DM547/DM549/MM537 – Efterår 2014

1. Obligatoriske Opgave

Standardbesvarelse

Opgave 1

(a) Hvis p er falsk, er $p \wedge q$ falsk. Dermed er hele udsagnet **sandt**.
Hvis p og q begge er sande, er $p \wedge q$ sandt, og $\neg(p \vee q)$ er falsk. Dermed er hele udsagnet **falsk**.
(*Det er også meget fint at angive hele sandhedstabellen.*)

Da udsagnet kan være både sandt og falsk, er det en **kontingens**.

(b) Hvis p og q begge er sande, er $p \wedge q$ sandt, og dermed er hele udsagnet **sandt**.
Hvis p og q har forskellige sandhedsværdier, er både $p \wedge q$ og $\neg p \wedge \neg q$ falsk. Dermed er hele udsagnet **falsk**.
(*Det er også meget fint at angive hele sandhedstabellen.*)

Da udsagnet kan være både sandt og falsk, er det en **kontingens**.

Opgave 2

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}\colon n^2 \in \mathbb{Z}^+$ eller
$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 \in \mathbb{Z}^+$
(Udsagnet er falsk, da $n = 0 \Rightarrow n^2 = 0$.)

(b) $\forall m \in \mathbb{Z}^+ : \forall n \in \mathbb{Z}^- : m \cdot n \in \mathbb{Z}^-$ eller
$m \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \cdot n \in \mathbb{Z}^-$

(c) $\exists m \in \mathbb{Z}^+ : \exists n \in \mathbb{Z}^- : m + n \leq 0$ eller
$\exists m, n \in \mathbb{Z}\colon m < 0 \wedge n > 0 \wedge m + n \leq 0$

Opgave 3

(a) P er sandt. Man kan f.eks. vælge $y = x^2 + 1$.

(b) Q er falsk. Hvis $y = 1$, findes der intet $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$, så $x^2 < y$.

(c)
$$\begin{aligned}
& \neg(\forall x \in \mathbb{N}\colon \exists y \in \mathbb{N}\colon x^2 < y) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists x \in \mathbb{N}\colon \neg(\exists y \in \mathbb{N}\colon x^2 < y), \text{ ifølge De Morgans love for kvantorer} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists x \in \mathbb{N}\colon \forall y \in \mathbb{N}\colon \neg(x^2 < y), \text{ ifølge De Morgans love for kvantorer} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists x \in \mathbb{N}\colon \forall y \in \mathbb{N}\colon x^2 \geq y
\end{aligned}$$

(d) $\neg P$ er falsk, da P ifølge (a) er sandt.