Skriftlig Eksamen
Kombinatorik, Sandsynlighed og Randomiserede Algoritmer (DM528)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Torsdag den 12. januar 2012 kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 4 opgaver på 6 nummererede sider (1–6).
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra kursets lærebøger, noter og øvelsesopgaver. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

You are allowed to use any textbooks and any notes you have for this course. Pocket calculators are also allowed.

The exam paper consists of 4 problems on 6 numbered pages (1–6).
The weight assigned to each problem in grading is given in parentheses at the start of each problem. Note that the individual questions of a problem do not necessarily have the same weight.

You may refer to results from the course textbooks and notes and to exercises that have been assigned during the course. References to other books than those used in the course will not be accepted.

Remember to argue for the correctness of your results!

Opgave 1 (20%)

Denne opgave handler om at løse følgende inhomogene rekursionsligning

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 \tag{1}$$

med begyndelsesbetingelser $a_0 = a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Den associerede homogene rekursionsligning er

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \tag{2}$$

a) Angiv den generelle løsning til (2) uden hensyntagen til begyndelsesbetingelserne.

b) Angiv en bestemt (particular) løsning til (1) uden hensyntagen til begyndelsesbetingelserne.

c) Angiv løsningen til (1), når begyndelsesbetingelserne også tages i betragtning.

Problem 1 (20%)

Consider the following inhomogeneous recurrence relation

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 \tag{3}$$

with initial conditions $a_0 = a_1 = \dfrac{1}{2}$.

The associated homogeneous recurrence relation is

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \tag{4}$$

a) State the general solution of (4), disregarding the initial conditions.

b) State a particular solution of (3), disregarding the initial conditions.

c) State the solution of (3) satisfying the initial conditions.

Opgave 2 (25%)

Denne opgave handler om varianter af SAT-problemet.
Ligesom i noterne lader vi k betegne antallet af led (clauses) i et givet SAT-udtryk.

a) I afsnit 13.4 i noterne så vi på MAX 3-SAT, hvor det gælder om at maksimere antallet af sande led i et givet 3-SAT-udtryk. For algoritmen, vi analyserede, er det forventede antal sande led $7k/8$.

   Vis, at sandsynligheden for, at kun $k/2$ led er sande, er mindre end $e^{-9k/112}$.

b) Nu ser vi på det generelle MAX SAT problem, hvor hvert led kan have et vilkårligt antal literals.
   Et eksempel på et SAT-udtryk med $k = 3$ kunne være

$$(x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3)$$

   Angiv en algoritme, for hvilken det forventede antal sande led er mindst $k/2$.
   Husk at argumentere for, at din algoritme har den angivne forventningsværdi.

c) Argumentér for, at der ikke kan eksistere en algoritme til MAX SAT, som garanterer en højere forventningsværdi end $k/2$. D.v.s. giv et eksempel på et SAT-udtryk, hvor ingen algoritme kan have en forventningsværdi, som er højere end $k/2$.

d) Nu ser vi på 4-SAT, hvor hvert led har præcis 4 literals.
   Et eksempel på et 4-SAT-udtryk kunne være

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)$$

   Argumentér for, at ethvert 4-SAT udtryk med højst 15 led kan opfyldes; d.v.s. at for ethvert sådant udtryk findes der en tildeling af sandhedsværdier til variablerne, så udtrykket er sandt.

Problem 2 (25%)

In this problem, we consider variants of the SAT problem.
As in the notes, we let k denote the number of clauses in a given SAT expression.

a) In Section 13.4 of the notes, we considered the MAX 3-SAT problem where the goal is to maximize the number of satisfied clauses of a given 3-SAT expression. For the algorithm considered, the expected number of satisfied clauses is $7k/8$.

   Show that probability that only $k/2$ clauses are satisfied is less than $e^{-9k/112}$.

b) Now consider the general MAX SAT problem where each clause can have any number of literals.
   An example of a SAT expression with $k = 3$ could be

$$(x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3)$$

   Give an algorithm such that the expected number of satisfied clauses is at least $k/2$.
   Remember to argue that your algorithm has the stated expectation.

c) Argue that an algorithm for MAX SAT that guarantees a higher expectation than $k/2$ cannot exist. In other words, give a SAT expression for which no algorithm can have an expectation higher than $k/2$.

d) Now consider the 4-SAT problem where each clause has exactly 4 literals.
   An example of a 4-SAT expression could be

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)$$

   Argue that any 4-SAT expression with at most 15 clauses is satisfiable; i.e., for each such expression, there is a truth assignment to the variables such that all clauses are true.

