Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (DM02)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Mandag den 6. januar 2003, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 4 opgaver på 7 nummererede sider (1–7).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 4 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent.

Der må gerne refereres til algoritmer og resultater fra lærebogen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger (udover lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Bemærk, at hvis der er et spørgsmål, man ikke kan besvare, må man gerne besvare de efterfølgende spørgsmål og blot antage, at man har en løsning til de foregående spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (25%)

Lad A være et array af *ikke-negative* heltal indekseret fra 0 til $n-1$, dvs. længden af A er n. Antag, at $A[0] = 0$.

Vi ønsker at finde antallet af *retningsskift* i A. Et retningsskift forekommer, hver gang elementerne i A i stedet for at blive større og større begynder at blive mindre og mindre, eller omvendt. Bemærk, at to ens tal i træk ikke giver et retningsskift. For array'et

$$[0, 2, 7, 19, 17, 14, 7, 7, 9, 10, 2, 88, 11]$$

er der 5 retningsskift, et for hvert af elementerne 17, 9, 2, 88 og 11.

Følgende kodeudsnit finder antallet af retningsskift i A.

```
int antal=0;
int n = A.length;
int r=1;
int i=1;
while (i<n) {
    if (r*(A[i]-A[i-1]) < 0) {
        r = -r;
        antal++;
    }
    i++;
}
```

Spørgsmål a: Vis, at while-løkken terminerer. $\square$

Formelt kan vi definere *retningen* $R(i)$ af et indeks i som følger.

$$R(i) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = 0 \\ 1, & \text{hvis } 1 \leq i \leq n-1 \ \wedge \ A[i-1] < A[i] \\ -1, & \text{hvis } 1 \leq i \leq n-1 \ \wedge \ A[i-1] > A[i] \\ R(i-1), & \text{hvis } 1 \leq i \leq n-1 \ \wedge \ A[i-1] = A[i] \end{cases}$$

Spørgsmål b: Vis, at følgende udsagn I er en invariant for while-løkken:

$$\texttt{antal} = \left|\left\{k \in \{1, 2, \ldots, \texttt{i} - 1\} \mid R(k-1) \neq R(k)\right\}\right|.$$

□

Spørgsmål c: Argumenter for, at programmet er korrekt. □

Opgave 2 (25%)

Denne opgave drejer sig om at udvide rød-sorte søgetræer med en ekstra operation

$$\texttt{join}(S_1, e, S_2)$$

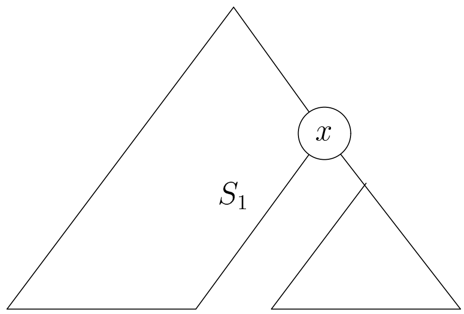
hvor S_1 og S_2 er rød-sorte søgetræer, og e er et element, hvorom det gælder, at $S_1 < e < S_2$, d.v.s. alle elementer i S_1 er mindre end e, som er mindre end alle elementer i S_2.

$\texttt{join}(S_1, e, S_2)$ skal returnere et rød-sort søgetræ med e og elementerne i S_1 og S_2. Operationen tillades at være destruktiv, hvilket betyder, at S_1 og S_2 gerne må ødelægges under udførelsen.

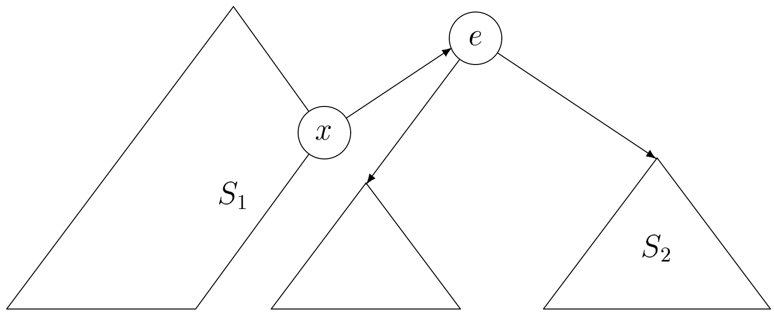
Lad n betegne det samlede antal elementer i S_1 og S_2.

