

Skriftlig Eksamen

Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 13. januar 2012 kl. 9–12

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lomme-regner er tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 3 nummererede sider (1–3). De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt. Den skriftlige eksamen tæller 70% af den samlede karakter.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$

$$g(x) = 2x - 2$$

- a) Er f en bijektion?
- b) Har f en invers funktion?
- c) Angiv $f + g$.
- d) Angiv $g \circ f$.

Opgave 2 (15%)

Betragt de to udsagn P og Q :

$$P : \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x = y$$

$$Q : \forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$$

- a) Er udsagnet P sandt?
- b) Er udsagnet Q sandt?
- c) Angiv negeringen af P ; d.v.s. angiv $\neg P$.
Negeringsoperatoren (\neg) må ikke indgå i dit udsagn.

Opgave 3 (10%)

Denne opgave handler om talteori.

a) Hvilke af følgende par er indbyrdes primiske?

(1) 15 og 16

(2) 15 og 20

(3) 15 og 30

b) Angiv det mindste positive heltal x , som opfylder kongruensen

$$5x \equiv 1 \pmod{7}$$

Opgave 4 (15%)

Betragt følgende binære relation på $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$:

$$R = \{(a, b) \mid b = a^2 \vee a = b^2\}$$

a) Angiv samtlige elementer i R .

b) Er R reflektiv?

c) Er R symmetrisk?

d) Er R transitiv?

e) Er R en ækvivalensrelation?

Opgave 5 (15%)

Betragt matricen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Beregn A^2 .

b) Vis, at $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$