Skriftlig Reeksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM549)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Mandag den 22. februar 2016 kl. 16–20

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 6 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebøgerne og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (36%)

Betragt følgende tre mængder. Husk, at $a|b$ betyder, at a går op i b.

$$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2|n\}$$
$$A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3|n\}$$
$$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 6|n\}$$

Betragt desuden følgende mængder.

$$B_1 = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$
$$B_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{6} \in \mathbb{Z}\}$$
$$B_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$B_4 = \{4 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$B_5 = A_1 \cap A_2$$
$$B_6 = A_2 \cup A_3$$
$$B_7 = A_2 - A_1$$
$$B_8 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod 3\}$$
$$B_9 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2n \equiv 0 \pmod 2\}$$
$$B_{10} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2n \equiv 3 \pmod 6\}$$
$$B_{11} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \gcd(n, 3) = 3\}$$

Husk, at $\gcd(a, b)$ betyder største fælles divisor (greatest common divisor) af a og b.

a) Angiv for hver af mængderne $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$, om mængden er lig med A_1, A_2, A_3 eller ingen af delene.

b) Hvad er kardinaliteten af A_1?

Opgave 2 (8%)

Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ defineret ved $f(x) = 4x^2 - 2$.

a) Angiv den inverse til f; d.v.s. angiv f^{-1}.

b) Angiv den sammensatte funktion $f \circ f$.

Opgave 3 (8%)

Lad n være et heltal.
Vis, at n^2 er lige, hvis og kun hvis n er lige.

Opgave 4 (15%)

Lad $S_n = \sum_{i=0}^{n} (i+1) \cdot 2^i$, for $i \in \mathbb{N}$

a) Beregn S_0, S_1 og S_2 .

b) Vis v.h.a. induktion, at $S_n = n \cdot 2^{n+1} + 1$, for $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 5 (25%)

Betragt følgende relation på mængden $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2)\}$$

a) Tegn en orienteret graf (directed graph), som repræsenterer R.

b) Er R en ækvivalensrelation?

c) Angiv R^2 og R^3.

d) Lad S være en symmetrisk relation. Vis, at S^2 også er symmetrisk.

Opgave 6 (8%)

Find grænseværdien af $\dfrac{2n^2 + 2n + 3}{n^2 - 3}$ for n gående mod uendelig; d.v.s. find

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{n^2 - 3}$$