Spørgsmål 1

Lad A, B og C være mængder.
Hvilke af nedenstående mængder er lig med $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?

Let A, B og C be sets.
Which of the following sets are equal to $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?

Svar 1.1: $(A \cap B) \cup C$

Svar 1.2: $(A \cup B) \cap C$

Svar 1.3: $(A \cup B) - C$

Svar 1.4: $(A \cup C) \cap B$

Spørgsmål 2

Lad $f(n) = 2n + 1$. Hvad er $f \circ f$?

Let $f(n) = 2n + 1$. What is $f \circ f$?

Svar 2.1: $4n + 3$

Svar 2.2: $4n + 2$

Svar 2.3: $4n + 1$

Svar 2.4: $2n + 2$

Svar 2.5: $2n^2 + 1$

Svar 2.6: $4n^2 + 4n + 1$

Spørgsmål 3

Angiv største fælles divisor for 15 og 50. D.v.s. angiv gcd(15,50).

What is the greatest common divisor of 15 and 50?

Svar 3.1: 1

Svar 3.2: 3

Svar 3.3: 5

Svar 3.4: 10

Svar 3.5: 15

Svar 3.6: 50

Svar 3.7: 150

Spørgsmål 4

Hvilke tal er kongruente med 17 modulo 5?

Which numbers are congruent to 17 *modulo* 5*?*

Svar 4.1: 5

Svar 4.2: -5

Svar 4.3: 2

Svar 4.4: 27

Svar 4.5: -3

Svar 4.6: -7

Spørgsmål 5

Lad $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvilke udsagn er sande?

Let $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Which propositions are true?

Svar 5.1: $a \mid b \;\Rightarrow\; a \mid -b$

Svar 5.2: $a \mid bc \;\Rightarrow\; a \mid b \vee b \mid c$

Svar 5.3: $2a \equiv 2b \pmod{10} \;\Rightarrow\; a \equiv b \pmod{10}$

Spørgsmål 6

Dette og det næste spørgsmål handler om følgende rekursive definition:

For this question and the following, we will use the following recursive definition:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 3$$
$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}, \text{ for } n \geq 2$$

Angiv a_2.

Choose a_2.

Svar 6.1: 1

Svar 6.2: 2

Svar 6.3: 3

Svar 6.4: 4

Svar 6.5: 5

Svar 6.6: 6

Svar 6.7: 7

Svar 6.8: 8

Svar 6.9: 9

Svar 6.10: 10

Svar 6.11: 11

Spørgsmål 7

Dette spørgsmål handler om at bevise, at $a_n = 3^n$, for $n \geq 0$ (se foregående spørgsmål for definitionen af a_n).
Hvad kan udgøre basis og induktionsskridt i et korrekt induktionsbevis?

This question is about proving that $a_n = 3^n$, for $n \geq 0$ (see the previous question for the definition of a_n).
Which options would constitute a correct proof by induction?

Svar 7.1: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$ og $a_1 = 3 = 3^1$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder, at

$$\begin{aligned}&a_{n-2} = 3^{n-2} \ \wedge \ a_{n-1} = 3^{n-1} \ \Rightarrow \\ &a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3^n\end{aligned}$$

Svar 7.2: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder, at

$$a_{n-1} = 3^{n-1} \ \Rightarrow \ a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

Svar 7.3: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$ og $a_1 = 3 = 3^1$

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder, at

$$a_{n-1} = 3^{n-1} \ \Rightarrow \ a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

Svar 7.4: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$ og $a_1 = 3 = 3^1$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder, at

$$\begin{aligned}&a_{n-1} = 3^{n-1} \ \Rightarrow \\ &a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3^n\end{aligned}$$

Svar 7.5: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder, at

$$\begin{aligned}&a_{n-2} = 3^{n-2} \ \wedge \ a_{n-1} = 3^{n-1} \ \Rightarrow \\ &a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3^n\end{aligned}$$

Svar 7.6: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$

Induktionsskridt: For $n \geq 0$ gælder, at

$$a_n = 3^n \;\Rightarrow$$
$$a_{n+1} = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$$

Svar 7.7: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder, at

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} \colon a_k = 3^k \;\Rightarrow$$
$$a_{n+1} = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$$

Svar 7.8: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$ og $a_1 = 3 = 3^1$

Induktionsskridt: For $n \geq 1$ gælder, at

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} \colon a_k = 3^k \;\Rightarrow$$
$$a_{n+1} = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$$

Svar 7.9: *Basis:* $a_0 = 1 = 3^0$ og $a_1 = 3 = 3^1$

Induktionsskridt: For $n \geq 2$ gælder, at

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \;\Rightarrow\; a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$$