Skriftlig Eksamen
Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Onsdag den 12. januar 2011 kl. 9-12

English:

You are allowed to use any textbook and any notes you have for this course, along with a pocket calculator.

The exam consists of 7 problems on 8 numbered pages (1–8). The weight assigned to each problem in grading is given in parentheses at the start of each problem. Note that the individual questions of a problem don't have necessarily the same weight. The written exam accounts for 70% of the final grade.

You may refer to results from the textbook by Rosen or problems which have been assigned during the course. References to other books than the textbook will not be accepted.

Remember to argue for your answers!

Dansk:

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 7 opgaver på 8 nummererede sider (1–8). De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt. Den skriftlige eksamen tæller 70% af den endelige karakter.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen af Rosen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Problem 1 (15%)

English:

a) Compute $5!$.

b) Show that for all positive integers n

$$\prod_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = \frac{(2 \cdot n)!}{n! \cdot 2^n}$$

holds.

Dansk:

a) Beregn $5!$.

b) Bevis at

$$\prod_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = \frac{(2 \cdot n)!}{n! \cdot 2^n}$$

er sandt for alle positive heltal n.

Problem 2 (10%)

English:
Use the Extended Euclidean Algorithm to compute the multiplicative inverse of 100 modulo 13.

Dansk:
Brug Euklids Udvidede Algoritme til at beregne den multiplikative inverse af 100 modulo 13.

Problem 3 (10%)

English:

a) Can the Chinese Remainder Theorem be used to solve the following system of congruences?

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{15} \\ x &\equiv 50 \pmod{101} \end{aligned}$$

b) Find all the integer solutions to the system of congruences given in a).

Dansk:

a) Kan den Kinesiske Restklasse-Sætning bruges til at løse følgende ligningssystem?

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{15} \\ x &\equiv 50 \pmod{101} \end{aligned}$$

b) Find alle heltallige løsninger til ligningssystemet givet i a).

Problem 4 (10%)

English:
Give a recursive definition of the sequence $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, if $a_n = \frac{n!}{n+1}$.

Dansk:
Giv en rekursiv definition af sekvensen $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, hvor $a_n = \frac{n!}{n+1}$.

Problem 5 (5%)

English:
Prove or disprove:

a) The intersection of two uncountable sets is an uncountable set.

b) If the intersection of two uncountable sets is infinite, then the intersection is an uncountable set.

Dansk:
Bevis eller modbevis:

a) Fællesmængden af to ikke-tællelige mængder er en ikke-tællelig mængde.

b) Hvis fællesmængden af to ikke-tællelige mængder er uendelig, så er fællesmængden en ikke-tællelig mængde.

Problem 6 (10%)

English:
Let $a \neq 0$ and $b \neq 0$ be real numbers. Let functions f and g be defined as

$$f(x) = a \cdot x^2 \qquad \text{and} \qquad g(x) = b \cdot x$$

a) Find $f \circ g$ and $g \circ f$ (see page 140 of the course book for the definition of the composition of functions).

b) Give all pairs of constants a, b, for which it is true that $f \circ g = g \circ f$?

Dansk:
Lad $a \neq 0$ og $b \neq 0$ være to reelle tal. Lad f og g være funktioner defineret ved

$$f(x) = a \cdot x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = b \cdot x$$

a) Find $f \circ g$ og $g \circ f$ (se side 140 i lærebogen for definitionen af sammensatte funktioner).

b) Giv alle par af konstanter a, b, for hvilke det er sandt at $f \circ g = g \circ f$?

Problem 7 (10%)

English:

a) Show that the relation

$$R = \{(a, b) \mid \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor\}$$

on the set of real numbers is an equivalence relation.

b) Find the equivalence class $[\ \sqrt{2}\ ]_R$.

c) Give all equivalence classes arising from relation R.

Dansk:

a) Vis at relationen

$$R = \{(a, b) \mid \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor\}$$

på mængden af reelle tal er en ækvivalensrelation.

b) Find ækvivalensklassen $[\ \sqrt{2}\ ]_R$.

c) Angiv alle R's ækvivalensklasser.