

Skriftlig Eksamen  
Introduktion til Matematiske Metoder  
(MM537)

Institut for Matematik og Datalogi  
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 16. januar 2015 kl. 10–13

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).

Fuld besvarelse er besvarelse af alle 6 opgaver.

De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

**Husk at begrunde dine svar!**

## Opgave 1 (20%)

Betragt funktionerne  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  og  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 3 \\g(x) &= x^3 - x\end{aligned}$$

- Angiv den inverse til  $f$ ; d.v.s. angiv  $f^{-1}$ .
- Har  $g$  en invers?
- Angiv produktet af  $f$  og  $g$ , d.v.s. funktionen  $f \cdot g$ .
- Angiv den sammensatte funktion  $f \circ g$ .

## Opgave 2 (10%)

Lad  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Bevis, at

$$x + y > z \Rightarrow x > \frac{z}{2} \vee y > \frac{z}{2}$$

## Opgave 3 (15%)

Betragt rækken  $\{a_n\}$  defineret ved

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{hvis } n = 0 \\ 2 \cdot a_{n-1} + 1, & \text{hvis } n \geq 1 \end{cases}$$

- Beregn  $a_0$ ,  $a_1$  og  $a_2$
- Bevis v.h.a. induktion, at  $a_n = 2^n - 1$ , for alle  $n \in \mathbb{N}$ .

## Opgave 4 (25%)

Betragt mængden  $A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

a) Hvilke af nedenstående mængder er lig med  $A$ ?

$$S_1 = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

$$S_2 = \{2, 3, 5, 9, \dots\}$$

$$S_3 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$S_4 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$$

$$S_5 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1\}$$

$$S_6 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists! k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1\}$$

$$S_7 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \forall k \in \mathbb{Z}: n \neq 2k\}$$

$$S_8 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: 2n + 1 = k\}$$

b) Hvad er kardinaliteten af  $A$ ?

## Opgave 5 (25%)

Betragt følgende relation på mængden  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

$$R = \{(a, b) \mid a \cdot b \leq 10\}$$

a) Hvilke af følgende par tilhører  $R$ ?

$$(1, 1), (1, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (5, 3)$$

b) Er  $R$  refleksiv?

c) Er  $R$  symmetrisk?

d) Er  $R$  antisymmetrisk?

e) Er  $R$  transitiv?

f) Er  $R$  en ækvivalensrelation?

## Opgave 6 (5%)

Angiv største fælles divisor (greatest common divisor) og mindste fælles multiplum (least common multiple) af 21 og 24.