For et givent positivt heltal n og en given mængde af familier, antages at sandsynligheden for at familien har i børn, for $1 \leq i \leq n$, er p_i, således at $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Endvidere er de 2^i mulige måder at få børn på for en given familie med i børn lige sandsynlige.

b) For $1 \leq i \leq n$, hvad er sandsynligheden for at vælge en familie med netop i drenge og 0 piger?

c) Det oplyses at en familie kun har drenge. Givet dette, hvad er sandsynligheden for at familien har netop ét barn?

Gamle eksamensopgaver

Diskret Matematik med Anvendelser (DM72) & Diskrete Strukturer (DM504)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.), samt brug af lommeregner er tilladt.
Fuld besvarelse er besvarelse af alle opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent.
Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og ugesedlerne inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.
Bemærk, at hvis der er et spørgsmål i en opgave, man ikke kan besvare, må man gerne (så vidt det er muligt) besvare de efterfølgende spørgsmål og blot antage, at man har en løsning til de foregående spørgsmål.

Husk at begrunde alle dine svar!

NB: Pensum for DM72 var ikke det samme som det nuværende DM504 kursus. Pga. dette vil du derfor komme ud for flere af de gamle opgaver, som du ikke kan lave uden at læse ekstra i lærebogen først.

2003.13: DM72 eksamen Januar 2004

2003.13.1 Opgave 1 (20 %)

Hvilke af de følgende påstande a) - d) er sande, hvilke er falske. Giv et fuldstændigt bevis for alle dine svar.

a) For alle $n, k \in \mathbb{N}$ med $n \geq k$ gælder

$$\binom{n}{k} = \binom{2n}{2k} .$$

b) Lad $S := \{1, 2, 3, 4\}$ være et sandsynlighedsrum. Så er funktionen P, defineret ved

$$P(x) := \begin{cases} 1 & x = 3 \\ 0 & x \in \{1, 2, 4\} \end{cases}$$

en sandsynlighedsfordeling på S.

c) Lad S være en endelig mængde, lad P være en sandsynlighedsfordeling på S og lad $X : \mathcal{P}(S) \mapsto \mathbb{R}$ være en stokastisk variabel. Så eksisterer der en elementær hændelse $A \in S$ med

$$E[2 \cdot X] = 2 \cdot X(A) .$$

d) De følgende tre udsagn er ækvivalente:

$$P_1 \equiv \forall\, x \in \mathbb{N}\ \exists\, y \in \mathbb{N}\ x^2 > y$$

$$P_2 \equiv \forall\, y \in \mathbb{N}\ \exists\, x \in \mathbb{N}\ y^2 > x$$

$$P_3 \equiv 1 > 2$$

2003.13.2 Opgave 2 (15 %)

a) Vi definerer to funktioner

$$f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$$

som følger:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \;\; f(x) := (x - 1, 2)$$

2006.13.4 Opgave 4 (20 %)

Lad U være mængden af alle funktioner $f : A \to B$, hvor $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Hvor mange funktioner indeholder U? Dvs. find $|U|$.

b) Hvor mange funktioner i U er injektive?

c) Hvor mange funktioner i U er surjektive?

d) Hvor mange funktioner i U er bijektive?

e) Hvor mange funktioner f i U overholder, at $f(1) + f(2) = 3$?

f) Hvor mange funktioner f i U overholder, at $f(1) + f(2) = f(3)$?

2006.13.5 Opgave 5 (10 %)

Betragt den følgende række af tal:

5 11 31 197 1231

Antag at vi nu foretager os følgende:

1. Vi vælger et af tallene tilfældigt (uniform fordeling).
2. Fra tallet valgt i 1. tages nu to cifre tilfældigt og uafhængigt (uniform fordeling). Gentagelse er tilladt.

Lad den stokastiske variabel X betegne antallet af 1-taller, der vælges i trin 2.

a) Hvad er sandsynligheden for, at vælge mindst et 1-tal i trin 2., dvs. hvad er $P(X \geq 1)$?

b) Hvad er det forventede antal 1-taller, der bliver valgt, dvs. hvad er $E(X)$?

2006.13.6 Opgave 6 (15 %)

For nedenstående antager vi, at sandsynligheden for at føde en dreng hhv. en pige er den samme, dvs. $\frac{1}{2}$. Endvidere antages at udfald af fødsler er uafhængige hændelser.

a) For en given familie med to børn ved vi, at *mindst ét* af de to børn er en dreng. Hvad er sandsynligheden for, at begge børn er drenge?

2006.13: DM504 eksamen januar 2007

2006.13.1 Opgave 1 (20 %)

Hvilke af følgende påstande er sande, og hvilke er falske. Begrund alle dine svar.

a) For to vilkårlige mængder A og B gælder:

$$\overline{(A-B)} = \overline{A} \cup B\,.$$

b) Koefficienten af x^9y^6 i $(x+3y)^{15}$ er 3648645.

c) For et primtal p og to vilkårlige heltal a og b gælder

$$a \equiv b \pmod{p} \;\Rightarrow\; a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$$

d) For et primtal p og to vilkårlige heltal a og b gælder

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \;\Rightarrow\; a \equiv b \pmod{p}$$

