DM549 — Diskrete Metoder til Datalogi

Spørgsmål 1 (8%)

Hvilke udsagn er sande?
Husk, at symbolet $|$ betyder "går op i".

Which propositions are true?
Recall that the symbol $|$ means "divides".

Svar 1.a: $\forall n \in \mathbb{Z}\colon 2n > n + 2$

Svar 1.b: $\exists n \in \mathbb{Z}\colon 2 \mid (3n + 1)$

Svar 1.c: $\exists k \in \mathbb{Z}\colon \forall n \in \mathbb{Z}\colon n = kn$

Svar 1.d: $\exists k \in \mathbb{Z}\colon \forall n \in \mathbb{Z}\colon 2 \mid (n + k)$

Svar 1.e: $\forall n \in \mathbb{Z}\colon \forall k \in \mathbb{Z}\colon (n > k \lor k \geq n)$

Spørgsmål 2 (3%)

Hvilket udsagn er ækvivalent med $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}\colon n > 2n)$?

Which proposition is equivalent to $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}\colon n > 2n)$?

Svar 2.a: $\exists n \in \mathbb{Z}\colon n > 2n$

Svar 2.b: $\exists n \in \mathbb{Z}\colon n = 2n$

Svar 2.c: $\exists n \in \mathbb{Z}\colon n \neq 2n$

Svar 2.d: $\forall n \in \mathbb{Z}\colon n \leq 2n$

Svar 2.e: $\forall n \in \mathbb{Z}\colon n < 2n$

Svar 2.f: $\forall n \in \mathbb{Z}\colon n > 2n$

Svar 2.g: $\exists n \in \mathbb{Z}\colon n \leq 2n$

Svar 2.h: $\exists n \in \mathbb{Z}\colon n < 2n$

Svar 2.i: $\forall n \in \mathbb{Z}\colon n = 2n$

Svar 2.j: $\forall n \in \mathbb{Z} \colon n \neq 2n$

Spørgsmål 3 (11%)

Hvilke udsagn er ækvivalente med $\neg p \wedge q$?

Which propositions are equivalent to $\neg p \wedge q$?

Svar 3.a: $\neg(p \vee \neg q)$

Svar 3.b: $\neg(q \Rightarrow p)$

Svar 3.c: $\neg(p \Rightarrow q)$

Svar 3.d: $(p \oplus q) \wedge q$

Svar 3.e: $(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p$

Svar 3.f: $\neg q \Rightarrow p$

Svar 3.g: $p \vee \neg q$

Svar 3.h: $\neg(p \vee q)$

Spørgsmål 4 (5%)

Lad A, B og C være mængder. Hvilke udsagn er sande?

Let A, B, and C be sets. Which propositions are true?

Svar 4.a: $\overline{A \cup B} = A \cap B$

Svar 4.b: $A - B = A \cap \overline{B}$

Svar 4.c: $(A \cap B) - C = (A - C) \cap B$

Svar 4.d: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Svar 4.e: $(A \cup B) - A = B$

Spørgsmål 5 (4%)

Hvilke udsagn er sande?

Which propositions are true?

Svar 5.a: $|\{1000, 1001\}| = 2$

Svar 5.b: $|\{1, 2, 2, 3\}| = 4$

Svar 5.c: Kardinaliteten af $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ er $\aleph_0$.
The cardinality of $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *is* $\aleph_0$.

Spørgsmål 6 (3%)

Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x$. Angiv den sammesatte funktion $f \circ g$.
Let $f(x) = x^2$ *and* $g(x) = 2x$. *Choose the composition* $f \circ g$.

