svarer konstruktionen af H ud fra G til at konstruere hypergrafen H i afsnit 8.2 ud fra B i samme afsnit. Da d_Y er lige, kan H ifølge 2-faktor-sætningen 2-faktoriseres. Hver 2-faktor i H består af kredse og/eller loops, og hver kreds/loop svarer til en kreds med dobbelt så mange kanter i G. For hver 2-faktor F_i, $1 \leq i \leq d_y/2$, i H farves de tilsvarende kredse i

G sådan, at hveranden kant i en kreds får farven $2i-1$, og hveranden kant får farven $2i$. Sådan opnås en intervalfarvning af G, som benytter netop d_Y farver.

I [14] bevises v.h.a. induktion over d_Y, at enhver biregulær todelt graf G med todeling (X, Y), hvor $d_X = 2$, og d_Y er ulige, kan intervalfarves med $d_Y + 1$ farver. Her gengives beviset fra [14] kun på skitseform.

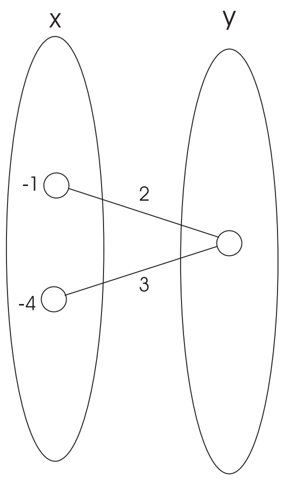
Først bevises en sætning, der har som følge, at enhver $(2n+1)$-regulær graf med højst $2n$ broer, hvor $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, har en 2-faktor. En d_Y-regulær graf H konstrueres ud fra G på samme måde som i beviset i [19] for tilfældet, hvor d_Y er lige. P.g.a. ovennævnte sætning antages det i induktionsskridtet, at H indeholder en 2-faktor. 2-faktoren svarer som før til en mængde C af lige kredse i G, sådan at hver knude i Y er indeholdt i netop én kreds i C. P.g.a. induktionshypotesen, kan det antages, at $G - C$ kan intervalfarves med farverne $1, 2, \ldots, d_Y - 1$. Farvningen af $G - C$ skal derfor blot gøres færdig ved at farve kanterne i C på passende vis. Hveranden kant i hver kreds i C gives farven d_Y, hvorefter hver knude i Y er incident med 1 ufarvet kant og $d_Y - 1$ kanter farvet med enten $1, 2, \ldots, d_Y - 2$ og d_Y eller $2, 3 \ldots, d_Y$. Hver ufarvet kant farves nu med $d_Y - 1$, hvis farverne $1, 2, \ldots, d_Y - 2$ og d_Y allerede er repræsenteret ved dens endepunkt i Y, og med $d_Y + 1$, hvis farverne $2, 3, \ldots, d_Y$ er repræsenteret der. Nu har parrene af kanter incidente med knuderne $X \cap V(C)$ farverne $d_Y - 1$ og d_Y eller d_Y og $d_Y + 1$, og ved knuderne i Y er enten farverne $1, 2, \ldots, d_Y$ eller $2, 3, \ldots, d_Y + 1$ repræsenteret. Altså er G blevet intervalfarvet v.h.a. $d_Y + 1$ farver.

8.6 Biregulære todelte grafer med valenser 3 og 4

Lad i dette afsnit G være en biregulær todelt graf med todeling (X, Y) og med $d_X = 3$ og $d_Y = 4$. Hvis G kan intervalfarves kræver det mindst $d_X + d_Y - \gcd(d_X, d_Y) = 3 + 4 - 1 = 6$ farver.

Lad α_i, $1 \leq i \leq 4$, og β_i, $1 \leq i \leq 3$, være defineret som i afsnit 8.2. I [21] bevises v.h.a. tælleargumenter, at hvis G kan intervalfarves v.h.a. 6 farver, da er $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$.