2006.13.2 Opgave 2 (15 %)

Bevis at der for alle heltal $n, n \geq 1$ gælder

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i \cdot i!) = n! - 1\,.$$

2006.13.3 Opgave 3 (20 %)

Malthe vil meget gerne finde ud af, præcis hvor mange Duplo klodser han har. Han deler klodserne op i bunker af størrelse 7, 11 og 30 og kan ved at se, hvor mange der bliver til overs, opstille følgende ligningssystem, som antallet af klodser x må opfylde:

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{7} \\ x &\equiv 0 \pmod{11} \\ x &\equiv 4 \pmod{30} \end{aligned}$$

a) Angiv alle heltallige løsninger $x \in \mathbb{Z}$ til ovenstående løsningssystem.

b) Malthe ved, at han har nogle nærige forældre, hvorfor $0 \leq x \leq 2300$. Givet dette, hvor mange Duplo klodser har Malthe?

og

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \;\; g(x,y) := x + y\,.$$

Undersøg de fire funktioner $f, g, f \circ g$ og $g \circ f$ med hensyn til, hvilke er injektive, hvilke er surjektive og hvilke er bijektive.

b) Findes der en funktion $h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ således at $h \circ h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ er bijektiv? Begrund dit svar.

Hint: Betragt begrænsningen af h til argumenter i $\mathbb{N}$.

2003.13.3 Opgave 3 (15 %)

Bevis, at for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j-1} \cdot j^2 \;=\; n \cdot (2n-1)\,.$$

2003.13.4 Opgave 4 (15 %)

Bestem alle hele tal $x \in \mathbb{Z}$, så at der gælder:

$$x \equiv 1 \; mod \; 20$$

$$x \equiv 2 \; mod \; 27$$

2003.13.5 Opgave 5 (20 %)

I undervisningslokalerne på Syddansk Universitet benyttes en speciel type neonrør. Producenten af rørene garanterer det følgende:
Sandsynligheden for, at et rør stadigvæk virker efter t år er givet ved $\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

a) Beregn for alle $t \in \{1, 2, 3\}$ sandsynligheden for, at et rør går i stykker i løbet af år t.

b) Beregn sandsynligheden for, at et rør går i stykker i løbet af år t for et vilkårligt $t \in \mathbb{N}$.

c) Beregn forventningsværdien af den stokastiske variabel, som angiver det år t i hvilket et rør går i stykker.

d) Antag, at der i et undervisningslokale hænger tre neonrør af den ovenævnte type. Alle tre arbejder uafhængigt af hinanden.
Efter hvor mange år kan vi forvente, at den første af de tre går i stykker?

Hint for c) og d): Du må benytte uden bevis, at funktionen $f(q) := \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, hvor $|q| < 1$ er differentiabel og har den afledede $f'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$.

2003.13.6 Opgave 6 (15 %)

a) For $V := \{2, 3, 4, \ldots, 10\}$ definerer vi en ikke-orienteret graf $G := (V, E)$ som følger: (i, j) er en kant i E, hvis og kun hvis $i \neq j$ og et af de to tal i, j går op i det andet.
Tegn grafen G. Er G todelt?

b) Bevis den følgende påstand: I enhver ikke-orienteret graf med $n \geq 2$ knuder findes mindst to knuder som har den samme grad (d.v.s. det samme antal naboer).

2004.06: DM72 eksamen juni 2004

2004.06.1 Opgave 1 (20 %)

Hvilke af de følgende påstande a) - d) er sande, hvilke er falske. Begrund alle dine svar.

a) Lad $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ være to naturlige tal som ikke er "relatively prime", d.v.s. $gcd(m_1, m_2) > 1$. Så gælder det for alle par (a_1, a_2) med $0 \leq a_1 < m_1, 0 \leq a_2 < m_2$, at systemet

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \; mod \; m_1 \\ x &\equiv a_2 \; mod \; m_2 \end{aligned}$$

ikke har nogen løsning $x \in \mathbb{N}$.

b) Lad $A := \{(n, m) | n, m \in \mathbb{N}$ og $n \cdot m$ er lige$\}$. Der eksisterer en bijektiv funktion $f : A \mapsto \mathbb{N}$.

c) Betragt $S := \{1, \ldots, 10\}$ sammen med den uniforme sandsynligheds-fordeling. Lad X være en stokastisk variabel (m.h.t. S og den uniforme fordeling) med $E[X] \neq 0$. Så eksisterer en stokastisk variabel Y (m.h.t. S og den uniforme fordeling) som opfylder

$$E[X] \cdot E[Y] = 1$$

d)

$$\left\{ \forall n \in \mathbb{N} : \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \text{ er et primtal} \right\} \Rightarrow \{\forall n > 2 \; \forall x, y, z \in \mathbb{N} \; x^n + y^n \neq z^n\}$$

b) Beregn sandsynligheden for at P_1 vinder spillet når $p_1 < 1$ og $p_2 = 1$. Beregn også sandsynligheden for at P_2 vinder i denne situation.

c) Antag at $p_1 < 1, p_2 < 1$ og $p_1 + p_2 > 0$. Beregn sandsynlighederne for at P_1 vinder og for at P_2 vinder.

Dine resultater skal være i form af et udtryk, som afhænger både af p_1 og p_2.

d) Angiv en generel betingelse som p_1 og p_2 i del c) skal opfylde for at begge spillere har en lige stor chance for at vinde.