Opgave 3 (30%)

Denne opgave handler om at fordele bolde i kasser.
Kasserne kan skelnes fra hinanden.

Antag først, at der er 5 kasser og 10 identiske bolde.

a) På hvor mange forskellige måder kan de 10 bolde fordeles i de 5 kasser?

b) Antag nu, at der skal være mindst én bold i hver kasse.

   På hvor mange forskellige måder kan boldene da fordeles i kasserne?

c) Antag nu, at 5 af boldene er røde, og 5 af boldene er blå.

   På hvor mange forskellige måder kan boldene nu fordeles i kasserne?

   (Det er ikke længere et krav, at der skal være mindst én bold i hver kasse.)

d) Antag nu, at der er 10 kasser $K_1, K_2, \ldots, K_{10}$, og at de er placeret i den nævnte rækkefølge.
   Antag endvidere, at der er 7 røde bolde og 3 blå bolde.

   Boldene skal fordeles, så der kommer præcis en bold i hver kasse.
   Desuden skal der være mindst en rød bold mellem hvert par af blå bolde; d.v.s. for $i = 1, 2, \ldots, 9$ skal mindst en af kasserne K_i og K_{i+1} indeholde en rød bold.

   På hvor mange forskellige måder kan dette gøres?

Nu ser vi igen på identiske bolde. Lad n betegne antallet af kasser.
Antag, at boldene bliver anbragt i kasserne en for en. For hver bold vælges en kasse uniformt tilfældigt; d.v.s. hver bold har sandsynlighed $\frac{1}{n}$ for at ende i hver af de n kasser.

e) Først ser vi på en bestemt kasse K_i. Hvad er det forventede antal bolde, der skal fyldes i kasserne, før K_i modtager den første bold?

f) Hvad er det forventede antal bolde, der skal fyldes i kasserne, før alle kasser har modtaget mindst én bold?

Problem 3 (30%)

Consider the problem of distributing balls into distinguisable boxes.

First, assume that there are 5 boxes and 10 identical balls.

a) In how many different ways can the 10 balls be distributed into the 5 boxes?

b) Now assume that each box must contain at least one ball.

In how many different ways can the balls be distributed into the boxes?

c) Assume now that there are 5 red balls and 5 blue balls.

In how many different ways can the balls be distributed into the boxes?

(It is no longer required that each box contains at least one ball.)

d) Now assume that there are 10 boxes $K_1, K_2, \ldots, K_{10}$, in the stated order.
Further assume that there are 7 red balls and 3 blue balls.

Each box must contain exactly one ball. Furthermore, between each pair of blue balls, there must be at least one red ball; i.e., for $i = 1, 2, \ldots, 9$, at least one of the boxes K_i and K_{i+1} must contain a red ball.

In how many different ways can this be done?

We now consider n distinguishable boxes and a number of identical balls. Assume that the balls are placed in the boxes, one by one. For each ball, a box is chosen uniformly at random; i.e., each ball has a probability of $1/n$ of ending up in each of the n boxes.

e) First consider a given box K_i. What is the expected number of balls to be put into boxes before K_i receives a ball for the first time?

f) What is the expected number of balls to be put into boxes before all boxes have received at least one ball each?

Opgave 4 (25%)

I denne opgave ser vi på to terninger, en falsk og en ægte.
Med den falske terning slår man 6 med sandsynlighed $\frac{1}{2}$, og hver af de fem andre udfald har sandsynlighed $\frac{1}{10}$.

Vi slår med en af terningerne. Med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ er det den ægte terning, der kastes, og med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ er det den falske.

a) Hvad er det forventede antal øjne?

b) Hvad er variansen af antallet af øjne?

c) Antag, at terningen viser 6 øjne.
Hvad er da sandsynligheden for, at det var den falske terning, der blev kastet?

Problem 4 (25%)

We consider a fair and a biased die.
With the biased die, the probability that 6 comes up is $\frac{1}{2}$. The five remaining possible outcomes each have a probability of $\frac{1}{10}$.

One die is rolled. With probability $\frac{1}{2}$, the fair die is rolled, and with probability $\frac{1}{2}$, the biased die is rolled.

a) What is the expected number that appears when the die is rolled?

b) What is the variance of the number that appears?

c) Assume that the number 6 appears.
In this case, what is the probability that the biased die was rolled?