G kan ifølge Sætning 1.4 kantfarves med 4 farver. I en 4-farvning vil farverne ved hver knude i Y danne et interval. Ved knuder i X, hvor farverne ikke udgør et interval, er farverne $1, 2, 4$ eller $1, 3, 4$ repræsenteret. I nogle tilfælde kan man ændre 4-farvningen til en 6-intervalfarvning ved at ændre farven 4 til farven 0 ved knuder, hvor farverne 1, 2 og 4 er repræsenteret, og ændre farven 1 til farven 5 ved knuder, hvor farverne 1, 3 og 4 er repræsenteret. Herefter vil farverne ved knuderne i Y stadig udgøre intervaller, medmindre der findes en knude i Y, hvor både 1-kanten og 4-kanten er blevet omfarvet. Det sker netop, hvis der findes en knude i Y, som er forbundet med en 1-kant til en knude, hvor farven 2 mangler, og med en 4-kant til en knude, hvor farven 3 mangler. Hvis der findes en 4-farvning af G, hvor en sådan konstellation ikke findes, kan G altså intervalfarves med 6



Figur 8.1: Hvis der findes en 4-farvning af G, som ikke indeholder en konstellation som denne, kan G intervalfarves med 6 farver.

farver. Da man kan foretage vilkårlige permutationer af farverne i 4-farvningen, inden man foretager de ovenfor beskrevne ændringer, er dette udsagn ækvivalent med det følgende. Lad α, β, δ og γ være forskellige farver. Hvis der findes en 4-farvning af G og en tildeling af farverne 1, 2, 3 og 4 til α, β, δ og γ, så ingen knude i Y er forbundet med en α-kant til en knude, hvor β mangler, og med en δ-kant til en knude, hvor γ mangler, da kan G intervalfarves med 6 farver.

Konklusion

Jeg har i dette speciale gennemgået de vigtigste resultater og uløste problemer inden for emnet kantfarvning af grafer. Jeg har forsøgt at give en klar og lettilgængelig fremstilling uden at gå på kompromis med dybden. Andre fremstillinger findes i [23] og [24]. Jeg har desuden beskrevet polynomielle algoritmer, der kantfarver todelte grafer med χ' farver, simple grafer med højst $\chi'+1$ farver og multigrafer med højst $\lfloor \frac{7}{6}\chi' + \frac{2}{3} \rfloor$ farver. Den første algoritme er selvfølgelig optimal m.h.t. antallet af anvendte farver. Da de to sidste anvender højst $\frac{4}{3}\chi'$ farver for $\Delta \geq 3$, er også disse optimale i den forstand, at der ikke eksisterer en polynomiel algoritme, der farver enhver simpel graf med færre end $\frac{4}{3}\chi'$ farver, medmindre P=NP.

Resultaterne gengivet i dette speciale bygger på meget få grundlæggende principper. De fleste af beviserne anvender alternerende veje, en del anvender vifter, og nogle få anvender acceptable veje. Man kan overveje, om disse principper er tilstrækkelige til at be- eller afkræfte de mange formodninger, der findes inden for området kantfarvning, eller om der skal helt nye teknikker i brug. Jeg ved det ikke.

Da de fleste af formodningerne, som behandles i dette speciale, drejer sig om grafer med $\chi' \geq \Delta + 2$ har jeg prøvet at sammenfatte, hvad resultaterne og formodningerne i specialet siger om en delmængde af disse grafer: grafer med $\chi' = \Delta + 2$ og $\mu = 2$. Jeg har kun brugt lidt tid på denne del af specialet, og der er formentlig meget mere at sige om disse grafer.

Motiveret af Andersens formodning har jeg vist, at for en kritisk graf med $\chi' \geq \Delta + 2$ opfylder enhver $(\chi' - 1)$-farvning af grafen minus én kant, at de to maksimale vifter ved kantens endepunkter sammen med alle knudedisjunkte — bortset fra de to første knuder — maksimale acceptable veje udgør en struktur, hvori intet par af knuder mangler den samme farve. Andersen har allerede selv foretaget en tilsvarende kombination af vifter og forbindelseskæder. Blot behøver forbindelseskæderne ikke at være disjunkte. Det er desværre ikke lykkedes mig at afgøre, om der findes kritiske grafer med $\chi' \geq \Delta + 2$, hvor disse kombinationsstrukturer indeholder flere knuder end en acceptabel vej eller en forbindelseskæde alene.

Notation

Generelt bruges små bogstaver til at betegne enkelte elementer og store bogstaver til at betegne mængder.

I dette afsnit betegner G og H grafer, x og y betegner knuder, e er en kant, og E er en mængde af kanter.

$\mathbb{N}$ betegner mængden af positive heltal.
$\mathbb{Z}$ er mængden af heltal.
$\subseteq$ betyder "ægte eller uægte delmængde af".
$\subset$ betyder "ægte delmængde af".
$\gcd(x, y)$ betyder største fælles divisor af heltallene x og y.
$[i; j]$, hvor i og j er heltal, betegner intervallet $\{i, i+1, \ldots, j\}$.