Vink for del c): For ethvert naturlig tal $k \in \mathbb{N}$ betragt hændelsen A_k at spillet er forbi efter k forsøg (hvor der tælles forsøg af begge spillere). Beregn $Pr(A_k)$. Hvordan er sammenhængen mellem forskellige værdier af k og hændelserne at P_1 vinder eller at P_2 vinder?
Nu kan man benytte følgende resultat fra forelæsningerne: For alle $|x| < 1$ gælder

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x} \; .$$

Betragt $x := (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$.

2006.03.6 Opgave 6 (15 %)

Lad X være en diskret stokastisk variabel for hvilket der gælder:

$$Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{x^2}{c} & \text{hvis } x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Her er $c \in \mathbb{R}$ et fast konstant tal som skal beregnes nedenunder.

a) Bestem værdien af konstanten c.

b) Beregn forventningsværdien $E[X]$ af X.

c) Definer en anden diskret stokastisk variabel Y ved

$$Y := (X - E[X])^2$$

Beregn for alle $x \in \mathbb{R}$ sandsynligheden af $Pr(Y = x)$.

d) Beregn variansen $Var(X)$ af X.

2006.03.3 Opgave 3 (15 %)

Et *lattice punkt* i planen er et punkt (x, y) for hvilket begge komponenter x og y er hele tal.
For to forskellige lattice punkter $p_i := (x_i, y_i)$ og $p_j := (x_j, y_j)$ defineres *midtpunktet* af linien som forbinder p_i og p_j som punktet med koordinaterne $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$.
Bemærk at midtpunktet af to lattice punkter ikke behøver selv at være et lattice punkt.

a) Antag at 5 forskellige lattice punkter $p_1, \ldots, p_5$ er givet. Bevis at der findes mindst to af disse hvorom gælder at deres midtpunkt er et lattice punkt.

b) Er påstanden i del a) stadigvæk sand når kun 4 lattice punkter er givet? Enten bevis den tilsvarende påstand eller find et modeksempel.

Vink: For del a) benyt pigeonhole princippet.

2006.03.4 Opgave 4 (15 %)

Det danske ministerium for uddannelse planlægger en ny uddannelse om Tysk Fodbold Kultur for at styrke den internationale stilling af SDU.
Uddannelsen skal forgå efter følgende regler. Der er 8 mulige kurser $\{U_1, \ldots, U_8\}$ i Bachelordelen og 10 mulige kurser $\{G_1, \ldots, G_{10}\}$ i kandidat delen.
Et korrekt curriculum består af præcis 4 kurser i Bachelordelen og præcis 3 kurser i kandidat delen.

a) Hvor mange forskellige curricula er mulige?

b) Antag at ethvert kursus fra listen $\{G_1, \ldots, G_5\}$ kræver at man tidligere har læst U_1 og at ethvert kursus fra listen $\{G_6, \ldots, G_{10}\}$ kræver at man tidligere har læst både U_2 og U_3.

   Hvor mange forskellige curricula er nu mulige?

2006.03.5 Opgave 5 (20 %)

To spillere P_1 og P_2 spiller følgende spil. De prøver på skift at kaste en bold i et hul.
Spiller P_1 starter, derefter har P_2 et forsøg, derefter er det igen P_1's tur o.s.v.
Spillet slutter når en af spillerene første gang har succes.
I ethvert forsøg af P_1 er sandsynligheden for succes lig p_1. Lignende gælder at i ethvert forsøg af P_2 er sandsynligheden for en succes lig p_2.

a) Beregn sandsynligheden for at P_1 vinder spillet når $p_1 = 1$.

2004.06.2 Opgave 2 (15 %)

Bevis, at det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot k!} \ \geq \ n^{-n} \ .$$

2004.06.3 Opgave 3 (15 %)

Betragt mængden W_5 af alle strenge, som består af præcis fem af de otte bogstaver T, Y, S, K, L, A, N, D. Hvert element i W_5 nå højest indeholde hvert bogstav én gang.

a) Hvor mange elementer har W_5?

b) Hvor mange strenge i W_5 indeholder fra venstre til højre delstrengen TYK? Her er det ikke nødvendigt, at delstrengen forekommer på tre efterfølgende positioner, d.v.s. at for eksempel strengen S<u>TY</u>L<u>K</u> er tilladt.

c) Hvor mange strenge i W_5 indeholder mindst en af strengene TYK, LYS eller AND som delstreng (hvor 'delstreng' har den samme betydning som i del b))?

2004.06.4 Opgave 4 (20 %)

En permutation $\Pi : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ kaldes en **involution**, hvis og kun hvis der gælder $\Pi \circ \Pi = id$, det vil sige

$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}\ \Pi(\Pi(i)) = i\ .$$

Lad $I(n)$ betegne antallet af involutioner for n elementer, hvor $n \in \mathbb{N}$.

a) Beregn $I(1)$ og $I(2)$.

b) Find alle permutationer af $\{1, 2, 3\}$, som **ikke** er involutioner.

c) Bevis, at for $n \geq 3$ gælder

$$I(n) \ = \ I(n-1) + (n-1) \cdot I(n-2)\ .$$

   Her må du gerne benytte et kombinatorisk argument, d.v.s. det er ikke nødvendigt at gennemføre et induktionsbevis.

