Skriftlig Eksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM535)

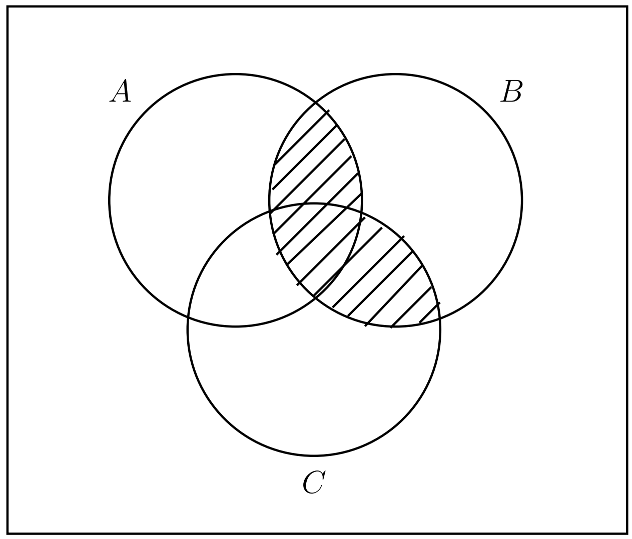
Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Torsdag den 3. januar 2013 kl. 10–13

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 5 nummererede sider (1–5).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!



Figur 1: Venn-diagrammet anvendt i Opgave 1

Opgave 1 (15%)

a) Betragt Venn-diagrammet i Figur 1. Hvilke af de fire nedenstående mængder svarer til det skraverede område i Venn-diagrammet?

1. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
2. $(\overline{A \cup B}) \cap C$
3. $B - (\overline{A \cup C})$
4. $(A \cup C) \cap B$

b) Hvis A er tælleligt uendelig, og $A - B$ er endelig, hvad er da kardinaliteten af $A \cap B$?

Opgave 2 (15%)

Lad $A = \{2, 4, 8, 16\}$.

Angiv sandhedsværdien af hvert af de følgende tre udsagn.

a) $\forall x \in A\colon \exists y \in A\colon y|x$

b) $\exists x \in A\colon \forall y \in A\colon y|x$

c) $\forall x \in A\colon \forall y \in A\colon y|x$

Opgave 3 (15%)

Betragt matricerne $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Beregn $A \cdot B$.

b) Lad $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, hvor $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{Z}$.

Bevis, at alle tal i $A \cdot C$ er heltal.

Opgave 4 (15%)

a) Hvor mange løsninger har følgende kongruens-system?

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 1 \pmod{2} \\
x &\equiv 2 \pmod{4}
\end{aligned}
$$

b) Hvor mange løsninger har følgende kongruens-system i intervallet $0, 1, \ldots, 89$?

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 1 \pmod{2} \\
x &\equiv 2 \pmod{3} \\
x &\equiv 3 \pmod{5}
\end{aligned}
$$

c) Angiv samtlige løsninger til følgende kongruens-system i intervallet $0, 1, \ldots, 89$.

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 1 \pmod{2} \\
x &\equiv 1 \pmod{3} \\
x &\equiv 1 \pmod{5}
\end{aligned}
$$

Opgave 5 (40%)

Denne opgave handler om binære relationer på mængden $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

I kurset har vi set, hvordan relationer kan repræsenteres v.h.a. opremsning, mængde-bygger-notation, orienterede grafer eller matricer. For matricerne gælder (som sædvanligt), at elementerne opskrives i stigende orden; d.v.s. for mængden A ovenfor repræsenteres elementet 2 af første række og første søjle, elementet 3 repræsenteres af anden række og anden søjle, o.s.v.

a) Lad $R_a = \{(a, b) \in A \times A \mid a \equiv b \pmod 3\}$.

   Hvilke relationer i Figur 2 er lig med R_a?

b) Lad $R_b = \{(a, b) \in A \times A \mid a|b\}$.

   Hvilke relationer i Figur 2 er lig med R_b?

c) Lad $R_c = \{(a, b) \in A \times A \mid \gcd(a, b) = 1\}$.
   (Husk, at "gcd" betyder "største fælles divisor".)

   Hvilke relationer i Figur 2 er lig med R_c?

d) Hvilke af relationerne R_a, R_b og R_c er ækvivalens-relationer?

e) Hvilke af relationerne R_a, R_b og R_c er partielle ordninger?

$\{(a,b) \in A \times A \mid \text{lcm}(a,b) = a \cdot b\}$
(Husk, at “lcm” betyder “mindste fælles multiplum”.)

(a) Relationen R_1

$\{(2,2),(2,5),(3,3),(3,6),(4,4),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6)\}$

(b) Relationen R_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

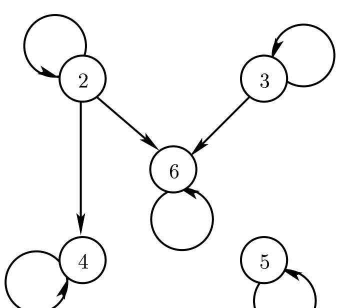
(c) Relationen R_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

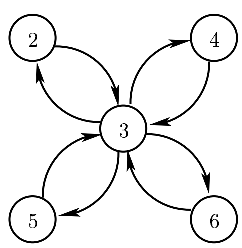
(d) Relationen R_4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

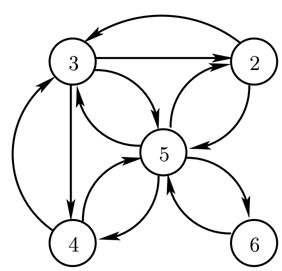
(e) Relationen R_5



(f) Relationen R_6



(g) Relationen R_7



(h) Relationen R_8

Figur 2: Relationer til Opgave 5