Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

21. november 2008
LMF

DM527 — Matematiske Redskaber i Datalogi
Eksamensprojekt efteråret 2008

1 Deadline og formalia

Husk, at dette er et eksamensprojekt. Dvs. du må ikke på nogen måde arbejde sammen med andre.

Projektet skal afleveres senest ved forelæsningen mandag d. 1. december. Hvis du vil have en kvittering på, at du har afleveret, kan du desuden aflevere via Blackboard. På kursus-hjemmesiden er der en beskrivelse af, hvordan dette gøres.

Projektet består af 6 opgaver, hvoraf nogle har flere delopgaver. For hver opgave er angivet, hvor mange procent opgaven tæller af kursets samlede karakter. Bemærk, at delopgaver ikke nødvendigvis vægtes lige højt.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (2%)

Angiv negeringen af følgende udsagn

$$\forall x \in \mathbb{N}_+ : \exists y \in \mathbb{N}_+ - \{1\} : \; y | x \wedge y \neq x$$

Hvilket af de to udsagn er sandt (det oprindelige eller det negerede)?

Opgave 2 (3%)

Lad A, B og C være mængder. Hvert af de følgende tre udtryk skal forenkles mest muligt.

a) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cup C)$

b) $\overline{A \cup B} \cup B$

c) $\overline{A \cup B} \cap B$

Opgave 3 (2%)

Angiv samtlige elementer i mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid \gcd(x, y) = 6 \;\wedge\; x \leq y \leq 20\}$$

Opgave 4 (4%)

Lad f og g være funktioner defineret på følgende måde:

$$f : \mathbb{N}_+ \mapsto \mathbb{N}_+ \quad f(n) = 2^n$$
$$g : \mathbb{N}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \quad g(n) = \log_2(n)$$

a) Er f surjektiv?

b) Hvad er kardinaliteten af f's værdimængde (engelsk: range)?

c) Angiv $(f \circ g)(2)$.

d) Er $f \circ g$ bijektiv?

Opgave 5 (5%)

Et *fuldt ternært træ* kan defineres på følgende måde:

Basis-skridt Træet bestående af præcis én knude er et fuldt ternært træ. Denne knude kaldes roden i træet.

Induktions-skridt Antag, at T_1, T_2 og T_3 er fulde ternære træer. Lad T bestå af T_1, T_2 og T_3 samt en knude (kaldet roden) med en kant til hver af rødderne i T_1, T_2 og T_3. Da er T et fuldt ternært træ.

a) Angiv fem af træerne dannet i de to første rekursive skridt.

b) Bevis, at der for ethvert fuldt ternært træ T gælder, at

$$n(T) \equiv 1 \pmod 3$$

hvor $n(T)$ betegner antallet af knuder i træet.

Opgave 6 (4%)

Lad $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$ og $m \geq 2$.

a) Vis, at

$$a \equiv b \pmod m \;\wedge\; c \equiv d \pmod m \;\Rightarrow\; a - c \equiv b - d \pmod m$$

b) Antag, at $c > 0$. Vis, at

$$a \equiv b \pmod m \;\Rightarrow\; ac \equiv bc \pmod{cm}$$