$G = (V, E)$ betyder, at G er en graf med knuder V og kanter E.

$H \subseteq G$ betyder, at H er en delgraf af G.
$H \subset G$ betyder, at H er en ægte delgraf af G.

$G - e$ betyder grafen med knuder $V(G)$ og kanter $E(G) \setminus \{e\}$.
$G - E$ betyder grafen med knuder $V(G)$ og kanter $E(G) \setminus E$.
$G - x$ betyder grafen induceret af knuderne i $V(G) \setminus \{x\}$.
$G - X$ betyder grafen induceret af knuderne i $V(G) \setminus X$.
$G - H$ betyder grafen med knuder $V(G)$ og kanter $E(G) \setminus E(H)$.
$G + H$ betyder grafen med knuder $V(G) \cup V(H)$ og kanter $E(G) \cup E(H)$.

$d(x)$ betegner valensen af x. Ved at skrive $d_G(x)$ præciseres, at der er tale om valensen af x i grafen G.
$d(X)$, hvor X er en mængde af knuder i en graf G, betegner antallet af kanter mellem X og $V(G) \setminus X$.
$\Delta(G)$ betyder $\max_{x \in G}\{d(x)\}$. Hvor der er ikke kan opstå tvivl om, hvilken graf der er tale om, bruges af og til blot Δ.

$\mu(x, y)$ angiver antallet af kanter mellem knuderne x og y. Ved at skrive $\mu_G(x, y)$ præciseres, at der er tale om antallet af kanter mellem x og y i grafen G.

$\mu(G)$ betegner multipliciteten af grafen G. D.v.s. $\mu(G) = \max_{x,y \in V(G)}\{\mu(x,y)\}$. Af og til forkortes $\mu(G)$ til μ.

$\chi'(G)$ betegner det kantkromatiske tal for grafen G. Af og til anvendes blot χ'.
$\chi'_{\text{liste}}(G)$ betegner det listekantkromatiske tal for grafen G.

$N(x)$ betegner mængden af x's naboknuder.
$x \leftrightarrow y$ betyder, at knuderne x og y er naboer.

$E(x)$ betegner mængden af kanter incidente med x.
$E(x,y)$ betegner mængden af kanter mellem x og y.
$E(X)$ betyder $\bigcup_{u,v \in X} E(u,v)$.
$E(X,Y)$ betyder $\bigcup_{x \in X, y \in Y} E(x,y)$.
$E(G)$ betegner mængden af kanter hørende til grafen G.

$V(E)$ betegner mængden af endepunkter til kanterne i E.
$V(G)$ betegner mængden af knuder hørende til G.

K_n betyder den komplette graf med n knuder.

Bogstavet φ reserveres til at betegne kantfarvninger.
Bogstavet Φ bruges til at betegne mængden af farver, der er til rådighed.
$\varphi(e)$ betyder den farve, som φ tildeler e.
$\varphi(E)$ betyder $\{\varphi(e) \mid e \in E\}$
$\varphi(x)$ betyder $\varphi(E(x))$.
$\overline{\varphi}(x)$ betyder $\Phi \setminus \varphi(x)$.

Terminologi

Grafer

En graf siges at være *acyklisk*, hvis den ikke indeholder kredse.

En todelt graf G med todeling (X, Y) kaldes *biregulær*, hvis alle knuder i X har samme valens, og alle knuder i Y har samme valens.

En kant e i en graf G kaldes en *bro*, hvis sammenhængskomponenten i G, som indeholder e, bliver til to sammenhængskomponenter, når e fjernes fra G.

En graf siges at være *cyklisk*, hvis den indeholder mindst én kreds.

H er en *delgraf* af G, hvis $V(H) \subseteq V(G)$, og $E(H) \subseteq E(G)$.

H er en *ægte delgraf* af G, hvis H er en delgraf af G, og $|E(H)| < |E(G)|$. Dette adskiller sig fra den gængse definition af en ægte delgraf, idet det normalt kun kræves, at $H \subseteq G$ og $H \neq G$ — d.v.s. $E(H)$ kan være lig $E(G)$, hvis G indeholder isolerede knuder.

Hvis e forbinder x og y, siges x og y at være *endepunkter* for e.

