Skriftlig Eksamen
DM527 Matematiske redskaber i datalogi

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet – Odense

Tirsdag, den 22. januar 2008 kl. 9-11.

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.), samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 4 opgaver på 4 nummererede sider (1–4).

Fuld besvarelse er besvarelse af alle 4 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i point. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand ved at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt!). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

Husk at begrunde alle dine påstande!

Opgave 1 (20 %)

For hvert af følgende udsagn skal du afgøre om det er sandt eller falsk. Husk at begrunde dine svar.

a) For to vilkårlige tælleligt uendelige mængder A og B vil $A \cap B$ altid være en tælleligt uendelig mængde.

b) For en vilkårlig ikke-tom mængde $A \neq \emptyset$, er den binære relation R på A defineret ved $R = \emptyset$ en ækvivalensrelation.

c) For vilkårlige endelige mængder A og B gælder

$$\text{hvis } A \subseteq B, \text{ da vil } |A| \leq |B| \,.$$

d) For vilkårlige endelige mængder A og B gælder

$$\text{hvis } |A| \leq |B|, \text{ da vil } A \subseteq B \,.$$

Opgave 2 (25 %)

Lad $x \in \mathbb{R}$ være et vilkårligt positivt tal, $x > 0$. Vis at der for alle naturlige tal n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gælder

$$1 + nx \leq (1 + x)^n$$

Opgave 3 (20 %)

Betragt følgende binære relation på $\mathbb{Z}$:

$$R = \{(a, b) \mid a + b \equiv 0 \pmod 2\}$$

a) Vis at R er en ækvivalensrelation.

b) Er R også en partiel ordning?

c) Find alle elementer i ækvivalensklassen for 3, $[3]_R$.

Opgave 4 (15 %)

Bevis følgende to udsagn. Husk at $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

a) Lad $a, n \in \mathbb{N}$, $0 < a < n$ være relativt primiske. For et vilkårligt $b \in \mathbb{Z}$, vil $ai + b$ for $i = 0, 1, \ldots n-1$ alle have forskellige rester ved division med n .

b) Lad $a, n \in \mathbb{N}$, $0 < a < n$ være relativt primiske. Da er funktionen $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $f(x) = ax \pmod{n}$ bijektiv.