2004.06.5 Opgave 5 (10 %)

a) Klaus deltager i en skriftlig eksamen på SDU. Opgaverne har multiple-choice formen med $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ svarmuligheder for hver opgave. Klaus kender det korrekte svar for en opgave med sandsynligheden $p \in [0, 1]$. Desuden gælder:

- Hvis han kender det korrekte svar, så giver han det.
- Hvis han ikke kender det korrekte svar på en opgave, så gætter han bare på, hvad det korrekte svar er. I denne situation vælger han en af de m muligheder med sandsynlighed $\frac{1}{m}$.

Beregn i afhægighed af p og m sandsynligheden for, at Klaus virkeligt **kendte** det korrekte svar når han har givet det korrekte svar.

b) Find en tupel med konkrete værdier $(p, m) \in [0, 1] \times \mathbb{N}$, sådan at sandsynligheden beregnet i del a) bliver $\frac{1}{2}$.

2004.06.6 Opgave 6 (20 %)

Frederik og Henrik spiller med hinanden spillet "Hvem vil blive kongen". I spillet benyttes en terning med seks sider; når terningen kastes, forekommer hver side med sandsynlighed $\frac{1}{6}$. Blandt de seks sider viser fire et 1-tal og de andre to et 2-tal.

a) Spillet foregår efter de følgende regler: Frederik betaler 3 kroner i indsats til Henrik. Derefter kaster Frederik terningen fem gange. Hver gang terningen viser et 1-tal skal Henrik betale 1 krone tilbage til Frederik. Den, som til sidst har en positiv gevinst, bliver konge.
Beregn forventningsværdien for Frederiks gevinst.

b) For hvilket startbeløb, som Frederik betaler til Henrik, bliver spillet rimeligt, hvis Henrik stadig betaler 1 krone tilbage for hvert 1-tal, d.v.s. for hvilket startbeløb er forventningsværdien i a) lig med 0?

c) Hvis nu startbeløbet skal være 3 kroner, hvor meget skal Henrik betale tilbage, hver gang Frederik kaster et 1-tal, for at spillet er rimeligt?

2004.08: DM72 eksamen august 2004

2004.08.1 Opgave 1 (20 %)

Hvilke af de følgende påstande a) - d) er sande, hvilke er falske. Begrund alle dine svar.

2006.03: DM504 eksamen marts 2006

2006.03.1 Opgave 1 (20 %)

Hvilke af følgende påstande er sande, hvilke falske? Begrund alle dine svar!

a) Lad A være mængden af alle funktioner fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$, d.v.s.

$$A := \{f | f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}\}.$$

Vi definerer en afbildning $F : A \mapsto \mathbb{Z}$ som

$$F(f) := f(3) \text{ for alle } f \in A.$$

Da er afbildningen F surjektiv, men ikke injektiv.

b) Lad X være en diskret stokastisk variabel, som er defineret på $\mathbb{N}$ og giver reelle værdier, d.v.s. $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Desuden opfylder X følgende betingelse:

$$X(i) \geq 0 \quad \text{for alle } i \in \mathbb{N}.$$

Så findes en diskret stokastisk variabel Y som er defineret på $\mathbb{N}$ og som opfylder

$$Y^2(i) - 2Y(i) - X(i) = 0 \text{ for alle } i \in \mathbb{N}.$$

c) Der findes et konstant tal $c \in \mathbb{N}$ således, at det for alle $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\binom{n}{3} \leq c \cdot n^3 \; .$$

d) Lad $X_1, \ldots, X_{10}$ være diskrete stokastiske variabler defineret for en endelig mængde S. Desuden antager vi at X_i'erne opfylder følgende ulighed:

$$X_1(s) \leq X_2(s) \leq \ldots \leq X_{10}(s) \text{ for alle } s \in S.$$

Så gælder

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_9] \leq 9 \cdot E[X_{10}].$$

2006.03.2 Opgave 2 (15 %)

Lad a og b være to reelle tal.

a) Bevis at hvis $a \neq b$, så gælder for alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

b) Beregn den eksplicitte værdi af summen $\sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k}$ hvis $a = b$.

måder priserne på de tre kager kan summe op til 10 Schweizerfranc svarer præcis til antallet af løsning til ligningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,,$$

hvor x_i er positive heltal.

a) Hvor mange løsninger er der til ovenstående ligning, såfremt alle x_i er positive heltal?

b) I virkeligheden kostede ingen kage mere end 5 Schweizerfranc, dvs. vi leder faktisk efter antallet af løsninger til

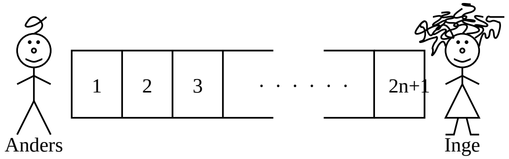
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,,$$

hvor $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Hvor mange løsninger er der i dette tilfælde?

2005.13.6 Opgave 6 (15 %)

Anders og Inge vil dele en chokoladestang. Stangen består af $2n + 1$ blokke af samme længde (hvor n er et positivt heltal).
I stedet for at dele chokoladestangen lige over beslutter de sig for at dele den ved, at de hiver i hver sin ende af stangen.