En *k-faktor* i en graf G er en udspændende delgraf af G, som er k-regulær.

En graf G kan *k-faktoriseres*, hvis der findes en mængde af kantdisjunkte k-faktorer F_1, F_2, ... , F_n, så $E(G) = E(F_1) \cup E(F_2) \cup \cdots \cup E(F_n)$.

En kant e i en graf G siges at *forlade* en mængde $V \subset V(G)$, hvis $e \in E(V, V(G) \setminus V)$.

En *graf* består af en mængde af knuder og en mængde af kanter.

Begrebet *hypergraf* er en generalisering af begrebet graf. I en hypergraf kan hver kant forbinde en vilkårlig delmængde af knuderne. En hypergraf, hvor alle kanter forbinder netop k knuder kaldes *k-uniform*. En multigraf kan altså opfattes som en 2-uniform hypergraf.

En kant e og en knude x siges at være *incidente*, hvis x er et endepunkt for e. To kanter siges at være *incidente*, hvis de har et fælles endepunkt.

Delgrafen af en graf G *induceret* af en mængde af knuder $V \subseteq V(G)$ er grafen med knuder V og kanter $E(V)$.

To grafer G og H er *isomorfe*, hvis der findes en bijektion $f : V(G) \to V(H)$, så $\mu(f(x), f(y)) = \mu(x, y)$ for alle $x, y \in V(G)$.

En *kant* forbinder to knuder i en graf.

En *komplet graf* er en simpel graf, hvor hvert par af knuder er naboer.

En *komplet todelt graf* er en simpel graf med todeling (X, Y), hvor enhver knude i X er nabo til enhver knude i Y.

En *kreds* er en alternerende følge af knuder og kanter, som starter og slutter i den samme knude. Hver kant er incident med knuden før og efter den i følgen. Bortset fra start- og slutknuden er alle knuder og kanter forskellige. Med en *lige/ulige kreds* menes en kreds med et lige/ulige antal kanter.

Et *loop* er en kant, der forbinder en knude med sig selv.

En graf G siges at indeholde en graf H som *minor*, hvis man kan opnå H ud fra G ved at sammentrække kanter og/eller slette knuder og/eller kanter.

En *multigraf* er en graf, som kan indeholde multiple kanter men ikke loops.

Hvis en graf indeholder et par af knuder x, y, så $\mu(x, y) > 1$, kaldes kanterne mellem x og y tilsammen en *multipel* kant. Kanterne mellem x og y kaldes også *parallelle* kanter.

Med *multipliciteten* af en graf menes det største antal af kanter, der findes mellem et enkelt par af knuder i grafen.

To knuder x og y er *naboer*, hvis $\mu(x, y) \geq 1$.

En *pardannelse* i en graf G er en 1-regulær delgraf af G. En *perfekt pardannelse* er en udspændende pardannelse — d.v.s. en 1-faktor.

En graf G siges at være k*-regulær*, hvis alle knuder i G har valens k.

En *ringgraf* er en multigraf, hvis underliggende simple graf er en kreds.

En graf G siges at være k*-kant-sammenhængende*, hvis der mellem hvert par af knuder i G findes mindst k kantdisjunkte veje. Dette er ækvivalent med, at der for alle $X \subset V(G)$

gælder, at $d(X) \geq k$. Specielt er den tomme graf k-kant-sammenhængende for ethvert $k \in \mathbb{N}$. En graf, der er 1-kant-sammenhængende, kaldes også blot *sammenhængende*.

En *sammenhængskomponent* i en graf G er en maksimal sammenhængende delgraf af G.

At *sammentrække* en kant $e \in E(x, y)$ betyder at erstatte x og y med én knude z, så $E(z) = (E(x) \cup E(y)) \setminus \{e\}$.

En *simpel graf* er en graf uden loops og uden multiple kanter.

Et *snit* i en graf G er mængden af kanter mellem en delmængde $X \subset V(G)$ af knuderne og den komplementære mængde $V(G) \setminus X$. Et *maksimalt snit* er et snit E, hvor $|E'| \leq |E|$ for alle snit E' i G.

En graf G siges at være *todelt* med *todeling* (X, Y), hvis knuderne i grafen kan deles i to disjunkte mængder X og Y, så $E(G) = E(X, Y)$.

Den *tomme graf* er grafen G, hvor $V(G) = E(G) = \emptyset$.