Spørgsmål a: Forklar, hvordan man nemt kan implementere `join` i tid $O(n \log n)$. □

Lad nu x være en vilkårlig knude på vejen fra roden af S_1 til dets største element (der jo ligger længst til højre):



Betragt derefter følgende sammensyning af S_1, S_2 og e:



Spørgsmål b: Argumenter for, at dette altid resulterer i et søgetræ (men ikke nødvendigvis et rød-sort træ). ☐

Spørgsmål c: Argumenter for, at man med udgangspunkt i at vælge et passende x kan implementere `join` i tid $O(\log n)$. ☐

Opgave 3 (25%)

I denne opgave antager vi, at n og S er positive heltal, og at C_1, C_2,..., C_n er mængder af positive heltal, hvor hver mængde indeholder højst S tal. Vi ønsker at afgøre, om vi kan udtage ét element fra hver mængde, således at deres sum er S, dvs. om der findes n elementer $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$,..., $x_n \in C_n$, således at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S.$$

Betragt følgende udsagn for $0 \leq k \leq n$ og $0 \leq s \leq S$:

$$U(k,s)\text{: Der findes } x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k \text{ således at } \sum_{i=1}^{k} x_i = s.$$

Udsagnet omtaler altså de første k mængder og et tal $s \leq S$.

Spørgsmål a: Betragt eksemplet, hvor

$$n = 3,\ S = 7,\ C_1 = \{1,2,4\},\ C_2 = \{2,3,5\} \text{ og } C_3 = \{3,4\}.$$

Udfyld nedenstående tabel med sandhedsværdierne for $U(k,s)$ for $0 \leq k \leq n$ og $0 \leq s \leq S$. Dvs. angiv på plads (k,s), om $U(k,s)$ er sand eller falsk. Husk, at den tomme sum $\sum_{i=1}^{0} x_i$ er lig 0. $\square$

		s							
		0	1	2	3	4	5	6	7
k	0								
	1								
	2								
	3								

Lad C være et array af arrays, og antag, at $C[i]$ indeholder tallene i C_i for $1 \leq i \leq k$ (dvs. $C[0]$ benyttes ikke). Følgende rekursive metode beregner $U(n, S)$, når den kaldes med `findU`(C, n, S).

```
public boolean findU(int[][] C, int k, int s)
{
    int y;
    boolean ok;

    if (k==0) {
        if (s==0)
            return true;
        else
            return false;
    }
    else {
        ok = false;
        int i=0;
        while (i < C[k].length && !ok) {
            y = C[k][i];
            if (y <= s)
                ok = findU(C,k-1,s-y);
            i++;
        }
    }
    return ok;
}
```

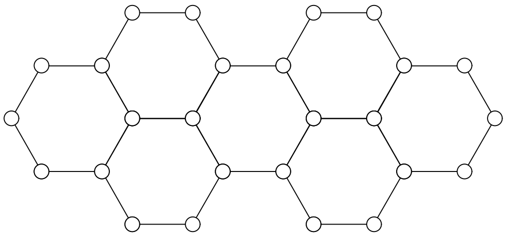
Spørgsmål b: Forklar, hvordan `findU` beregner sit resultat. □

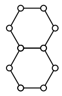
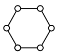
Spørgsmål c: Lav en ny version af `findU` vha. dynamisk programmering, så delresultater kun beregnes én gang. □

Spørgsmål d: Hvad bliver tabelstørrelsen i dynamisk-programmerings-udgaven? Hvad bliver worst-case tidskompleksiteten? □

Opgave 4 (25%)

Følgende graf kaldes en $H(2)$-graf.

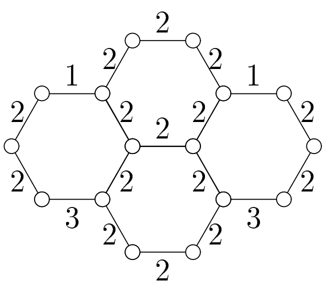


Grafen består af 2 dobbelt-sekskanter () omgivet af 3 enkelt-sekskanter (). Dette er et specialtilfælde af de mere generelle $H(k)$-grafer. For $k \geq 0$ består $H(k)$ af k dobbelt-sekskanter omgivet af $k + 1$ enkelt-sekskanter.

Spørgsmål a: Angiv antallet af knuder og kanter i en $H(k)$-graf som funktion af k, for $k \geq 0$. $\square$

Betragt nu en *vægtet* $H(k)$-graf, hvor de øverste vandrette kanter i enkelt-sekskanterne har vægt 1, de nederste vandrette kanter i enkelt-sekskanterne har vægt 3, og alle andre kanter i såvel enkelt- som dobbelt-sekskanter har vægt 2.

I det følgende betyder "en vægtet $H(k)$-graf" en $H(k)$-graf med vægte som angivet ovenfor. Eksempelvis har den vægtede $H(1)$-graf følgende udseende.



Spørgsmål b: Tegn et letteste udspændende træ for en vægtet $H(2)$-graf. $\square$

Spørgsmål c: Angiv vægten af et letteste udspændende træ for en vægtet $H(k)$-graf. Argumenter for svaret.
Vink: Husk, at for en sammenhængende graf med n knuder indeholder et letteste udspændende træ $n-1$ kanter. $\square$