Skriftlig Eksamen
Matematiske Redskaber i Datalogi (DM527)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Tirsdag den 6. januar 2009, kl. 9–11

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 2 nummererede sider (1–2).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

I dette eksamenssæt bruges notationen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ og
$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3 \ldots\}$

Opgave 1 (25%)

Lad A og B være mængder af heltal. Betragt følgende fem udsagn, hvor $|$ betyder "går op i", og $\nmid$ betyder "går ikke op i".

$$\begin{array}{ll}
(1) & \forall x \in A\colon \exists y \in B\colon 3 \mid (x+y) \\
(2) & \exists y \in B\colon \forall x \in A\colon 3 \mid (x+y) \\
(3) & \forall x \in A\colon \exists y \in B\colon \exists z \in \mathbb{Z}\colon x+y=3z \\
(4) & \exists x \in A\colon \forall y \in B\colon 3 \nmid (x+y) \\
(5) & \forall x \in A\colon \exists y \in B\colon 3 \nmid (x+y)
\end{array}$$

a) Hvilke af udsagnene (2)–(5) er

- ækvivalente med udsagn (1)?
- ækvivalente med negationen af udsagn (1)?
- ingen af delene?

b) Lad $A = B = \mathbb{N}_0$. Hvilke af de fem udsagn er da sande?

Opgave 2 (15%)

Vis, at de to nedenstående udsagn er sande. Tabel 2 på s. 157 i lærebogen kan være en hjælp.

a) $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}(6x^2+2x+1) \;=\; 2n^3+4n^2+3n, \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}_+$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}2^j \;=\; 2^{n+2}-(n+3), \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}_0$

Opgave 3 (15%)

Lad $S = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Betragt følgende binære relation på S:

$$R = \{(a, b) \mid b = 2a\}$$

a) Hvilke af nedenstående par tilhører R? Hvilke tilhører R^2?

$$(1, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (2, 8)$$

b) Opskriv alle par i den transitive lukning af R.

Opgave 4 (13%)

Betragt rækken $\{a_n\}$ defineret ved

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{hvis } 1 \leq n \leq 2 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{hvis } n \geq 3 \end{cases}$$

Bevis vha. induktion, at $a_n = 2^{n-1}$, for alle $n \geq 1$.

Opgave 5 (12%)

Beregn 5^{16} mod 7 vha. modulær eksponentiering (Algoritme 5 på s. 226 i lærebogen). Vis alle skridt.