Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (DM02)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Tirsdag den 24. januar 2006, kl. 9–13

Løsningsforslag

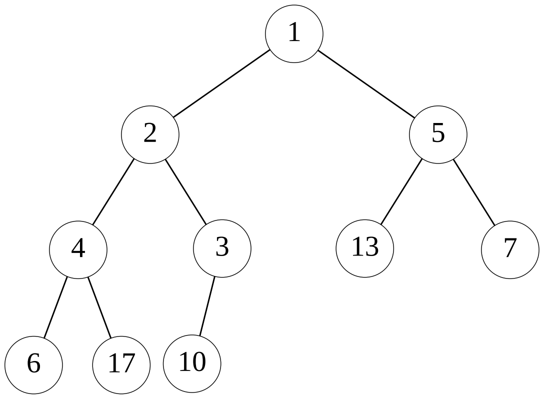
Opgave 1

Spørgsmål a:

$h(18,0) = h_1(18) \bmod 11 = 7$
$h(18,1) = \big(h_1(18) + h_2(18)\big) \bmod 11 = \big(7 + (1+8)\big) \bmod 11 = 5$

Plads 7 er optaget, så det nye element havner på plads 5. $\square$

Spørgsmål b:



$\square$

Spørgsmål c: Vi kan bruge Master-sætningen, tilfælde 3:
$\log_3 3 = 1$
$n^2 \in \Omega(n^{1+\frac{1}{2}})$ og $3\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}n^2$.

Dvs. $T(n) \in \Theta(n^2)$. $\square$

Opgave 2

For enhver følge S af tal definerer vi

$$f(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } S[i] > S[j] \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Antallet af inversioner i en følge S af n tal er

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} f(i,j)\,.$$

Spørgsmål a: En følge, som er sorteret i faldende orden, har

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right)$$

inversioner. Dette er selvfølgelig det maksimale antal. $\square$

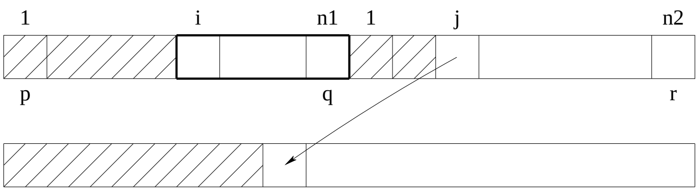
Spørgsmål b: Indfør en variabel, inv, som sættes lig 0 i starten af mergesort-algoritmen. Allersidst i merge-algoritmen (som står på s. 29 i bogen) tilføjes en linie:

inv $\leftarrow$ inv $+ n_1 - i + 1$

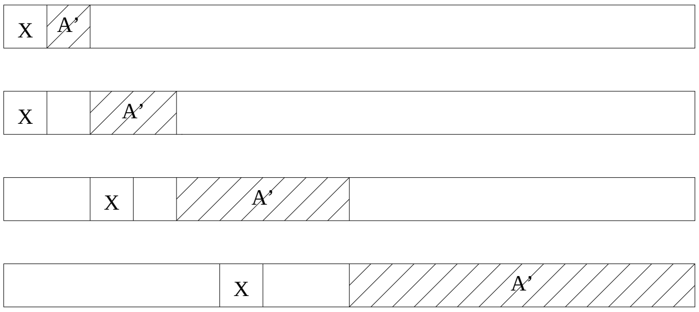
Dvs. linie 13–18 bliver følgende:

```
if L[i] ≤ R[j]
    A[k] ← L[i]
    i ← i + 1
else
    A[k] ← R[j]
    j ← j + 1
    inv ← inv + n₁ − i + 1
```

Hvis $L[i] > R[j]$ betyder det nemlig, at tallene $L[i..n_1]$ er større end $R[j]$, og disse tal stod før $R[j]$ i den oprindelige følge:



Ingen inversioner tælles mere end en gang:
Hvert element x "oplever" ca. $\log_2 n$ gange at være i et del-array, som bliver flettet med et andet del-array A'. Hver gang gælder, at ingen af tallene i A' har optrådt i nogen af de delarrays, som x tidligere er blevet flettet med:



□

Spørgsmål c:

1. Insertion Sort har køretid $\Theta(n)$: $S[j]$ flyttes $\sum_{i=1}^{j-1} f(i,j)$ pladser; dvs. antallet af swaps er lig antallet af inversioner.

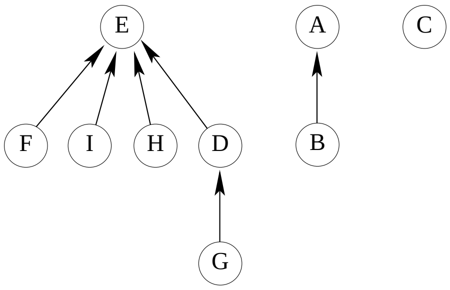
2. Radix Sort. Brug f.eks. radix 2^k, hvor $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$. Så kan man nøjes med to gennemløb (passes): i første gennemløb sammenlignes de k mindst betydende cifre, og i sidste gennemløb sammenlignes de mest betydende cifre. D.v.s. køretiden bliver $\Theta(n)$.