En velkendt kendsgerning fra chokoladevidenskaben fastslår, at chokoladestangen ved denne proces vil blive delt i netop to stykker i en af de $2n$ revner mellem de $2n + 1$ blokke stangen består af. Revnen vælges uniformt mellem mulighederne.
Lad den stokastiske variabel X være antallet af blokke i den *længste* af de to resterende stykker. Jævnfør det ovenstående har vi

$$P(X = i) = \frac{1}{n}, \quad \text{for } i \in \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}\,,$$

mens $P(X = i) = 0$ ellers.

a) Find $E(X)$.

b) Find variansen $\mathrm{Var}(X)$ af X.

c) Brug Chebyshevs ulighed sammen med spørgsmål a og b til at finde en øvre grænse for sandsynligheden for at det længste stykker har længde mindst $\frac{15n}{8} + \frac{1}{2}$ blokke.

a) Lad $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ være en funktion for hvilken det gælder, at f er injektiv og $f^2 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ er surjektiv. Så er funktionen $f^3 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ bijektiv.

Husk: f^2 er defineret som kompositionen $f \circ f$; tilsvarende for f^3.

b) For alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gælder: Hvis a og b er indbyrdes primiske (“relatively prime”), så eksisterer $s, t \in \mathbb{N}$ som opfylder

$$c = s \cdot a + t \cdot b$$

c) Der eksisterer en lineær rekursionsligning af formen

$$f_n = 2 \cdot f_{n-1} + c \cdot f_{n-2},\ c \in \mathbb{R}$$

som har løsningen

$$f_n = 3 \cdot 2^n + 3^n\ .$$

d) Lad p være et primtal. Så eksisterer der for alle $x \in \{1, \ldots, p^3 - 1\}$ en multiplikativ invers til x modulo p^3.

2004.08.2 Opgave 2 (15 %)

For naturlige tal x, y, z betragter vi de følgende predikater:

$U(x)$: x er ulige

$L(x)$: x er lige

$P(x)$: x er et primtal

$S(x, y, z)$: $x + y = z$

$M(x, y, z)$: $x \cdot y = z$

a) Nedenfor fortolkes alle kvantorer over de naturlige tal. Hvilke af de følgende propositioner er sande, hvilke er falske?

Begrund dine svar.

i) $\forall\, x\ \forall\, y\ \forall z\ \ (\{M(x, y, z) \wedge L(x) \wedge L(z)\} \Longrightarrow U(y))\ .$

ii) $\exists\, x\ \exists\, y\ \exists z\ \ (S(x, 2, y) \wedge S(y, 2, z) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge P(z))\ .$

iii) $\forall\, x\ \forall\, y\ \ (\{S(x, 2, y) \wedge P(x) \wedge P(y)\} \Longrightarrow U(y))\ .$

b) Angiv negationerne af de tre propositioner i a). Her må du **ikke** benytte implikationen som operation, d.v.s. du skal udtrykke negationerne kun ved hjælpen af de logiske operatorer $\wedge, \vee, \neg$ og kvantorerne $\exists$ og $\forall$.

2004.08.3 Opgave 3 (15 %)

Bevis, at det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot 3^k \;=\; 2^{n-1} \cdot (3^{n+1} - 1).$$

2004.08.4 Opgave 4 (15 %)

Efter Klaus har undervist i diskret matematik 30 år, synes alle, at det er nok. Derfor vil Klaus stoppe og fordele alle sine matematiske bøger mellem de tre bedste studerende i kurset DM72. Han har $s \geq 4$ bøger. Den bedste studerende skal mindst have to bøger, både den anden og den tredje bedste skal mindst have en bog. Hvor mange forskellige muligheder eksisterer for at fordele bøgerne mellem de tre? Angiv resultatet i afhængighed af s.
Hint: Benyt principiet af inklusion-eksklusion.

2004.08.5 Opgave 5 (20 %)

To spillere, A og B, spiller det følgende spil: Spiller A kaster en ærlig terning fire gange. Hvis terningen alle fire gange viser et lige tal, så får A 20 kroner af B. Forekommer præcis tre lige tal, så får A 10 kroner af B. Ellers skal A betale 4 kroner til B.

a) Beregn forventningsværdien af gevinsten for A.

b) Hvordan skal man forandre det beløb, A skal betale til B i hvert parti, for at få et rimeligt spil (d.v.s. et spil for hvilket forventningsværdien af A's gevinst er 0)?

c) Hvordan skal man forandre beløbet, A får for fire lige tal, for at få et rimeligt spil?

2004.08.6 Opgave 6 (15 %)

Lad $G = (V, E)$ betegne en ikke-orienteret graf (uden loops og uden multiple kanter). En **automorfi** af G er en bijektiv afbildning $f : V \mapsto V$, således at

$$\forall\, i, j \in V :\; (i, j) \in E \Leftrightarrow (f(i), f(j)) \in E\ .$$

Bestem alle automorfier for de følgende grafer:

a) $G = (V, E)$ med $V := \{1, 2, 3\}, E := \{(2, 3)\}$. Grafen altså er

2005.13.2 Opgave 2 (15 %)

Bevis at der for alle positive heltal n gælder

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n\; f_{n+1}\,,$$

hvor f_i is Fibonacci-tallene defineret ved $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ og $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ for $n \geq 2$.