En *s-trekant*, hvor s er et heltal, er en graf med netop tre knuder x, y, z, så $\mu(x, y) = s$, $\mu(x, z) = s - 1$, og $\mu(y, z) = 1$.

En mængde X af knuder er *uafhængig*, hvis intet par af knuder i X er naboer. Specielt er den tomme mængde uafhængig.

En delgraf H af en graf G siges at være *udspændende*, hvis $V(H) = V(G)$.

For en multigraf G er den *underliggende simple graf* G_s defineret på flg. måde. $V(G_s) = V(G)$, og for alle par af knuder $x, y \in V(G)$ gælder, at $\mu_{G_s}(x, y) = 1$, hvis $\mu_G(x, y) \geq 1$, og $\mu_{G_s}(x, y) = 0$, ellers.

Med *valensen* af en knude x menes normalt antallet af kanter + antallet af loops, som er incidente med x — d.v.s. et loop tæller dobbelt. I dette speciale arbejdes næsten udelukkende med grafer uden loops. Derfor er valensen af en knude som regel blot antallet af kanter incidente med knuden.

En *vej* er en alternerende følge af knuder og kanter, som starter og slutter med en knude. Hver kant er incident med knuden før og efter den i følgen, og ingen knude optræder mere end én gang. Knuderne mellem start- og slutknuden kaldes *indre* knuder. Med *længden* af en vej menes antallet af kanter i vejen.

Klassisk kantfarvning

En *kantfarvning* φ af en multigraf G er en tildeling af farver til kanterne i G. Mere formelt er φ en afbildning af kantmængden $E(G)$ ind i en mængde Φ af farver (hvor Φ f.eks. er en mængde af heltal). Da dette speciale udelukkende beskæftiger sig med farvning af kanter, vil ordet kantfarvning tit blive forkortet til *farvning*.

En kantfarvning φ af en multigraf G er *ægte*, hvis intet par af incidente kanter har den samme farve. Mere formelt er $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$ for alle par af incidente kanter $e_1, e_2 \in E(G)$. I dette speciale vil "farvning" betyde "ægte farvning", medmindre andet bemærkes.

En farvning, der anvender højst k forskellige farver, kaldes en *k-farvning*. En multigraf G kan *k-farves*, hvis der findes en ægte k-farvning af G. Det mindste k, så G kan k-farves, kaldes det *kantkromatiske tal* $\chi'(G)$.

Med en *α-kant* menes en kant, der er farvet med farven α.

En kant $e \in E(x, y)$ i en multigraf G kaldes *kritisk*, hvis $d(x), d(y) < \chi'(G)$, og $\chi'(G - e) = \chi'(G) - 1$. G siges at være *k-kritisk* (eller bare kritisk), hvis $\chi'(G) = k$, og alle kanter i G er kritiske. G er altså kun kritisk, hvis $\Delta(G) < \chi'(G)$.

En farve α siges at være *repræsenteret* ved en knude x, hvis $\alpha \in \varphi(x)$. Farven α siges at *mangle* ved x, hvis $\alpha \in \overline{\varphi}(x)$.

Listekantfarvning

Forskellen på listekantfarvning og klassisk kantfarvning er, at ved listekantfarvning vælges den farve, en kant tildeles, fra en mængde af tilladte farver knyttet til kanten. Disse mængder af farver kaldes farvelister

Lad for hver kant e i en graf G A_e betegne farvelisten for e. En *listekantfarvning* v.h.a. farverne i disse farvelister er altså en farvning φ, hvor $\varphi(e) \in A_e$ for alle kanter e i G. Da dette speciale udelukkende beskæftiger sig med farvning af kanter, vil ordet listekantfarvning for det meste blive forkortet til *listefarvning*.

En graf G siges at være *k-listekantfarvelig* — eller blot *k-listefarvelig* — hvis der findes en ægte listefarvning af G for ethvert valg af farvelister, blot listerne har mindst k elementer hver. Det *listekantkromatiske tal* for G er det mindste tal k, så G er k-listefarvelig.

