Skriftlig Eksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM549)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 16. januar 2015 kl. 10–14

Eksamenssættet består af 7 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 7 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3 \\ g(x) &= x^3 - x \end{aligned}$$

a) Angiv den inverse til f; d.v.s. angiv f^{-1}.

b) Har g en invers?

c) Angiv produktet af f og g, d.v.s. funktionen $f \cdot g$.

d) Angiv den sammensatte funktion $f \circ g$.

Opgave 2 (8%)

Lad $x, y, z \in \mathbb{R}$. Bevis, at

$$x + y > z \;\Rightarrow\; x > \frac{z}{2} \vee y > \frac{z}{2}$$

Opgave 3 (12%)

Betragt rækken $\{a_n\}$ defineret ved

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{hvis } n = 0 \\ 2 \cdot a_{n-1} + 1, & \text{hvis } n \geq 1 \end{cases}$$

a) Beregn a_0, a_1 og a_2

b) Bevis v.h.a. induktion, at $a_n = 2^n - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 4 (17%)

a) Afgør, om nedenstående række konvergerer.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\sqrt{n}}{n^2+2n+1}$$

b) Angiv Maclaurin-rækken for e^{2x}.

Opgave 5 (15%)

Betragt mængden $A = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Hvilke af nedenstående mængder er lig med A?

$S_1 = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$

$S_2 = \{2, 3, 5, 9, \ldots\}$

$S_3 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$S_4 = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

$S_5 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\colon n = 2k+1\}$

$S_6 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists! k \in \mathbb{Z}\colon n = 2k+1\}$

$S_7 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\colon n \neq 2k\}$

$S_8 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\colon 2n+1 = k\}$

Opgave 6 (15%)

Betragt følgende relation på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$R = \{(a, b) \mid a \cdot b \leq 10\}$$

a) Hvilke af følgende par tilhører R?

$$(1, 1), (1, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (5, 3)$$

b) Er R refleksiv?

c) Er R symmetrisk?

d) Er R antisymmetrisk?

e) Er R transitiv?

f) Er R en ækvivalensrelation?

Opgave 7 (18%)

a) Angiv største fælles divisor (greatest common divisor) og mindste fælles multiplum (least common multiple) af 21 og 24.

b) Angiv den **mindste positive løsning** til kongruenssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod{4} \\ x &\equiv 2 \pmod{6} \\ x &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

c) Angiv **samtlige løsninger** til kongruenssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod{3} \\ x &\equiv 1 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$