Skriftlig Reeksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM549)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Lørdag den 28. februar 2015 kl. 10–14

Eksamenssættet består af 7 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 7 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (12%)

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ være universet (universal set). Betragt de to mængder

$$A = \{2n \mid n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 \mid n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

a) A

b) B

c) $A \cap B$

d) $A \cup B$

e) $A - B$

f) $\overline{A}$

Opgave 2 (18%)

a) Hvilke af følgende udsagn er sande?

1. $\forall x \in \mathbb{N} \colon \exists y \in \mathbb{N} \colon x < y$
2. $\forall x \in \mathbb{N} \colon \exists! y \in \mathbb{N} \colon x < y$
3. $\exists y \in \mathbb{N} \colon \forall x \in \mathbb{N} \colon x < y$

b) Angiv negeringen af udsagn 1. fra spørgsmål a).
Negerings-operatoren ($\neg$) må ikke indgå i dit udsagn.

Opgave 3 (21%)

Lad R, S og T være binære relationer på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Lad $R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,4)\}$.
   Er R en partiel ordning?

b) Lad $S = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
   Angiv den transitive lukning af S.

c) Lad $T = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$.
   Bemærk, at T er en ækvivalens-relation.
   Angiv T's ækvivalens-klasser.

Opgave 4 (12%)

Betragt rækken $\{a_n\}$ defineret ved

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{hvis } n = 0 \\ 2 \cdot a_{n-1} + 2, & \text{hvis } n \geq 1 \end{cases}$$

a) Angiv a_0, a_1, a_2 og a_3.

b) Bevis v.h.a. induktion, at $a_n = 2^{n+1} + 2^n - 2$, for alle $n \geq 0$.

Opgave 5 (22%)

Hvilke af følgende udsagn er sande?

a) $3 \equiv 21 \pmod{6}$

b) $5 \equiv 14 \pmod{7}$

c) $-12 \equiv 3 \pmod{5}$

d) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon (a \equiv b \pmod{5} \Rightarrow 2a \equiv 2b \pmod{5})$

e) Følgende kongruenssystem har en løsning.

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 5 \pmod{6} \end{aligned}$$

Opgave 6 (8%)

For hvilke værdier af x konvergerer nedenstående række?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^x + 5}$$

Opgave 7 (7%)

Betragt de tre matricer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

a) Beregn $A + B$

b) Beregn $A \cdot C$