Lad for en graf G f og g være afbildninger af $E(G)$ ind i $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Da siges G at være *(f, g)-listefarvelig*, hvis der for ethvert valg af farvelister gælder, at hver kant e i G kan tildeles en mængde $B_e \subseteq A_e$ bestående af $g(e)$ forskellige farver, så $B_{e_1} \cap B_{e_2} = \emptyset$ for alle par af incidente kanter $e_1, e_2 \in E(G)$, hvis blot $|A_e| \geq f(e)$ for alle $e \in E(G)$. Hvis G er $(f, 1)$-listefarvelig, kaldes G også blot *f-listefarvelig*. D.v.s. for en kant $e \in E(G)$ angiver $g(e)$, hvor mange farver e skal tildeles, og $f(e)$ angiver, hvor mange der er til rådighed.

Intervalfarvning

En *intervalfarvning* af en multigraf G er en ægte farvning $\varphi : E(G) \to \mathbb{Z}$, så $\varphi(x)$ udgør et interval for alle $x \in V(G)$.

Litteratur

[1] Claude Berge og Jean Claude Fournier, A Short Proof for af Generalization of Vizing's Theorem, *Journal of Graph Theory* **15**, 333–336 (1991).

[2] Lars Døvling Andersen, On edge-colourings of graphs, *Math. Scand.* **40**, 161–175 (1977).

[3] Mark K. Goldberg, Edge-Coloring of Multigraphs: Recoloring Technique, *Journal of Graph Theory* **8**, 123–137 (1984).

[4] J. C. Fournier, Un théorème général de coloration, *Problèmes combinatoires en Théorie des Graphes, Edition du CNRS*, 153–155 (1978).

[5] J. C. Fournier, Méthode et théorème général de coloration des arêtes d'un multigraphe, *J. Math. pures et appl.* **56**, 437–453 (1977).

[6] K. H. Chew, On Vizings theorem, Adjacency lemma and fan argument generalized to multigraphs, *Discrete Mathematics* **171**, 283–286 (1997).

[7] Ian Holyer, The NP-completeness of edge-coloring, *Siam J. Comput.* **4**, 718–720 (November 1981).

[8] T. Nishizeki og M. Sato, An algorithm for edge-coloring multigraphs, *Trans. Inst. of Electronics and Communication Eng.* **J67-D, 4**, 466–471 (1984). (På japansk.)

[9] Dorit S. Hochbaum, Takao Nishizeki og David B. Shmoys, A better than "Best Possible" Algorithm to Edge Color Multigraphs, *Journal of Algorithms* **7**, 79–104 (1986).

[10] Takao Nishizeki og Kenichi Kashiwagi, On the 1.1 edge-coloring of multigraphs, *SIAM J. Disc. Math.* **3**, 391–410 (1990).

[11] O. Marcotte, On the chromatic index of multigraphs and a conjecture of Seymour, II. W. Cook and P. D. Seymour, redaktører, *Polyhedral Combinatorics, Proc. DIMACS Workshop, Morristown, N. J., 12.–16. juni, 1989*, s. 245–279. American Mathematical Society, 1990.

[12] I. T. Jakobsen, On critical graphs with chromatic index 4, *Discrete Math.* **9**, 265–276 (1974).

[13] I. T. Jakobsen, On graphs critical with respect to edge-colouring, A. Hajnal, R. Rado og V. T. Sós (redaktører), *Infinite and Finite sets*, bind **10** af *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 927–934, North-Holland, 1975.

[14] Tommy R. Jensen og Bjarne Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley Interscience, 1995.

[15] P. D. Seymour, On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte, *Proc. London Math. Soc.* **3**, 423–460 (1970).

[16] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson og Ronald L. Rivest, *Introduction to algorithms*, The MIT Press, 1996.

[17] O. V. Borodin, A. V. Kostochka og D. R. Woodall, List edge and total colourings of multigraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 184–204 (1997).

[18] Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, 1996.

[19] H. M. Hansen, *Skemalægning med henblik på minimering af ventetider*, speciale, Odense Universitet, 1992.

[20] D. Hanson, C. O. M. Loten og Bjarne Toft, On interval colourings of bi-regular bipartite graphs, to appear in *Ars Combinatoria.*

[21] D. Hanson og C. O. M. Loten, A lower bound for interval colouring bi-regular bipartite graphs, *Bulletin of the ICA* **18**, 69–74 (1996).

[22] S. V. Sevast'yanov, Interval colorability of the edges of a bipartite graph, *Metody Diskret. Analiz.* **50**, 61–72, 86 (1990). (På russisk.)

[23] S. Fiorini og R. J. Wilson, *Edge-colourings of graphs*, Pitman, 1997.

[24] H. P. Yap, *Some topics in graph theory*, Cambridge University Press, 1986