Skriftlig Reeksamen
Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 26. januar 2010 kl. 9–12

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 2 nummererede sider (1–2).
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (10%)

Betragt de tre matricer $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Beregn $A + B$

b) Beregn $A \cdot C$

Opgave 2 (15%)

I denne opgave lader vi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Lad P være udsagnet

$$\forall x \in \mathbb{N} \colon \exists y \in \mathbb{N} \colon x^2 < y \, ,$$

og lad Q være udsagnet

$$\forall y \in \mathbb{N} \colon \exists x \in \mathbb{N} \colon x^2 < y \, .$$

a) Er P sandt?

b) Er Q sandt?

c) Angiv negeringen af P, dvs. angiv $\neg P$.
Negerings-operatoren ($\neg$) må ikke indgå i dit udtryk.

d) Er $\neg P$ sandt?

Opgave 3 (16%)

Betragt funktionerne

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ defineret ved } f(x) = x^2$$

og

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ defineret ved } g(x) = x + 2$$

a) Er f en bijektion?

b) Har f en invers funktion?

c) Angiv g's inverse funktion, dvs. angiv $g^{-1}(x)$.

d) Angiv forskriften for den sammensatte funktion $h = f \circ g$.

Opgave 4 (15%)

Angiv det mindste positive heltal, som opfylder følgende kongruens-system:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

Opgave 5 (14%)

I denne opgave lader vi $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Lad f_i betegne det i'te fibonacci-tal, for $i \in \mathbb{N}_0$.
Bevis vha. induktion, at følgende udsagn er sandt for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1\,.$$