Svar 6.a: $(f \circ g)(x) = 2x^3$

Svar 6.b: $(f \circ g)(x) = 2x + x^2$

Svar 6.c: $(f \circ g)(x) = 2x^2$

Svar 6.d: $(f \circ g)(x) = 4x^2$

Svar 6.e: $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x}$

Svar 6.f: $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

Svar 6.g: $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2}{2}$

Svar 6.h: $(f \circ g)(x) = \dfrac{2}{x}$

Svar 6.i: $(f \circ g)(x) = 4x^3$

Spørgsmål 7 (4%)

Hvilke af nedenstående funktioner er bijektive?
Which of the following functions are bijective?

Svar 7.a: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$

Svar 7.b: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

Svar 7.c: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$

Svar 7.d: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$

Spørgsmål 8 (2%)

Dette spørgsmål og det følgende handler om nedenstående rekursive definition.

This question and the following concern the following recursive definition.

$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ \text{for } n \geq 2$$

Angiv a_3.

Choose a_3.

Svar 8.a: 1

Svar 8.b: 2

Svar 8.c: 3

Svar 8.d: 4

Svar 8.e: 5

Svar 8.f: 6

Svar 8.g: 7

Svar 8.h: 8

Svar 8.i: 9

Svar 8.j: 10

Svar 8.k: 11

Svar 8.l: 12

Svar 8.m: 13

Svar 8.n: 14

Svar 8.o: 15

Spørgsmål 9 (11%)

Betragt igen den rekursive definition fra forrige spørgsmål:

Consider again the recursive definition from the previous question:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_n &= a_{n-1} + 2n - 1, \text{ for } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Denne opgave handler om at bevise, at $a_n = n^2$, for alle $n \geq 1$.
Hvilke af nedenstående muligheder udgør korrekte induktionsbeviser, inkl. korrekte begrundelser?

This question is about proving that $a_n = n^2$, for all $n \geq 1$.
Choose the options that constitute a correct proof by induction, incl. correct arguments.

Svar 9.a: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$ og $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 3$ gælder

$$
\begin{aligned}
a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

Svar 9.b: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$ og $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2(n+1) - 1 \\ &= a_n + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 2n - 1 + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 4n \\ &= (n-1)^2 + 4n, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Svar 9.c: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2(n+1) - 1 \\ &= a_n + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 2n - 1 + 2n + 1 \\ &= a_{n-1} + 4n \\ &= (n-1)^2 + 4n, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Svar 9.d: **Basis:** $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 3$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Svar 9.e: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_{n-1} = (n-1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Svar 9.f: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_n = n^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= n^2 + 2(n+1) - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Svar 9.g: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsantagelse: $a_{n+1} = (n+1)^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Svar 9.h: **Basis:** $a_1 = 1 = 1^2$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Spørgsmål 10 (2%)

Dette spørgsmål og det følgende handler om matricerne A og B samt deres produkt $C = A \cdot B$:

This question and the following concern the matrices A and B as well as their product $C = A \cdot B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvor mange rækker har C?

How many rows does C have?

Svar 10.a: 1

Svar 10.b: 2

Svar 10.c: 3

Svar 10.d: 4

Svar 10.e: 5

Svar 10.f: 6

Svar 10.g: 9

Svar 10.h: 10

Spørgsmål 11 (3%)

Betragt igen matricerne A og B samt deres produkt $C = A \cdot B$:

Consider again the matrices A, B, and their product $C = A \cdot B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvad er c_{11}, d.v.s. hvad står der i feltet, der ligger første række og første søjle i C?

Choose c_{11}, i.e., the number in the first row and first column of C.

Svar 11.a: 0

Svar 11.b: 1

Svar 11.c: 2

Svar 11.d: 3

Svar 11.e: 4

Svar 11.f: 5

Svar 11.g: 6

Svar 11.h: 7

Svar 11.i: 8

Spørgsmål 12 (10%)

Lad $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvilke udsagn er sande?
Husk, at symbolet $\mid$ betyder "går op i", og symbolet $\nmid$ betyder "går ikke op i".

Let $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Which propositions are true?
Recall that the symbol $\mid$ means "divides" and the symbol $\nmid$ means "does not divide".

