<u>Lemma 16.2</u> (Grådigt-valg-egenskaben)

x og y: de to tegn med lavest frekvens.

$\exists$ optimalt træ, hvor x og y er søskende.

<u>Bevis</u>: („standard-opskriften")

T: optimalt træ

Antag x og y ikke søskende i T.

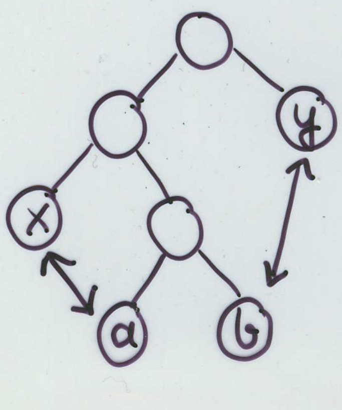
a og b: søskende-par i maks. dybde i T.

$$f[x] \le f[a], \quad d_T[x] \le d_T[a]$$
$$f[y] \le f[b], \quad d_T[y] \le d_T[b]$$

T': som T, bortset fra at
a og x er ombyttet
b og y er ombyttet

D.v.s. x og y søskende i T'.

<u>Eks</u>:



$$B(T) = \sum_{v \text{ blad i } T} f[v] \cdot d_T[v]$$

$$B(T') = \sum_{v \text{ blad i } T'} f[v] \cdot d_{T'}[v]$$

$$\begin{aligned}
B(T) - B(T') &= f[a] \cdot (d_T[a] - d_{T'}[a]) + \\
&\quad f[b] \cdot (d_T[b] - d_{T'}[b]) + \\
&\quad f[x] \cdot (d_T[x] - d_{T'}[x]) + \\
&\quad f[y] \cdot (d_T[y] - d_{T'}[y]) \\
&= f[a] \cdot (\underline{d_T[a] - d_T[x]}) + \\
&\quad f[b] \cdot (\underline{d_T[b] - d_T[y]}) + \\
&\quad f[x] \cdot (\underline{d_T[x] - d_T[a]}) + \\
&\quad f[y] \cdot (\underline{d_T[y] - d_T[b]}) \\
&= \overbrace{(f[a] - f[x])}^{\geq 0}\overbrace{(\underline{d_T[a] - d_T[x]})}^{\geq 0} + \\
&\quad \underbrace{(f[b] - f[y])}_{\geq 0}\underbrace{(\underline{d_T[b] - d_T[y]})}_{\geq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

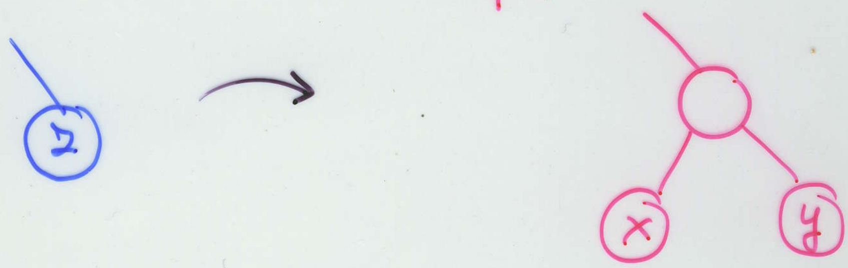
D.v.s. T' er også optimal. $\square$

Lemma 16.3 (Optimal delstruktur)

Antag:

- x, y: de to tegn med lavest frekvens i C
  $C' = (C - \{x, y\}) \cup \{z\}$
- $f[z] = f[x] + f[y]$
  De andre frekvenser for C' er som for C
- T repræsenterer koder for C

T': T:



Derudover er de to træer ens.

Da gælder:

T' optimal for C' $\Rightarrow$
T optimal for C

__Bevis:__ (Ved kontraposition)

$$B(T) = B(T') + f[x] + f[y]$$

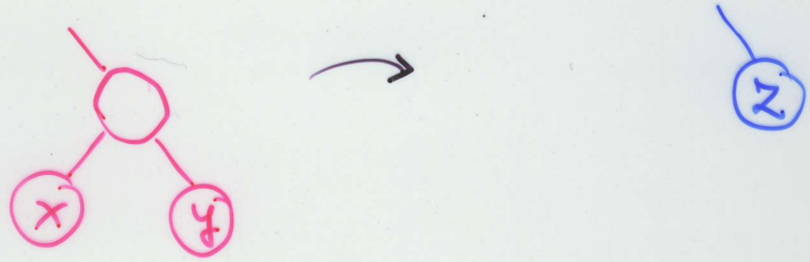
$$\Updownarrow \quad B(T') = B(T) - f[x] - f[y]$$

Antag, at T ikke optimal for C.

D.v.s. $\exists\, T''$: $B(T'') < B(T)$.

Iflg. Lemma 16.2 kan vi vælge T'', så x og y er søskende

T'': T'''



$$\begin{aligned} B(T''') &= B(T'') - f[x] - f[y] \\ &< B(T) - f[x] - f[y] \\ &= B(T') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ T' ikke optimal for C' $\square$