Skriftlig Eksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM549)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Mandag den 11. januar 2016 kl. 10–14

Eksamenssættet består af 7 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 7 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebøgerne og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (16%)

a) Angiv for hvert af følgende tre udsagn, om udsagnet er sandt eller falsk.

   1. $\forall n \in \mathbb{Z} \colon \exists k \in \mathbb{Z} \colon n = 2k$
   2. $\forall n \in \mathbb{Z} \colon \exists k \in \mathbb{Z} \colon n = 2k \vee n = 2k + 1$
   3. $\exists k \in \mathbb{Z} \colon \forall n \in \mathbb{Z} \colon n = 2k \vee n = 2k + 1$

b) Angiv negeringen af udsagn 3. ovenfor.
   Negeringsoperatoren ($\neg$) må ikke indgå i dit udsagn.

Opgave 2 (6%)

Betragt funktionerne $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = 2x + 1$.

Angiv forskrifter for funktionerne $f \cdot g$ og $f \circ g$.

Opgave 3 (12%)

Husk, at fibonacci-tallene er defineret på følgende måde:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{for } n \geq 2 \end{aligned}$$

Lukas-tallene er tilsvarende defineret på følgende måde:

$$\begin{aligned} l_0 &= 2 \\ l_1 &= 1 \\ l_n &= l_{n-1} + l_{n-2}, \quad \text{for } n \geq 2 \end{aligned}$$

a) Angiv l_2, l_3 og l_4.

b) Vis v.h.a. induktion, at $l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$, for $n \geq 1$.

Opgave 4 (20%)

a) Lad $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, og antag, at $m \geq 2$ og $c \geq 1$.
Vis, at
$$a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow$$
$$ac \equiv bc \pmod{mc}$$

b) Beregn $\gcd(4, 6)$ og $\mathrm{lcm}(4, 6)$.

c) Kan nedenstående kongruenssystem løses v.h.a. den Kinesiske Restklasse-Sætning?
$$x \equiv 3 \pmod{4}$$
$$x \equiv 1 \pmod{6}$$

d) Angiv samtlige løsninger til kongruenssystemet fra spørgsmål c).

Opgave 5 (25%)

Betragt følgende relation på mængden $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (4, 4), (4, 5)\}$$

a) Tegn en orienteret graf, som repræsenterer R.

b) Er R refleksiv?

c) Er R symmetrisk?

d) Er R transitiv?

e) Angiv R^2.

f) Vis, at $S \subseteq S^2$ for enhver refleksiv relation S.

Opgave 6 (10%)

Angiv Taylor-rækken for $e^{\frac{x}{2}-1}$ omkring $x = 2$.

Opgave 7 (11%)

Betragt matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Beregn $A + B$.

b) Beregn $A \cdot B$.

c) Er A symmetrisk?