2005.13.3 Opgave 3 (15 %)

Find mængden af positive heltal x, for hvilke følgende er sandt:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 5 \\ x &\equiv 0 \pmod 7 \\ x &\equiv 4 \pmod 9 \end{aligned}$$

2005.13.4 Opgave 4 (20 %)

Betragt følgende inhomogene rekursionsligning

$$a_n = 4\, a_{n-1} - 4\, a_{n-2} + 3\, n \qquad (*)$$

med begyndelsesbetingelser $a_0 = 0$ og $a_1 = 3$.

a) Den associerede homogene rekursionsligning er

$$a_n = 4\, a_{n-1} - 4\, a_{n-2}\,.$$

Angiv den generelle form for løsninger til denne homogene rekursionsligning.

b) Angiv en bestemt løsning (particular solution) til den inhomogene rekursionsligning (*) uden hensyntagen til begyndelsesbetingelserne.

c) Hvad er løsningen til den inhomogene rekursionsligning (*), når begyndelsesbetingelserne også tages i betragtning?

2005.13.5 Opgave 5 (20 %)

Efter en lang uge på arbejde beslutter Jens sig for at tage til Schweiz for at spise nogle lækre kager. Han køber tre kager til en pris af i alt 10 Schweizerfranc. Alle priser er heltal, og alle kager koster mindst en Schweizerfranc. Dvs. antallet af

2005.08.6 Opgave 6 (20 %)

En kasse indeholder 5 kugler. Hver kugle er markeret med et tal. To kugler er markeret med 0, én kugle med 2, én kugle med 3 og én kugle med 4.
Du bestemmer nu hvor mange kugler du ønsker at trække. Du skal dog trække mindst én og højest alle 5. Herefter trækker du nu tilfældigt (uniform fordeling) det antal kugler fra kassen, som du på forhånd bestemte dig for.
Din gevinst er produktet af tallene som står på de kugler, du har trukket.

a) Hvor mange kugler skal du trække for at få den maksimale forventede gevinst? Beregn den forventede gevinst for alle antal $i \in \{1, \dots, 5\}$ af trukkede kugler.

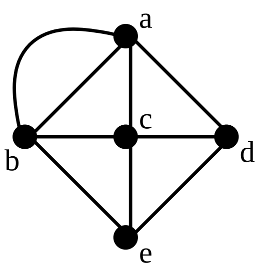
b) Betragt nu 6 kugler, som er markeret med tallene $0, 0, 0, -3, -4, -8$. Hvad er det optimale antal kugler du skal trække? Svar på dette spørgsmål **uden** at gennemgå de tilsvarende beregninger fra del a).

2005.13: DM72 eksamen januar 2006

2005.13.1 Opgave 1 (15 %)

Hvilke af følgende påstande er sande, og hvilke er falske. Begrund alle dine svar.

a) Følgende graf $G = (V, E)$ har en Euler-kreds.



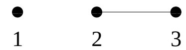
b) Følgende mængde A er tællelig.

$$A := \left\{ \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq \mathbb{R}\,,$$

hvor $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

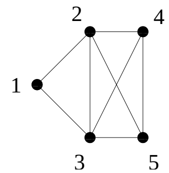
c) For alle udsagn P og Q er følgende altid sandt

$$((P \vee Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \vee Q))\,.$$



b) G er en vej over n knuder, d.v.s. $V := \{1, \dots, n\}, E := \{(i, i+1) | 1 \leq i \leq n-1\}$. Grafen altså er

c) Grafen G givet ved



Begrund dine svar!

2004.13: DM72 eksamen januar 2005

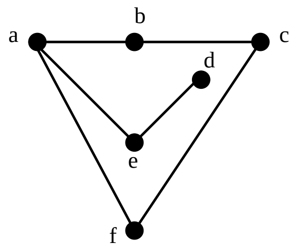
2004.13.1 Opgave 1 (10 %)

Hvilke af følgende påstande a) og b) er sande, og hvilke er falske. Begrund alle dine svar

a) $x = 165$ er den eneste løsning til det følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 5 \\ x &\equiv 4 \pmod 7 \\ x &\equiv 3 \pmod 9 \end{aligned}$$

b) Følgende graf G er todelt (bipartite).



2004.13.2 Opgave 2 (15 %)

Vis at der for alle hele tal $n \geq 1$ gælder

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2004.13.3 Opgave 3 (15 %)

For at få en masse kager beslutter Jens sig for at lave en kageklub. Et nyt medlem af klubben skal i løbet af sin første uge hverve 3 nye medlemmer og kan dernæst slappe af og blot spise kage.

a) Vis at antallet af medlemmer i klubben efter uge n kan beskrives ved følgende rekursionsligning:

$$a_n = 3\ a_{n-1} - 2\ a_{n-2}$$

b) Løs rekursionsligningen fra a) for a_n i alle uger med begyndelsesværdierne $a_0 = 1$ og $a_1 = 4$.

c) Hvis alt forløber efter planen, hvor mange uger går det før der mindst er et tusinde medlemmer? Dvs. find det mindste n, hvor $a_n \geq 1000$.

2004.13.4 Opgave 4 (20 %)

Lad U være mængden af alle funktioner $f : A \to A$, hvor $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Hvor mange funktioner indeholder U? Dvs. find $|U|$.

b) Hvor mange funktioner f i U overholder at $f(x) \neq 2$ for alle $x \in A$.

c) Hvor mange funktioner i U er en-til-en? (injektive)

d) Hvor mange funktioner f i U er en-til-en *og* har $f(1) \neq 1$ og $f(3) \neq 3$.

