Opgave 39-1:

Lad $n \in \mathbb{N}$, og lad $P(n)$ være udsagnet

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$$

Denne opgave går ud på at bevise, at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$, ved hjælp af induktion.

(a) Hvad er udsagnet $P(1)$?

(b) Bevis $P(1)$, d.v.s. udfør basisskridtet.

(c) Opskriv induktionsantagelsen.

(d) Hvad skal der bevises i induktionsskridtet?

(e) Udfør induktionsskridtet. Angiv, hvor du bruger induktionsantagelsen.

(f) Forklar, hvorfor disse skridt udgør et bevis for, at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 39-2:

Denne opgave går ud på at bevise, at

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(a) Illustrer de første summer ved at farve brøkdele af et liniestykke af længde 2:

```
n = 0: |————————-|              |
n = 1: |————————-|———           |
n = 2: |————————-|————————     |
o.s.v.
```

(b) Observer, at størrelsen, der lægges til, altid er præcis halvdelen af det, der mangler for at dække hele liniestykket.

(c) Formuler observationen som et induktionsbevis.