Løsning af Rekursionsligninger v.h.a. Substitutionsmetoden — et detaljeret eksempel

Lad os prøve at løse rekursionsligningen

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Substitutionsmetoden går ud på at gætte en løsning og bevise, at den er korrekt, v.h.a. induktion. Heraf kommer navnet — vi gætter en løsning, substituerer den på højre-siden i ligningen, og beviser, at den resulterende ligning er sand.

Vi gætter på, at løsningen opfylder $T(n) \in O(n \log n)$. Det svarer til at sige, at der eksisterer positive konstanter c og n_0, så $T(n) \leq cn \log_2 n$, for alle $n \geq n_0$. (Bemærk, at valget af grundtal for logaritmen ikke er afgørende, da $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$, sålænge både a og b er konstanter.)

Dette viser vi ved induktion over n. Lad os starte med at vælge n_0. Man kan hurtigt overbevise sig om, at $n_0 = 1$ ikke er et godt valg, da det giver $cn_0 \log n_0 = c \cdot 1 \cdot \log_2 1 = 0$. Vi kan altså ikke vælge c, så $T(1) \leq c \cdot 1 \cdot \log 1$.

I stedet prøver vi med $n_0 = 2$. Det giver $cn_0 \log_2 n_0 = c \cdot 2 \cdot \log_2 2 = 2c$. Ud fra rekursionsligningen får vi desuden $T(2) = 2T(1) + 2 = 2 + 2 = 4$. D.v.s. $T(2) \leq c \cdot 2 \cdot \log_2 2$, for $c \geq 2$. Dette udgør basistilfældet.

I induktionsskridtet skal vi vise, at der findes et $c \geq 2$, så der for alle $n > n_0$ gælder, at

$$T(n') \leq cn' \log_2 n' \text{ for } n_0 \leq n' \leq n - 1 \quad \Rightarrow \quad T(n) \leq cn \log n$$

D.v.s. vi skal vise, at der findes et $c \geq 2$, så

$T(2) \leq 2c \log_2 2 \;\Rightarrow\; T(3) \leq 3c \log_2 3$

$T(2) \leq 2c \log_2 2 \wedge T(3) \leq 3c \log_2 3 \;\Rightarrow\; T(4) \leq 4c \log_2 4$

$T(2) \leq 2c \log_2 2 \wedge T(3) \leq 3c \log_2 3 \wedge T(4) \leq 4c \log_2 4 \;\Rightarrow\; T(5) \leq 5c \log_2 5$

o.s.v.

Når vi skal bevise $T(n) \leq cn \log_2 n$, er induktionsantagelsen altså, at

$$T(n') \leq cn' \log_2 n' \text{ for } n_0 \leq n' \leq n - 1.$$

For $n > n_0$ gælder

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \text{ ifølge rekursionsligningen} \\ &\leq 2\,c\,\frac{n}{2} \log_2 \left(\frac{n}{2}\right) + n, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \end{aligned}$$

Ved at regne videre får vi

$$\begin{aligned} T(n) &= cn \log_2 \left(\frac{n}{2}\right) + n = cn(\log_2 n - \log_2 2) + n \\ &= cn(\log_2 n - 1) + n = cn \log_2 n - (c-1)n \\ &\leq cn \log_2 n, \text{ for } c \geq 1. \end{aligned}$$

Det er præcis, hvad vi skulle vise i induktionsskridtet.