Skriftlig Eksamen
Introduktion til Matematiske Metoder (MM537)

Fredag den 16. januar 2015 kl. 10–13

Løsningsforslag

Opgave 1

a) $y = x^3 - 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+3}$
D.v.s. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$

b) Nej, g er **ikke** invertibel, da den ikke er injektiv.
Eks: $g(0) = 0 = g(1)$.

c) $(f \cdot g)(x) = (x^3 - 3)(x^3 - x) = x^6 - x^4 - 3x^3 + 3x$

d)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - 3\\ &= (x^6 - 2x^4 + x^2)(x^3 - x) - 3\\ &= x^9 - 2x^7 + x^5 - x^7 + 2x^5 - x^3 - 3\\ &= x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3 - 3\end{aligned}$$

Opgave 2

Kontraposition: $x \leq \frac{z}{2} \wedge y \leq \frac{z}{2} \;\Rightarrow\; x + y \leq \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z$

Opgave 3

a) $a_0 = 0$
$a_1 = 2a_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

b) **Basis:** $n = 0$
$a_0 = 0 = 2^0 - 1$

Induktionsantagelse: $n \geq 1$
$a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$

Induktionsskridt: $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 1, && \text{ifølge def.} \\ &= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1, && \text{ifølge ind.ant.} \\ &= 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Opgave 4

a) $A = S_4 = S_5 = S_6 = S_7$ (ulige heltal)

S_1: 2-potenser
$S_2 = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
S_3: ulige **positive** tal
$S_8 = \mathbb{Z}$

b) Mængden er uendelig og tællelig: $-1, 1, -3, 3, -5, 5, \ldots$
Dermed er kardinaliteten $\aleph_0$.

Opgave 5

a) $(1,1),(1,4),(2,5),(4,1)$

b) **Nej**. Eks: $(5,5) \notin R$.

c) **Ja**. $ab \leq 10 \Leftrightarrow ba \leq 10$.

d) **Nej**. Eks: $(1,2),(2,1) \in R$.

e) **Nej**. Eks: $(5,2),(2,5) \in R$, men $(5,5) \notin R$.

f) **Nej**. Symmetrisk, men hverken refleksiv eller transitiv.

Opgave 6

$21 = 3 \cdot 7$ og $24 = 3 \cdot 8 = 24$.

D.v.s. $\gcd(21,24) = 3$
og $\operatorname{lcm}(21,24) = 3 \cdot 7 \cdot 8 = 168$.