

DM547 — Diskret Matematik

Spørgsmål 1 (11%)

Hvilke udsagn er sande?

Husk, at symbolet $|$ betyder “går op i”.

Which propositions are true?

Recall that the symbol $|$ means “divides”.

Svar 1.a: $\forall n \in \mathbb{Z}: 2n > n + 2$

Svar 1.b: $\exists n \in \mathbb{Z}: 2 \mid (3n + 1)$

Svar 1.c: $\exists k \in \mathbb{Z}: \forall n \in \mathbb{Z}: n = kn$

Svar 1.d: $\exists k \in \mathbb{Z}: \forall n \in \mathbb{Z}: 2 \mid (n + k)$

Svar 1.e: $\forall n \in \mathbb{Z}: \forall k \in \mathbb{Z}: (n > k \vee k \geq n)$

Spørgsmål 2 (4%)

Hvilket udsagn er ækvivalent med $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}: n > 2n)$?

Which proposition is equivalent to $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}: n > 2n)$?

Svar 2.a: $\exists n \in \mathbb{Z}: n > 2n$

Svar 2.b: $\exists n \in \mathbb{Z}: n = 2n$

Svar 2.c: $\exists n \in \mathbb{Z}: n \neq 2n$

Svar 2.d: $\forall n \in \mathbb{Z}: n \leq 2n$

Svar 2.e: $\forall n \in \mathbb{Z}: n < 2n$

Svar 2.f: $\forall n \in \mathbb{Z}: n > 2n$

Svar 2.g: $\exists n \in \mathbb{Z}: n \leq 2n$

Svar 2.h: $\exists n \in \mathbb{Z}: n < 2n$

Svar 2.i: $\forall n \in \mathbb{Z}: n = 2n$

Svar 2.j: $\forall n \in \mathbb{Z}: n \neq 2n$

Spørgsmål 3 (15%)

Hvilke udsagn er ækvivalente med $\neg p \wedge q$?

Which propositions are equivalent to $\neg p \wedge q$?

Svar 3.a: $\neg(p \vee \neg q)$

Svar 3.b: $\neg(q \Rightarrow p)$

Svar 3.c: $\neg(p \Rightarrow q)$

Svar 3.d: $(p \oplus q) \wedge q$

Svar 3.e: $(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p$

Svar 3.f: $\neg q \Rightarrow p$

Svar 3.g: $p \vee \neg q$

Svar 3.h: $\neg(p \vee q)$

Spørgsmål 4 (7%)

Lad A , B og C være mængder. Hvilke udsagn er sande?

Let A , B , and C be sets. Which propositions are true?

Svar 4.a: $\overline{A \cup B} = A \cap B$

Svar 4.b: $A - B = A \cap \overline{B}$

Svar 4.c: $(A \cap B) - C = (A - C) \cap B$

Svar 4.d: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Svar 4.e: $(A \cup B) - A = B$

Spørgsmål 5 (4%)

Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x$. Angiv den sammensatte funktion $f \circ g$.

Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = 2x$. Choose the composition $f \circ g$.

Svar 5.a: $(f \circ g)(x) = 2x^3$

Svar 5.b: $(f \circ g)(x) = 2x + x^2$

Svar 5.c: $(f \circ g)(x) = 2x^2$

Svar 5.d: $(f \circ g)(x) = 4x^2$

Svar 5.e: $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x}$

Svar 5.f: $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

Svar 5.g: $(f \circ g)(x) = \frac{x^2}{2}$

Svar 5.h: $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x}$

Svar 5.i: $(f \circ g)(x) = 4x^3$

Spørgsmål 6 (5%)

Hvilke af nedenstående funktioner er bijektive?

Which of the following functions are bijective?

Svar 6.a: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$

Svar 6.b: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

Svar 6.c: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$

Svar 6.d: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x}$

Spørgsmål 7 (3%)

Dette spørgsmål og det følgende handler om nedenstående rekursive definition.

This question and the following concern the following recursive definition.

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \text{ for } n \geq 2$$

Angiv a_3 .

Choose a_3 .

