Opgave 2

a) For ethvert $x \in \mathbb{N}$ kan vi f.eks. vælge $y = x^2 + 1$.
D.v.s. P er **sandt**.

b) For $y = 1$ findes der intet naturligt tal x, som opfylder uligheden. (Bemærk, at $\mathbb{N}$ i denne opgave ikke indeholder 0.)
D.v.s. Q er **falsk**.

c) V.h.a. De Morgan fås:

$$\begin{aligned}
&\neg P &&\Leftrightarrow \\
&\neg(\forall x \in \mathbb{N}\colon \exists y \in \mathbb{N}\colon x^2 < y) &&\Leftrightarrow \\
&\exists x \in \mathbb{N}\colon \neg(\exists y \in \mathbb{N}\colon x^2 < y) &&\Leftrightarrow \\
&\exists x \in \mathbb{N}\colon \forall y \in \mathbb{N}\colon \neg(x^2 < y) &&\Leftrightarrow \\
&\exists x \in \mathbb{N}\colon \forall y \in \mathbb{N}\colon x^2 \geq y &&
\end{aligned}$$

d) Da P ifølge a) er sandt, er $\neg P$ **falsk**.

Opgave 3

a) Funktionen f er ikke injektiv, da f.eks. $f(-1) = 1 = f(1)$. Dermed er f **ikke** en bijektion, da det kræver, at f er injektiv og surjektiv. (Funktionen er heller ikke surjektiv, da $\mathbb{R}^-$ ikke er indeholdt i værdimængden.)

b) Da f ikke er bijektiv, har den **ikke** en invers funktion.

c) Vi skal finde $g^{-1}(x)$, så

$$g(x) = y \;\Leftrightarrow\; g^{-1}(y) = x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.
Da $g(x) = x + 2$, svarer det til at isolere x i ligningen $y = x + 2$:

$$y = x + 2 \;\Leftrightarrow\; x = y - 2$$

D.v.s $g^{-1}(x) = x - 2$.

d) $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$