Svar 12.a: $2 \mid a \wedge 4 \mid b \;\Rightarrow\; 2 \mid (a+b)$

Svar 12.b: $a \nmid 4 \;\Rightarrow\; a \nmid 12$

Svar 12.c: $a \mid b \wedge a \mid c \;\Rightarrow\; a \mid 3(b+c)$

Svar 12.d: $(a+b) \mid c \;\Rightarrow\; a \mid c \wedge b \mid c$

Svar 12.e: $a \mid 4 \;\Rightarrow\; a \mid 12$

Svar 12.f: $a \nmid b \wedge a \nmid c \;\Rightarrow\; a \nmid bc$

Svar 12.g: 5 og 16 er indbyrdes primiske.

5 *and* 16 *are relatively prime.*

Spørgsmål 13 (6%)

Hvilke udsagn er sande?

Which propositions are true?

Svar 13.a: $6 \equiv 31 \pmod 5$

Svar 13.b: $-3 \equiv 7 \pmod 5$

Svar 13.c: $3 \equiv 3 \pmod 5$

Svar 13.d: $-6 \equiv 6 \pmod 5$

Svar 13.e: $5a \equiv 5b \pmod 7 \;\Leftrightarrow\; a \equiv b \pmod 7$

Svar 13.f: $4 \equiv 40 \pmod 5$

Spørgsmål 14 (3%)

Hvilke tal er løsninger til kongruensen $3x \equiv 3 \pmod 6$?

Which numbers are solutions to the congruence $3x \equiv 3 \pmod 6$*?*

Svar 14.a: 0

Svar 14.b: 1

Svar 14.c: 2

Svar 14.d: 3

Svar 14.e: 4

Svar 14.f: 5

Svar 14.g: 6

Svar 14.h: 7

Spørgsmål 15 (3%)

Hvor mange løsninger mellem 0 og 119 har følgende kongruenssystem?

How many solutions between 0 and 119 does the following system of congruenses have?

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 4 \pmod 5 \end{aligned}$$

Svar 15.a: 4

Svar 15.b: 0

Svar 15.c: 1

Svar 15.d: 2

Svar 15.e: 3

Svar 15.f: 5

Svar 15.g: 6

Svar 15.h: 7

Svar 15.i: 8

Svar 15.j: 9

Svar 15.k: 10

Spørgsmål 16 (4%)

Angiv den transitive lukning af relationen $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, e)\}$.

Choose the transitive closure of the relation $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, e)\}$.

Svar 16.a: $\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

Svar 16.b: $\{(a, a), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e)\}$

Svar 16.c: $\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e)\}$

Svar 16.d: $\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, e)\}$

Svar 16.e: $\{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (b, e)\}$

Svar 16.f: $\{(a, c), (b, d), (b, e)\}$

Svar 16.g: $\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$

Svar 16.h: $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$

Spørgsmål 17 (8%)

Betragt nedenstående relationer på mængden $\{a,b,c\}$.
Hvilke af relationerne er ækvivalensrelationer?

Consider the following relations on the set $\{a,b,c\}$.
Which of the relations are equivalence relations?

Svar 17.a: $\{(a,a),(a,b),(a,c)\}$

Svar 17.b: $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

Svar 17.c: $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$

Svar 17.d: $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

Svar 17.e: $\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c)\}$

Svar 17.f: $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$

Spørgsmål 18 (10%)

Hvilke udsagn er sande?

Which propositions are true?

Svar 18.a: Rækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n}$ konvergerer.

The series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n}$ *is convergent.*

Svar 18.b: $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{1024}$

Svar 18.c: Rækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$ konvergerer.

The series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$ *is convergent.*

Svar 18.d: Følgen $\frac{n^2}{10n+5}$ konvergerer.

The sequence $\frac{n^2}{10n+5}$ *is convergent.*

Svar 18.e: $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n+1/n} = 2$