Hint: Brug princippet om inklusion-eksklusion.

2004.13.5 Opgave 5 (20 %)

Lene kaster to ægte terninger og beregner derefter øjensummen for kastet. Viser den ene terning f.eks. 3 og den anden 4, da er øjensummen 7. NB: En ægte terning er en terning, hvor sandsynligheden for at terningen viser i øjne er $p(i) = \frac{1}{6}$ for $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

2005.08.4 Opgave 4 (15 %)

a) Betragt udtrykket

$$(x + y + z + w)^9$$

i de fire variable $x, y, z,$ og w.

Beregn koefficienten af termen $x \cdot y^4 \cdot z^3 \cdot w$, det vil sige beregn hvor mange gange vi får termen $x \cdot y^4 \cdot z^3 \cdot w$ når vi multiplicerer $(x + y + z + w)$ otte gange med sig selv.

b) Lad $a_1 < a_2 < \ldots < a_{21}$ være en sekvens af 21 forskellige naturlige tal i mængden $\{1, \ldots, 100\}$. Betragt alle mulige differencer $a_i - a_j$ som man får for et vilkårligt valg $1 \leq j < i \leq 21$.

Vis at der findes et resultat som forekommer mindst tre gange.

2005.08.5 Opgave 5 (15 %)

For at bestå eksamenen i DM72 tilbyder din lærer dig følgende chance.
Han placerer tre kasser foran dig. Hver kasse er fyldt med 60 kugler. Der er ialt 120 hvide kugler og 60 sorte kugler. Kuglerne er fordelt som følger i de tre kasser:

- kasse 1 indeholder 10 sorte og 50 hvide kugler;
- kasse 2 indeholder 20 sorte og 40 hvide kugler;
- kasse 3 indeholder 30 sorte og 30 hvide kugler.

Du får nu bind for øjnene, så at du ikke kan se kasserne og deres indhold.

a) Læreren beder dig først om at vælge en tilfældig af de tre kasser (uniform fordeling). Derefter skal du trække en tilfældig kugle fra den valgte kasse (uniform fordeling).

Hviss kuglen du trækker er hvid består du eksamenen.

Hvad er sandsynligheden for at bestå?

b) Nu får du selv muligheden for at fordele de sorte og de hvide kugler i de tre kasser. Der skal dog stadigvæk være 60 kugler i enhver kasse. Derefter gennemføres det samme eksperiment.

Hvad er den optimale fordeling af de sorte og hvide kugler i de tre kasser, således at sandsynligheden for at bestå eksamenen bliver maksimal?

b) Lad M være en mængde. For alle $k \in \mathbb{N}$ og mængder $M_1, ..., M_k \subset M$ gælder

$$\bigcup_{i=1}^{k}(M \setminus M_i) \;=\; M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} M_i \;.$$

c) Betragt en endelig mængde S sammen med en sandsynlighedsfordeling Pr som er defineret for potensmængden af S. Lad A, B og C være tre forskellige hændelser således at $A \subseteq B$. Så gælder

$$Pr(A) < Pr(B) + Pr(C)$$

d) Lad $n \geq 1$ være et naturligt tal. Hvis $p \in \mathbb{N}, 1 < p < n$ er et primtal som går op i n, så går p **ikke** op i $(n-1)! + 1$.

2005.08.2 Opgave 2 (15 %)

Bevis at for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k+1)\cdot(2k-1)} = \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)} \quad .$$

2005.08.3 Opgave 3 (20 %)

Lad d_n betegne antallet af strenge i $\{0, 1, 2\}^n$ således at der hverken forekommer to 1'ere eller to 2'ere i træk.

a) Beregn værdierne for d_1 og d_2.

b) Vis at for alle $n \in \mathbb{N}$ opfylder værdien d_n ligningen

$$d_n = 2 \cdot d_{n-1} + d_{n-2} \;.$$

c) For vilkårlige $n \in \mathbb{N}$ løs ligningen i del b) med startværdierne fra del a).

Hint til b) Det anbefales at overveje hvordan man kan forlænge strenge, som afslutter med et 0 og strenge, som afslutter enten med 1 eller 2. Vis at antallet af strenge som både opfylder betingelserne, har længde $n-1$ og afslutter med et 0, er præcis d_{n-2}.

a) Antag, at øjensummen er 7. Givet dette, hvad er sandsynligheden for, at mindst én af terningerne viser 2?

b) Lad A være hændelsen *øjensummen er 7*, og
lad B være hændelsen *mindst én af terningerne viser 2*.
Er A og B uafhængige hændelser?

c) Hvor mange gange skal man i gennemsnit kaste med to terninger, før man opnår et slag, hvor øjensummen er 7?

Nu kastes 5 ægte terninger. I et Yatzy-spil med 5 terninger betyder *tre ens*, at man har fået et slag, hvor *tre* terninger viser det samme, mens de sidste to viser noget, der både er forskelligt fra de tre ens og fra hinanden. For eksempel er (3,3,3,5,6) tre ens, mens (3,3,3,4,4) og (3,3,3,3,5) ikke er det.

d) Hvad er sandsynligheden for at få *tre ens* i ét kast med 5 ægte terninger?

