Skriftlig Eksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM549)

Fredag den 16. januar 2015 kl. 10–14

Løsningsforslag

Opgave 1

a) $y = x^3 - 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+3}$
D.v.s. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$

b) Nej, g er **ikke** invertibel, da den ikke er injektiv.
Eks: $g(0) = 0 = g(1)$.

c) $(f \cdot g)(x) = (x^3 - 3)(x^3 - x) = x^6 - x^4 - 3x^3 + 3x$

d)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - 3 \\ &= (x^6 - 2x^4 + x^2)(x^3 - x) - 3 \\ &= x^9 - 2x^7 + x^5 - x^7 + 2x^5 - x^3 - 3 \\ &= x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3 - 3\end{aligned}$$

Opgave 2

Kontraposition: $x \leq \frac{z}{2} \wedge y \leq \frac{z}{2} \;\Rightarrow\; x + y \leq \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z$

Opgave 3

a) $a_0 = 0$
$a_1 = 2a_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

b) **Basis:** $n = 0$
$a_0 = 0 = 2^0 - 1$

Induktionsantagelse: $n \geq 1$
$a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$

Induktionsskridt: $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 1, && \text{ifølge def.} \\ &= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1, && \text{ifølge ind.ant.} \\ &= 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Opgave 4

a) Bemærk, at $\frac{5\sqrt{n}}{n^2+2n+1} < \frac{5\sqrt{n}}{n^2} = 5 \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$
Dermed gælder ifølge Sammenligningskriteriet, Adams Sætning 9(a), at rækken konvergerer, hvis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergerer.

Denne række konvergerer ifølge Adams Eks. 9.3.1.

Altså **konvergerer** rækken.

Eller:

Integral-testen (Adams Sætning 8):

$$\int_1^\infty \frac{5\sqrt{n}}{n^2+2n+1} = \frac{5}{4}(2+\pi)$$

b) Den n'te afledede af e^{2x} er $2^n e^{2x}$. Dermed er den n'te afledede i 0 2^n.

D.v.s. Maclaurin-rækken for e^{2x} er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

Opgave 5

$A = S_4 = S_5 = S_6 = S_7$ (ulige heltal)

S_1: 2-potenser
$S_2 = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
S_3: ulige **positive** tal
$S_8 = \mathbb{Z}$

Opgave 6

a) $(1,1),(1,4),(2,5),(4,1)$

b) **Nej**. Eks: $(5,5) \notin R$.

c) **Ja**. $ab \leq 10 \Leftrightarrow ba \leq 10$.

d) **Nej**. Eks: $(1,2),(2,1) \in R$.

e) **Nej**. Eks: $(5,2),(2,5) \in R$, men $(5,5) \notin R$.

f) **Nej**. Symmetrisk, men hverken refleksiv eller transitiv.

Opgave 7

a) $21 = 3 \cdot 7$ og $24 = 3 \cdot 8 = 24$.

D.v.s. $\gcd(21, 24) = 3$
og $\mathrm{lcm}(21, 24) = 3 \cdot 7 \cdot 8 = 168$.

b) (KRS kan ikke bruges, da 4 og 6 ikke er indbyrdes primiske.)

Positive løsninger til første kongruens: $4, 8, 12, \ldots$
Positive løsninger til anden kongruens: $2, 8, 14, \ldots$
Positive løsninger til tredje kongruens: $1, 8, 15, \ldots$

Mindste fælles løsning: 8.

c) KRS kan bruges, da 3, 4 og 7 er parvis indbyrdes primiske:

$m = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

$M_1 = 4 \cdot 7 = 28$
$M_2 = 3 \cdot 7 = 21$
$M_3 = 3 \cdot 4 = 12$

$M_1 = 28 = 9 \cdot 3 + 1$
D.v.s. $y_1 = 1$.

$M_2 = 21 = 5 \cdot 4 + 1$
D.v.s. $y_2 = 1$

$3M_3 = 36 = 5 \cdot 7 + 1$
D.v.s. $y_3 = 3$

Dermed er

$$x = 0M_1y_1 + 1M_2y_2 + 3M_3y_3 = 0 + 1 \cdot 21 \cdot 1 + 3 \cdot 12 \cdot 3 = 129$$

en løsning.

$129 = 84 + 45 = m + 45$.
D.v.s. $129 \equiv 45 \pmod{84}$.

D.v.s. løsningsmængden er

$$\{45 + 84k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -39, 45, 129, \ldots\}$$