3. Heapsort og Mergesort har køretid $O(n \log n)$.

□

Opgave 3

Spørgsmål a: DH er den næste kant, der bliver inkluderet.



□

Spørgsmål b: AB, BD, DG, DH, HI, HE, EF, FC □

Spørgsmål c: Algoritmen består af tre trin:

1. Først undersøges, om kanterne i $\{e_1, \dots, e_k\}$ danner en kreds:

   - Konstruer delgrafen G' af G, som netop indeholder kanterne $\{e_1, \dots, e_k\}$: Kanterne tilføjes en for en til adjacenslister.
   - Udfør f.eks. BFS på G'. Hvis nogen knude opdages mere end en gang, indeholder G' en kreds.

   Begge dele kan udføres i $O(n+k)$ tid. Hvis G' ikke indeholder en kreds, går man videre til trin 2.

2. Derefter udføres eksempelvis Kruskals algoritme på G, og den samlede vægt af det resulterende udspændende træ huskes.

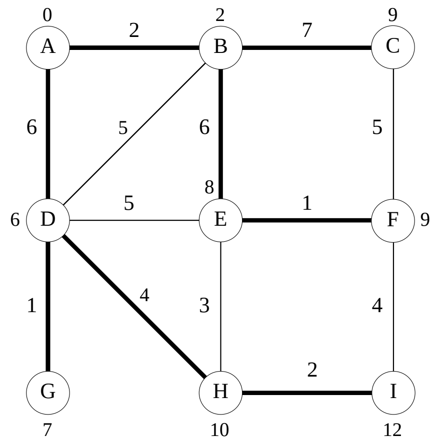
3. Endelig udføres Kruskals algoritme med $\{e_1, \dots, e_k\}$ som start-kanter.

   Hvis det resulterende træ har samme samlet vægt som træet fra trin 2, er det et letteste udspændende træ (MST).

   Hvis ikke, findes der ikke et MST, som indeholder $\{e_1, \dots, e_k\}$. Hvis $\{e_1, \dots, e_k\}$ er indeholdt i et MST, vil Kruskals algoritme nemlig kun tilføje sikre kanter til træet (Thm 23.1), og dermed vil det resulterende træ være et MST.

□

Spørgsmål d:



□

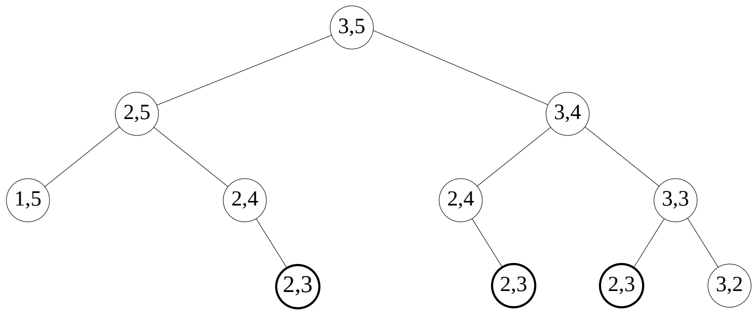
Opgave 4

Spørgsmål a:

		j					
		0	1	2	3	4	5
i	0	S	F	F	F	F	F
	1	S	S	S	F	F	F
	2	F	F	S	S	S	F
	3	F	F	F	S	S	S

□

Spørgsmål b: Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, i, j) kalder Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, $i-1$, j) og Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, i, $j-1$), hvis $i, j \geq 1$. Dvs. der foretages **tre** kald til Flet(“akt”, “beate”, “abekatte”, 2, 3):



Kan også beregnes sådan:

Lad $T(i, j)$ være antallet af kald til Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, i, j). Hvis $i < 3$ og $j < 5$, kaldes Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, i, j) af Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, $i+1$, j) og Flet(“akt”, “beate”,“abekatte”, i, $j+1$). Dvs.

$$T(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = 3 \vee j = 5 \\ T(i+1,j) + T(i,j+1), & \text{ellers.} \end{cases}$$

T		j					
		0	1	2	3	4	5
i	0	56	35	20	10	4	1
	1	21	15	10	6	3	1
	2	6	5	4	**3**	2	1
	3	1	1	1	1	1	1

□

Spørgsmål c:

<u>FLET</u>(x, y, z, n, m)
    Tabel$[0, 0]$ ← Sand
    For $i \leftarrow 1$ til n
        Tabel$[i, 0]$ ← FX$(i, 0)$
    For $j \leftarrow 1$ til m
        Tabel$[0, j]$ ← FY$(0, j)$
    For $i \leftarrow 1$ to n
        For $j \leftarrow 1$ to m
            Tabel$[i, j]$ ← (FX(i, j) $\vee$ FY(i, j))
    Returner Tabel$[n, m]$

<u>FX</u>(i, j)
    returner (Tabel$[i-1, j]$ $\wedge$ $z[i+j] = x[i]$)

<u>FY</u>(i, j)
    returner (Tabel$[i, j-1]$ $\wedge$ $z[i+j] = y[j]$)

Hvert felt i tabellen udfyldes i tid $O(1)$.
Der er $O(mn)$ felter, så den samlede køretid bliver $O(mn)$. □