2004.13.6 Opgave 6 (20 %)

Lad X og Y være to uafhængige stokastiske variable, der begge antager værdier uniformt fra $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.
Dvs. for alle $i \in \mathbb{Z}_p$ gælder $P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{p}$.

a) Hvad er forventningsværdien af X, $E(X)$?

b) Hvad er variansen af X, $Var(X)$?

Lad den stokastiske variable S være defineret ved $S = (X + Y) \mod p$.

c) Hvad er distributionen af S? Dvs. for hvert i i $\mathbb{Z}_p$, hvad er $P(S = i)$?

d) Hvad er forventningsværdien af S, $E(S)$?

2005.06: DM72 eksamen juni 2005

2005.06.1 Opgave 1 (15 %)

a) Angiv den logiske negation af de følgende udsagn. Dine formler må hverken indeholde negationssymbolet $\neg$ lige før en kvantor eller den logiske implikationsoperator $\Rightarrow$.

$$A \;\equiv\; \forall\, n \in \mathbb{N} : \{10 \text{ går op i } 21^n - 4 \;\;\Rightarrow\;\; 10 \text{ går op i } 21^{n+1} - 4\}$$

$$B \;\equiv\; \forall z \in \mathbb{N}\; \forall x \in \mathbb{N}\; \exists y \in \mathbb{Z} : \quad x + 3 = y^2$$

b) Afgør for udsagnene i del a) om det givne udsagn eller dets negation er sandt. Begrund dine svar!

2005.06.2 Opgave 2 (15 %)

Benyt et induktionsbevis for at vise, at for alle naturlige tal $n \geq 1$ gælder

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2 \qquad .$$

2005.06.3 Opgave 3 (20 %)

Benyt den kinesiske restklassesætning for at finde det mindste naturlige tal $x > 0$ som opfylder de følgende ligheder:

$$\begin{aligned} x &= -3 \quad mod \quad 5 \\ x &= 4 \quad mod \quad 7 \\ x &= -9 \quad mod \quad 11 \end{aligned}$$

2005.06.4 Opgave 4 (20 %)

Lad $G = (V, E)$ være en graf med 100 knuder. Det forudsættes at enhver knude $v \in V$ mindst har 76 naboer.
Vis at der findes en mængde af mindst 5 forskellige knuder i V således at alle er parvis forbundet i G.
Hint: Start med at vælge en vilkårlig knude v_1. Betragt nabomængden S_1 af v_1 i G. Prøv at finde en yderligere knude v_2 sammen med en yderligere mængde S_2, som har et højt antal fælles knuder med S_1.
Princippet om inklusion-eksklusion kan nu være en hjælp.

2005.06.5 Opgave 5 (15 %)

Både din instruktor og din lærer kan godt lide at spille tennis. For at bestå eksamen i DM72 får du følgende chance.
Du skal spille ialt tre kampe mod dem. Din chance for at vinde mod læreren er $p \in (0, 1)$, din chance for at vinde mod instruktoren er $r \in (0, 1)$. Selvfølgelig gælder $p < r$.
Du må nu selv vælge en af de følgende to muligheder for rækkefølgen i hvilken du spiller mod de to:

1) Du spiller kampene 1 og 3 mod læreren og kamp 2 mod instruktoren

   eller

2) du spiller kampene 1 og 3 mod instruktoren og kamp 2 mod læreren.

For at bestå kurset skal du vinde mindst to kampe i træk.

a) Analyser sandsynlighederne for at bestå hvis du vælger mulighed 1, og hvis du vælger mulighed 2.

b) Hvilken mulighed giver den større sandsynlighed for at bestå? Kan du forklare resultatet **uden** at tage hensyn til dine beregninger i del a)?

c) Antag at vi ved, uafhængigt af muligheden du vælger, at du taber din første kamp mod læreren. Beregn for begge muligheder den betingede sandsynlighed for at bestå kurset.

2005.06.6 Opgave 6 (15 %)

Lad $n \in \mathbb{N}$. For en streng $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ kalder vi en *stabil delstreng* enhver delstreng $x_k x_{k+1} \ldots x_s$ af x således at alle komponenter er ens og delstrengen ikke kan forlænges til en stabil delstreng, det vil sige $x_{k-1} \neq x_k$ og $x_s \neq x_{s+1}$ (eller $k = 1$ eller $s = n$).
Eksempel: Strengen

$$x = 0100100011$$

har 6 stabile delstrenge, som er

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3x_4 = 00, x_5 = 1, x_6x_7x_8 = 000, x_9x_{10} = 11$$

a) Vælg en tilfældig sekvens $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. Sandsynligheden for at et komponent bliver 0 er $p \in [0, 1]$ og sandsynligheden for at et komponent bliver 1 er $q := 1 - p$.

   Beregn det forventede antal stabile delstrenge i den valgte sekvens.

b) Hvor mange stabile delstrenge kan vi forvente i en sekvens på 6 bits hvis hver bit er trukket under den uniforme fordeling fra $\{0, 1\}$.

Hint: Selv hvis du ikke kan løse del a) kan du prøve del b) uafhængigt.

2005.08: DM72 eksamen august 2005

2005.08.1 Opgave 1 (15 %)

Hvilke af de følgende påstande a) - d) er sande, hvilke er falske. Begrund alle dine svar.

a) For alle injektive funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ findes to funktioner $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ således at det gælder

$$f \circ g \circ h = h \circ f \circ g \ .$$