Svar 7.a: 1

Svar 7.b: 2

Svar 7.c: 3

Svar 7.d: 4

Svar 7.e: 5

Svar 7.f: 6

Svar 7.g: 7

Svar 7.h: 8

Svar 7.i: 9

Svar 7.j: 10

Svar 7.k: 11

Svar 7.l: 12

Svar 7.m: 13

Svar 7.n: 14

Svar 7.o: 15

Spørgsmål 8 (14%)

Betragt igen den rekursive definition fra forrige spørgsmål:

Consider again the recursive definition from the previous question:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 2n - 1, \text{ for } n \geq 2\end{aligned}$$

Denne opgave handler om at bevise, at $a_n = n^2$, for alle $n \geq 1$.
Hvilke af nedenstående muligheder udgør korrekte induktionsbeviser, inkl. korrekte begrundelser?

*This question is about proving that $a_n = n^2$, for all $n \geq 1$.
Choose the options that constitute a correct proof by induction, incl. correct arguments.*

Svar 8.a: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$ og $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 3$ gælder

$$\begin{aligned}a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2\end{aligned}$$

Svar 8.b: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$ og $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + 2(n+1) - 1 \\ &= a_n + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 2n - 1 + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 4n \\ &= (n-1)^2 + 4n, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

Svar 8.c: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2(n+1) - 1 \\ &= a_n + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 2n - 1 + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 4n \\ &= (n-1)^2 + 4n, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Svar 8.d: **Basis:** $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 3$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Svar 8.e: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_{n+1} = (n+1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Svar 8.f: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Svar 8.g: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_n = n^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= n^2 + 2(n+1) - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Svar 8.h: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Spørgsmål 9 (13%)

Lad $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvilke udsagn er sande?

Husk, at symbolet $|$ betyder "går op i", og symbolet \nmid betyder "går ikke op i".

Let $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Which propositions are true?

Recall that the symbol $|$ means "divides" and the symbol \nmid means "does not divide".

Svar 9.a: $2 \mid a \wedge 4 \mid b \Rightarrow 2 \mid (a + b)$

Svar 9.b: $a \nmid 4 \Rightarrow a \nmid 12$

Svar 9.c: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid 3(b + c)$

Svar 9.d: $(a + b) \mid c \Rightarrow a \mid c \wedge b \mid c$

Svar 9.e: $a \mid 4 \Rightarrow a \mid 12$

Svar 9.f: $a \nmid b \wedge a \nmid c \Rightarrow a \nmid bc$

Svar 9.g: 5 og 16 er indbyrdes primiske.

5 and 16 are relatively prime.

Spørgsmål 10 (8%)

Hvilke udsagn er sande?

Which propositions are true?

Svar 10.a: $6 \equiv 31 \pmod{5}$

Svar 10.b: $-3 \equiv 7 \pmod{5}$

Svar 10.c: $3 \equiv 3 \pmod{5}$

Svar 10.d: $-6 \equiv 6 \pmod{5}$

Svar 10.e: $5a \equiv 5b \pmod{7} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{7}$

Svar 10.f: $4 \equiv 40 \pmod{5}$

Spørgsmål 11 (5%)

Angiv den transitive lukning af relationen $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, e)\}$.

Choose the transitive closure of the relation $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, e)\}$.

Svar 11.a: $\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

Svar 11.b: $\{(a, a), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e)\}$

Svar 11.c: $\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e)\}$

Svar 11.d: $\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, e)\}$

Svar 11.e: $\{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (b, e)\}$

Svar 11.f: $\{(a, c), (b, d), (b, e)\}$

Svar 11.g: $\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

Svar 11.h: $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

Spørgsmål 12 (11%)

Betragt nedenstående relationer på mængden $\{a, b, c\}$.
Hvilke af relationerne er ækvivalensrelationer?

*Consider the following relations on the set $\{a, b, c\}$.
Which of the relations are equivalence relations?*

Svar 12.a: $\{(a, a), (a, b), (a, c)\}$

Svar 12.b: $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Svar 12.c: $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

Svar 12.d: $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

Svar 12.e: $\{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}$

Svar 12.f: $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$